



HAL
open science

Analyse de quelques problèmes de mécanique des structures par des discrétisations adaptées

Benoit Prabel

► **To cite this version:**

Benoit Prabel. Analyse de quelques problèmes de mécanique des structures par des discrétisations adaptées. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSA Lyon - Ecole Doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Accoustique, 2020. tel-03887983

HAL Id: tel-03887983

<https://cea.hal.science/tel-03887983v1>

Submitted on 7 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION A DIRIGER LES RECHERCHES

présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
et l'Université Claude Bernard LYON I

Analyse de quelques problèmes de mécanique des structures par des discrétisations adaptées

par

Benoit Prabel

Soutenue le 29/06/2020 devant la commission d'examen :

Delphine Brancherie	Professeur au laboratoire Roberval, UTC	Rapporteur
Nicolas Moës	Professeur au laboratoire GeM, Centrale Nantes	Rapporteur
Jean-Jaques Sinou	Professeur au laboratoire LTDS, Centrale Lyon	Rapporteur
Thouraya Baranger	Professeur au laboratoire LMC2, Université Lyon 1	Examineur
Emmanuel De Langre	Professeur au laboratoire Ladhyx, Polytechnique	Président du jury
Anthony Gravouil	Professeur au laboratoire LaMCoS, INSA de Lyon	Superviseur



Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Direction des Energies
Institut des sciences appliquées et de la simulation
Département de Modélisation des Systèmes et Structures
Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques
Laboratoire d'Etudes de DYNamique



Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

Remerciements

A l'heure des remerciements, mes premières pensées vont à Anthony sans qui je n'aurais pas plongé dans cette entreprise aussi vite ! Je me souviens du temps où j'étais son étudiant, et où il m'aidait à faire mes premiers calculs de fissures dans Cast3M. Le temps a passé et c'est toujours un plaisir d'échanger avec lui, de bon conseil et positivement moteur.

Je remercie très sincèrement les membres du jury pour leur investissement dans le travail de lecture du manuscrit et de participation à la soutenance dans des domaines qui ne sont pas toujours les leurs. Leurs analyses et questions alimenteront à coup sûr la réflexion et l'orientation de mes futurs travaux de manière très constructive.

Je dois un grand merci à Philippe, pour avoir relu ce mémoire (en plus des interminables notes techniques qui jalonnent notre quotidien au cea), mais aussi pour le partage de ses connaissances en vibrations, et surtout pour assurer le rôle des "essais" dans les dialogues calculs-essais ;).

Les travaux dont j'ai entrepris ici une synthèse sont le fruit de collaborations diverses et j'ai pleinement conscience de la chance que j'ai eu de croiser le chemin des personnes qui y ont contribué.

En premier lieu, les stagiaires et doctorants : Anita, Anaëlle, Aurélien, Benoit, Romain, Marianne, Lihan, Pascal, Achref, Delphine, Vitor, Adrien, Gaël et Roberto, tous plus sympathiques les uns que les autres en plus d'être des "bons" (voire des "très bons").

Je dois à nouveau remercier Anthony, mais aussi Régis et Georges qui ont assuré le rôle de directeur des dernières thèses que j'ai proposées. Et que dire de Sébastien, super-encadrant des doctorants en vibrations non-linéaires, sans qui les travaux présentés dans ce mémoire auraient une autre saveur. J'ai hâte d'assister à ta soutenance de HDR.

Je n'oublie pas Arnaud, Clémentine, Thomas et Véronique, avec qui c'est un plaisir de travailler.

Le travail présenté n'aurait pas été possible sans la bonne humeur du dernier village gaulois du CEA, et j'ai un peu honte de ne pas citer tous mes collègues du SEMT et plus particulièrement de DYN, mais je vais céder à la facilité d'un remerciement général pour ces sympathiques moments de vie au travail faits d'échanges simples, amicaux et enrichissants.

De manière plus large, ce mémoire a aussi bénéficié des discussions souvent stimulantes que j'ai pu avoir avec les personnes du Lamcos, de l'IMSIA, de Framatome et d'EDF.

Enfin, il va sans dire que le soutien et l'amour que je trouve dans mon foyer est une source de motivation sans équivoque.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Dossier personnel	3
2.1	Formation	4
2.2	Thèse de doctorat	4
2.3	Activités en développement de codes à finalités applicatives	5
2.4	Activités de recherche	5
2.4.1	Introduction	5
2.4.2	Encadrement de thèses	6
2.4.3	Encadrement de stages de Master 2	6
2.5	Rayonnement scientifique	7
2.5.1	Revue d'article	7
2.5.2	Organisation de conférences et évaluation scientifique	7
2.5.3	Enseignements et formations donnés	7
2.6	Responsabilités	8
2.6.1	Développements stratégiques des codes de mécanique	8
2.6.2	Chef de laboratoire	8
2.7	Articles dans des revues internationales à comité de lecture	8
2.8	Communications dans des conférences internationales avec et sans acte	9
3	Méthodes numériques pour la propagation de fissure	11
3.1	Introduction	12
3.2	Introduction de la XFEM dans Cast3M	12
3.2.1	Résultats doctoraux	12
3.2.2	Travaux poursuivis au LISN sur la propagation dynamique de fissure	17
3.2.3	Intégration effective de la XFEM dans Cast3M	18
3.3	Autres cas d'applications de la XFEM	19
3.3.1	Cas de l'endommagement	19
3.3.2	Cas du fretting/fatigue	21
3.3.3	Dynamique explicite	25
3.4	Couplage XFEM/AMR	30
3.4.1	Motivation pour le raffinement	30
3.4.2	Relations de compatibilité dans le cas "standard"	31
3.4.3	Application à l'étude paramétrique d'un réseau de fissures stationnaires	32
3.4.4	Algorithme de propagation	36
3.4.5	Stratégie d'enrichissement et relations de compatibilité	37
3.4.6	Stratégie de transfert de champs	38
3.4.7	Applications à la propagation par fatigue	43
3.5	Conclusions du chapitre et perspectives	48

3.6	Bibliographie du chapitre	50
4	Analyse vibratoire efficace de systèmes non-linéaires	53
4.1	Introduction	54
4.2	Quelques éléments sur l'analyse linéaire des machines tournantes	54
4.2.1	Contexte industriel	54
4.2.2	Modélisation par éléments de poutre dans le repère fixe	55
4.2.3	Modélisation par éléments massifs et de coques dans le repère tournant	56
4.2.4	Prise en compte des supports	59
4.2.5	Intégration temporelle	61
4.3	Analyse "classique" des vibrations des tubes de générateur de vapeur	64
4.3.1	Problématique industrielle	64
4.3.2	Modèle numérique et réponse par intégration temporelle	64
4.3.3	Exemple d'étude	67
4.4	Méthodes d'équilibrage harmonique et de continuation	70
4.4.1	Discrétisation fréquentielle	70
4.4.2	Bascule temps-fréquence	71
4.4.3	Méthode de continuation	71
4.4.4	Stabilité	73
4.5	Détection et suivi de bifurcations	74
4.5.1	Détection de bifurcations	74
4.5.2	Branchement depuis une bifurcation	76
4.5.3	Suivi de bifurcations	76
4.6	Applications	77
4.6.1	Contact rotor/stator	77
4.6.2	Oscillateur à choc non-linéaire (Koala)	79
4.6.3	Couplage fluide-élastique (TGV-ICE)	83
4.7	Conclusions du chapitre	88
4.8	Bibliographie du chapitre	89
5	Conclusions et perspectives	93
A	Schéma d'intégration temporel de De Vogelaere	95
A.1	Equations du schéma d'intégration	95
A.2	Stabilité	96
B	Sélection de notes techniques	101
B.1	Synthèse sur la méthode $G-\theta$ et son implémentation dans Cast3M	102
B.2	Intégration temporelle des réponses des machines tournantes dans Cast3M	141
B.3	Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise	210

Chapitre 1

Introduction

Dans toutes les industries et dans le nucléaire en particulier, l'intégrité des structures est essentielle pour garantir la sécurité des biens et des personnes. Elle implique à la fois une bonne connaissance des installations réelles, une analyse au juste niveau des phénomènes physiques pouvant conduire à leur ruine, ainsi que la maîtrise d'un modèle prédictif validé par des observations expérimentales. Le positionnement de ces "briques" élémentaires et leur interaction sont illustrés figure 1.

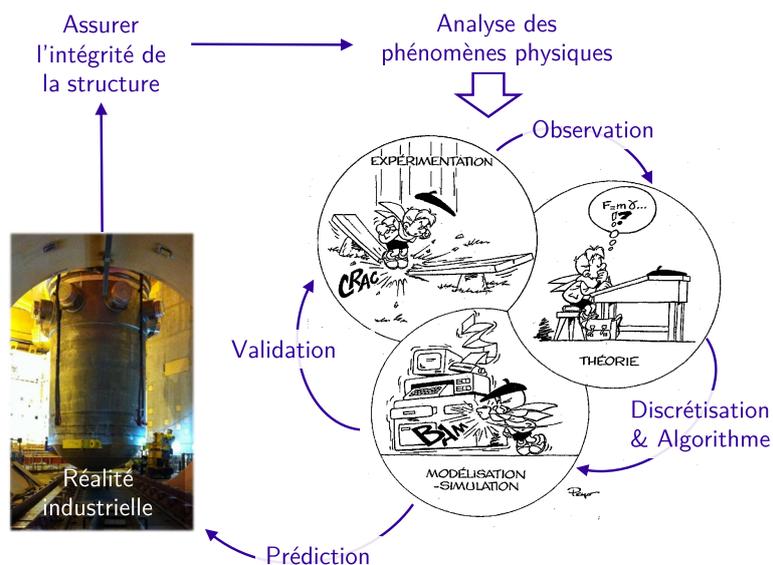


Figure 1 – De la recherche à l'industrie et réciproquement

Le rôle du CEA, en tant que soutien à l'industrie nucléaire, est de faire progresser les connaissances scientifiques et techniques qui s'appliquent aux problématiques industrielles rencontrées par ses partenaires (notamment EDF, Framatome et l'IRSN) ou lors de ses propres projets (réacteurs expérimentaux et actions en lien avec la défense par exemple). On comprend ainsi que cette recherche motivée par des finalités industrielles possède des objectifs et des constantes de temps différents de ceux d'une recherche académique "pure". Il s'agit donc d'une recherche pragmatique pour l'ingénieur.

Mon activité personnelle s'inscrit dans cette démarche "de la recherche à l'industrie" avec une compétence particulière dans la discrétisation et la mise en oeuvre d'algorithmes pour la mécanique des structures.

Un aperçu de mon parcours et des mes activités est donné dans le chapitre suivant. Les chapitres 3 et 4 synthétisent ensuite mes activités de recherche dans deux domaines de la modélisation mécanique que sont la mécanique de la rupture et les problèmes vibratoires. Finalement, des conclusions et perspectives sont données à ce mémoire.

Chapitre 2

Dossier personnel

Sommaire du chapitre 2

2.1	Formation	4
2.2	Thèse de doctorat	4
2.3	Activités en développement de codes à finalités applicatives	5
2.4	Activités de recherche	5
2.4.1	Introduction	5
2.4.2	Encadrement de thèses	6
2.4.3	Encadrement de stages de Master 2	6
2.5	Rayonnement scientifique	7
2.5.1	Revue d'article	7
2.5.2	Organisation de conférences et évaluation scientifique	7
2.5.3	Enseignements et formations donnés	7
2.6	Responsabilités	8
2.6.1	Développements stratégiques des codes de mécanique	8
2.6.2	Chef de laboratoire	8
2.7	Articles dans des revues internationales à comité de lecture	8
2.8	Communications dans des conférences internationales avec et sans acte	9

2.1 Formation

Benoit Prabel, né le 30/07/1981 à Oyonnax (01).

1999	BAC S	Lycée Arbez-Carme, Oyonnax, mention TB
1999–2001	Classe préparatoire intégrée	INSA de Lyon, Rang : 8/1000
2001–2004	Ecole d'ingénieur	INSA de Lyon, spécialité Génie Mécanique et Développement, Rang : 2/70
2003–2004	Master de recherche	MEGA - INSA de Lyon, LaMCoS

2.2 Thèse de doctorat

Sujet Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP

Encadrement Alain Combescure (LaMCoS), Stéphane Marie (CEA) et Anthony Gravouil (LaM-CoS)

Résumé Ma thèse avait pour objet l'étude de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP (Réacteur à Eau Pressurisée). La compréhension et la maîtrise de tels phénomènes impliquent, de manière classique, des observations expérimentales pertinentes et des outils de simulation numériques permettant de représenter la physique postulée.

Au cours de ma thèse, j'ai initié et développé la méthode des éléments finis étendus (XFEM) au sein du logiciel Cast3M, le code de calcul aux éléments finis en mécanique implicite du CEA. Cela a permis de disposer d'un outil numérique capable de modéliser des propagations arbitraires de fissure en dynamique dans des matériaux inélastiques en évitant la lourdeur d'un remaillage qui aurait été complexe en raison du caractère évolutif et non-linéaire de la singularité liée à l'avancée de la fissure.

Parallèlement aux développements numériques, j'ai réalisé des essais de rupture fragile sur trois types d'éprouvettes (CT, anneaux en mode I et en mode mixte) en acier 16MND5 à -125° avec une mesure de la vitesse de propagation de fissure.

Enfin, un modèle de propagation de fissure basé sur l'évaluation locale et régularisée de la contrainte principale maximale en pointe de fissure a donc été proposé grâce à la simulation numérique des essais sur CT en imposant la vitesse de propagation de fissure. Une dépendance de la contrainte critique de clivage avec la vitesse des phénomènes a ainsi été identifiée. Dans un second temps, ce modèle a été confronté aux autres configurations expérimentales afin de valider son caractère prédictif.

Prix Pour mes travaux de thèse, j'ai obtenu :

- le prix SFEN Jean Bourgeois de la meilleure thèse en 2007
- le 2nd prix de la *student competition* de la conférence ASME *Pressure Vessels and Piping* en 2007

2.3 Activités en développement de codes à finalités applicatives

A la suite de ma thèse, j'ai été embauché au CEA en tant qu'ingénieur-chercheur pour travailler sur la modélisation de problèmes de dynamique vibratoire et leur résolution avec Cast3M. Ce poste comporte un volet proche des applications concrètes et un volet de recherche plus amont qui seront respectivement présentés dans cette section et la suivante.

Tout d'abord, j'ai en charge le développement de deux outils-métiers sur base Cast3M à finalités applicatives, à savoir :

- depuis 2008, **BRASERO** : un code de calcul pour l'analyse vibratoire des machines tournantes
- depuis 2014, **GERBOISE** : un code dédié à l'étude des vibrations non-linéaire des tubes de générateur de vapeur (GV) excités par les écoulements fluides

Les outils-métiers sur base Cast3M sont des modules (ou *toolbox*) simplifiant la mise en donnée des calculs dans un domaine ou pour une application spécifique. En pratique, il s'agit d'ensemble de procédures Cast3M accompagnées de cas-tests spécifiques et d'une documentation théorique et d'utilisation.

Le développement de ces outils-métiers se fait en lien avec les besoins de l'ingénierie et me permet de rester au contact des problématiques du terrain. L'expérience montre qu'il s'accompagne toujours :

- de développements génériques de nouvelles fonctionnalités du code Cast3M (principalement en langage compilé Esope),
- d'études avancées, pour déterminer les modélisations et stratégies de calcul pertinentes, en fonction d'un problème cible donné, mais aussi pour valider le modèle par comparaison avec l'expérience.

Dans ce mémoire, j'ai logiquement fait le choix de ne pas présenter de manière détaillée ce volet de mon activité (seul les sections 4.2 et 4.3 pose les bases des méthodes employées dans GERBOISE et BRASERO) et de focaliser le propos sur mes activités de recherche les plus amonts.

2.4 Activités de recherche

2.4.1 Introduction

Il semble naturel au scientifique de conserver un regard critique sur son travail (et celui de ses collègues) que ce soit dans le cadre du développement d'outils-métiers ou d'études plus ponctuelles. Ainsi, des voies d'amélioration sont régulièrement identifiées sur les modèles choisis, leur mise en œuvre numérique ou même sur la démarche d'analyse.

Cependant, la mise en œuvre de nouvelles solutions techniques reste difficile en pratique car il faut :

- connaître ces solutions (activité de veille et de formation continue) ou les inventer (activité de recherche au résultat souvent incertain),
- et vérifier leur applicabilité au problème considéré et aux contraintes de diverses natures (possibilité informatique, faible temps à y consacrer comparativement aux activités plus applicatives ou encore diplomatie avec le monde industriel par exemple).

Mes travaux de recherche portent essentiellement sur la modélisation numérique, mais avec le souci de confronter les simulations à l'expérience et de pérenniser des méthodes développées au sein du logiciel Cast3M pour une utilisation future par l'ingénieur CEA et une capitalisation de la connaissance.

Elles concernent principalement les méthodes numériques pour simuler :

- la propagation de fissure,
- les vibrations non-linéaires.

Les aspects scientifiques et techniques de ces activités font l'objet des chapitres 3 et 4.

2.4.2 Encadrement de thèses

Les thèses pour lesquelles j'ai participé à l'encadrement sont celles énumérées ci-après :

2007–2010	Anita Simatos	10%	Méthode XFEM pour la modélisation de grandes propagations de fissure en déchirure ductile, CEA-LaMCos
2010–2014	Benoit Trolle	33%	Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails, SNCF-LaMCos-CEA
2010–2014	Romains Pelée de Saint Maurice	25%	Extension de l'approche X-FEM en dynamique rapide pour la propagation tridimensionnelle de fissure dans des matériaux ductiles, CEA-LaMCos
2012–2016	Lihan Xie	50%	Suivi numérique des bifurcations pour l'analyse paramétrique de la dynamique non-linéaire des rotors, CEA-LaMCos
2016–2019	Gael Gibert	50%	Propagation de fissure tridimensionnelle couplant la méthode XFEM et le raffinement automatique de maillage (AMR), CEA-LaMCos
2017–2020	Roberto Alcorta	50%	Prédiction numérique des réponses non-linéaires et des bifurcations de systèmes mécaniques à choc, validation expérimentale et application aux GV, CEA-LaMCos

2.4.3 Encadrement de stages de Master 2

J'encadre également de manière régulière des étudiants de Master 2.

2009	Anaëlle Torre	Modélisation 3D du comportement de structures fissurées en rotation
2010	Aurélien Masurel	Modélisation du contact en dynamique des structures en rotation
2012	Marianne Allanic	Modélisation 3D de la propagation de fissure avec la XFEM
2015	Pascal Bouda	Développement de méthodes numériques efficaces pour la résolution de problèmes aux valeurs propres avec Cast3M
2016	Achref Amor	Analyse numérique de la réponse aux séismes des machines tournantes
2016	Delphine Russo	Raffinement automatique de maillage lors de propagation de fissure modélisée par X-FEM
2017	Vitor Guimares	Calcul sur base modale de la réponse d'un assemblage combustible à une excitation aléatoire
2019	Adrien Jacoon	Etude des opportunités d'amélioration de la méthode $G-\theta$ pour les cas du découplage et XFEM 3D

2.5 Rayonnement scientifique

Mes activités à finalités industrielles donnent généralement lieu à la rédaction de notes techniques résumant les méthodes développées et les études réalisées. Leur diffusion est souvent restreinte pour des raisons de confidentialité et de propriétés industrielles. Toutefois, à titre d'exemple, quelques notes récentes dont la diffusion est ouverte sont fournies en annexe B.

Les activités de recherche quant à elle donnent lieu à des publications dans des journaux à comités de lecture ou à des communications dans des congrès. Ces publications sont énumérées à la fin de ce chapitre aux § 2.7 et 2.8.

2.5.1 Revue d'article

Je réalise régulièrement des revues pour les journaux et conférences suivantes :

- ASME Pressure Vessels & Piping Conference (PVP)
- Engineering Fracture Mechanics (*5 five-years impact factor : 3.022*)
- International Journal of Solids and Structures (*5 five-years impact factor : 2.958*)
- ASME Turbomachinery Technical Conference & Exposition (TurboExpo)
- Journal of Sound and Vibration (*5 five-years impact factor : 3.330*)
- Nuclear Engineering and Design (*5 five-years impact factor : 1.567*)
- European Journal of Mechanics and Solids (*5 five-years impact factor : 3.034*)
- Applied Sciences - Open Access Journal (*5 five-years impact factor : 2.287*)

2.5.2 Organisation de conférences et évaluation scientifique

Je fais partie du comité d'organisation de la **12th International Conference on Flow-Induced Vibration** (<https://fiv2020.sciencesconf.org/>) qui aurait dû avoir lieu du 6 au 9 juillet 2020 à Paris-Saclay et qui est reporté d'un an exactement (6 au 9 juillet 2021). Tous les quatre ans, cet évènement rassemble la communauté académique et industrielle travaillant sur les problématiques de vibrations sous écoulement et de couplage fluide-structure. Environ 120 communications ont été acceptées. Avec l'ensemble de l'équipe d'organisation, j'ai notamment participé à la mise en place et la gestion du site web, la vérification des résumés et des enregistrements.

J'ai également présenté lors de l'**évaluation HCERES** de 2018 de mon département (DM2S) les perspectives de recherche en mécanique.

2.5.3 Enseignements et formations donnés

J'ai assuré les cours suivants destinés à des étudiants en Master 2 et des jeunes ingénieurs :

2011-2014	Machines tournantes	Modélisation par éléments finis des vibrations des machines tournantes, Collège de l'X
2015-2017	Eléments Finis	Pratiques des codes de calcul (Cast3M), UPMC
2016-2019	Vibrations	Dynamique des structures : méthodes d'intégration temporelle, UPMC

2.6 Responsabilités

2.6.1 Développements stratégiques des codes de mécanique

Depuis 2014, je suis responsable du lot "MECAN" qui regroupe les activités de développements stratégiques pour la modélisation mécanique au CEA. Cela concerne le code de calcul explicite Europlexus, le code de calcul implicite Cast3M et la plateforme Interaction Fluide-Structure. Ce lot d'actions compte un financement d'environ 13 ingénieurs. Vu la taille importante du lot, je me suis progressivement concentré sur le pilotage et le suivi des actions concernant Cast3M, les autres actions étant par ailleurs déjà suffisamment encadrées.

A ce titre, j'ai rédigé en 2018 la feuille de route Cast3M pour l'horizon 2025. J'ai organisé un séminaire avec les utilisateurs CEA et industriels du code afin de définir des cibles applicatives, fixant ainsi les priorités de développement du code.

Je suis également intervenu auprès du chef de la Direction des Energies pour présenter les codes de calculs en mécanique actuels et les perspectives pour le futur.

2.6.2 Chef de laboratoire

En 2018, j'ai assuré pendant 8 mois l'intérim de chef de laboratoire DYN, qui compte 20 ingénieurs, 2 techniciens et entre 2 et 6 doctorants selon les périodes, avec le rôle managérial associé.

2.7 Articles dans des revues internationales à comité de lecture

- [1] B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, and S. Marie. Level set X-FEM non-matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(8) :1553–1569, 2007.
- [2] B. Prabel, S. Marie, and A. Combescure. Using the X-FEM method to model the dynamic propagation and arrest of cleavage cracks in ferritic steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(10) :2984–3009, 2008.
- [3] A. Lazarus, B. Prabel, and D. Combescure. A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines. *Journal of Sound and Vibration*, 329(18) :3780–3797, 2010.
- [4] B. Trollé, M.-C. Baietto, A. Gravouil, S. H. Mai, and B. Prabel. 2D fatigue crack propagation in rails taking into account actual plastic stresses. *Engineering Fracture Mechanics*, 123 :163–181, 2014.
- [5] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Numerical tracking of limit points for direct parametric analysis in nonlinear rotordynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(2), 2016.
- [6] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 88 :445–461, 2017.
- [7] T. Elguedj, R. P. de Saint Maurice, A. Combescure, V. Faucher, and B. Prabel. Extended Finite Element Modeling of 3D dynamic crack growth under impact loading. *Finite Elements in Analysis and Design*, 151 :1–17, 2018.
- [8] R. Alcorta, S. Baguet, B. Prabel, P. Piteau, and G. Jacquet-Richardet. Period doubling bifurcation analysis and isolated sub-harmonic resonances in an oscillator with asymmetric clearances. *Nonlinear Dynamics*, 98 :2939–2960, 2019.
- [9] G. Gibert, B. Prabel, A. Gravouil, and C. Jacquemoud. A 3D automatic mesh refinement X-FEM approach for fatigue crack propagation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 157 :21 – 37, 2019.
- [10] V. Lazarus, B. Prabel, T. Cambonie, and J.-B. Leblond. Mode I+III multiscale cohesive zone model with facet coarsening and overlap : Solutions and applications to facet orientation and toughening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, accepted, 2020.

2.8 Communications dans des conférences internationales avec et sans acte

- [11] B. Prabel, S. Marie, and A. Combescure. Dynamic crack propagation and arrest in PWR pressure vessel steel : Interpretation of experiment with the X-FEM method. In *ASME 2007 Pressure Vessels and Piping Conference*, pages 203–212. American Society of Mechanical Engineers, 2007.
- [12] B. Prabel, S. Marie, and A. Combescure. Mixed Mode Brittle Crack Propagation Modelling in a PWR Vessel Steel. In *ASME 2008 Pressure Vessels and Piping Conference*, pages 255–263. American Society of Mechanical Engineers, 2008.
- [13] B. Prabel, S. Marie, and A. Combescure. Advanced modelling with the X-FEM of dynamic crack propagation and arrest in ferritic steel. In *8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8) 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)*, pages 255–263. American Society of Mechanical Engineers, 2008.
- [14] B. Prabel, S. Marie, and A. Combescure. Predictive Modelling of Brittle Crack Propagation in Ferritic Steel with the X-FEM. In *International Youth Nuclear Congress*, 2008.
- [15] B. Prabel. Incremental inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem in structural dynamics. In *COMPADYN 2009 - 2nd International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics & Earthquake Engineering*, 2009.
- [16] A. Simatos, F. Cazes, B. Prabel, S. Marie, M. Nédélec, and A. Combescure. Modelling ductile tearing from continuously strained state to crack propagation. In *ECCM 2010 : IV European Conference on Computational Mechanics*, 2010.
- [17] B. Prabel, A. Simatos, T. Yuritzinn, and T. Charras. 3D crack propagation in inelastic material. In *XFEM 2011 : International Conference on Extended Finite Element Methods*, 2011.
- [18] B. Prabel, T. Yuritzinn, T. Charras, and A. Simatos. Propagation de fissures tridimensionnelles dans des matériaux inélastiques avec xfem dans cast3m. In *10e Colloque National en Calcul des Structures*, 2011.
- [19] A. Simatos, B. Prabel, S. Marie, M. Nédélec, and A. Combescure. Modelling the Tearing Crack Growth in a Ductile Ferritic Steel Using X-FEM Elements. In *ASME 2011 Pressure Vessels and Piping Conference*, pages 281–294. American Society of Mechanical Engineers, 2011.
- [20] R. Pelee, V. Faucher, T. Elguedj, A. Combescure, and B. Prabel. Dynamic simulation of crack propagation in 3D by X-FEM method. In *International Conference on Extended Finite Element Methods (XFEM)*, Lyon, France, 2013.
- [21] B. Prabel. Analyse 3D des vibrations non-linéaires des rotors avec défauts. In *11e Colloque National en Calcul des Structures*, 2013.
- [22] B. Trollé, M. C. Baietto, A. Gravouil, M. S. Hai, B. Prabel, and N. M. Lan. 3D X-FEM crack propagation under rolling contact fatigue. In *International Conference on Extended Finite Element Methods (XFEM)*, Lyon, France, 2013.
- [23] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Analyse paramétrique de la stabilité des structures en dynamique non-linéaire. In *12e Colloque National en Calcul des Structures*. CSMA, 2015.
- [24] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Parametric analysis of the nonlinear behavior of rotating structures. In *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 8 : 27th Conference on Mechanical Vibration and Noise. American Society of Mechanical Engineers, 2015.
- [25] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Parametric analysis of the nonlinear behavior of rotating structures. In *EUROMECH Colloquium : Coupling and Nonlinear interactions in Rotating Machinery*, 2015.
- [26] B. Prabel. Some remarks on time integration of 3D rotor-stator assembly. In *ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, volume 3, pages 4624–4637, 2016.

-
- [27] J. Antunes, B. Prabel, L. Borsoi, P. Piteau, and X. Delaune. Increasing the computational efficiency of non-linear time-domain computations for system with frequency-dependent coefficients. In *9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise*, 2018.
- [28] L. Borsoi, P. Piteau, X. Delaune, B. Prabel, and J. Antunes. Evolution of the dynamics of loosely supported tubes under cross-flow with the flow velocity and gap's size. In *9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise*, 2018.
- [29] G. Gibert, A. Gravouil, B. Prabel, and C. Jacquemoud. A new multiscale X-FEM approach applied to 3D plastic crack propagation. In *WCCM 2018 : 13th World Congress in Computational Mechanics*, 2018.
- [30] G. Gibert, C. Jacquemoud, B. Prabel, and A. Gravouil. A new multiscale X-FEM approach applied to 3D plastic crack propagation. In *ECCM6 : 6th European Conference on Computational Mechanics*, 2018.
- [31] B. Prabel and C. Jacquemoud. XFEM/AMR coupling for efficient crack patterns analyzes. In *WCCM 2018 : 13th World Congress in Computational Mechanics*, 2018.
- [32] B. Prabel, P. Piteau, L. Borsoi, and J. Antunes. Non-linear vibration of heat-exchanger tubes subjected to fluidelastic forces. In *9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise*, 2018.
- [33] R. Alcorta, B. Prabel, S. Baguet, and G. Jacquet-Richardet. Period-doubling bifurcation tracking for the Harmonic Balance Method : application to a Duffing oscillator with asymmetric clearances. In *First International Nonlinear Dynamics Conference*, 2019.
- [34] G. Gibert, A. Gravouil, B. Prabel, and C. Jacquemoud. Couplage X-FEM/AMR pour la propagation de fissures élastoplastiques tridimensionnelles. In *14e Colloque National en Calcul des Structures*, 2019.
- [35] P. Verpeaux, C. Berthinier, and B. Prabel. Cast3M - Un logiciel de calcul par éléments finis en mécanique des structures et des fluides, basé sur Gibiane, un langage orienté objet. In *14e Colloque National en Calcul des Structures*, 2019.
- [36] R. Alcorta, S. Baguet, P. Piteau, B. Prabel, and G. Jacquet-Richardet. Nonlinear oscillations of loosely-supported steam generator tubes in cross-flow. In *28th International Conference on Nuclear Engineering (ICONE28-POWER2020)*, 2020.
- [37] R. Alcorta, S. Baguet, B. Prabel, P. Piteau, and G. Jacquet-Richardet. Non-Conservative Nonlinear Modes Through Energy Resonance. In *European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2020)*, 2020.
- [38] R. Alcorta, P. Piteau, B. Prabel, and S. Baguet. Limit cycle oscillations of a loosely-supported tube subjected to fluid-elastic forces in cross-flow. In *12th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise (FIV 2020)*, 2020.
- [39] V. Lazarus, J.-B. Leblond, T. Cambonie, and B. Prabel. Mode I+III multiscale cohesive zone model : applications to facet orientation and toughening. In *17th European Mechanics of Materials Conference (EMMC17)*, Madrid, Spain, 2020.

Chapitre 3

Méthodes numériques pour la propagation de fissure

Sommaire du chapitre 3

3.1	Introduction	12
3.2	Introduction de la XFEM dans Cast3M	12
3.2.1	Résultats doctoraux	12
3.2.2	Travaux poursuivis au LISN sur la propagation dynamique de fissure	17
3.2.3	Intégration effective de la XFEM dans Cast3M	18
3.3	Autres cas d'applications de la XFEM	19
3.3.1	Cas de l'endommagement	19
3.3.2	Cas du fretting/fatigue	21
3.3.3	Dynamique explicite	25
3.4	Couplage XFEM/AMR	30
3.4.1	Motivation pour le raffinement	30
3.4.2	Relations de compatibilité dans le cas "standard"	31
3.4.3	Application à l'étude paramétrique d'un réseau de fissures stationnaires	32
3.4.4	Algorithme de propagation	36
3.4.5	Stratégie d'enrichissement et relations de compatibilité	37
3.4.6	Stratégie de transfert de champs	38
3.4.7	Applications à la propagation par fatigue	43
3.5	Conclusions du chapitre et perspectives	48
3.6	Bibliographie du chapitre	50

3.1 Introduction

Garantir la résistance d'une structure est un enjeu essentiel pour l'ingénierie. Aussi, depuis un siècle, la mécanique de la rupture et de l'endommagement est le domaine qui établit les concepts essentiels pour se prémunir de ce risque. De nombreux ouvrages présentent la mécanique de la rupture comme [40, 76, 77]. Un rappel succinct (en 3 pages) de mécanique linéaire élastique de la rupture peut aussi être trouvé au § 1 de la note en annexe B.1.

Le présent chapitre présente chronologiquement les travaux auxquels j'ai participé concernant le développement et l'utilisation de la méthode XFEM. La dernière section (§ 3.4) est consacrée aux résultats de la thèse de Gael Gibert [75] sur le couplage de la XFEM avec une méthode de raffinement hiérarchique de maillage.

3.2 Introduction de la XFEM dans Cast3M

3.2.1 Résultats doctoraux

Introduction : Les analyses habituelles de sureté proposent de vérifier que pour un chargement donné, un petit défaut de la structure (d'une taille détectable) ne va pas initier une fissure plus grande. Dans ce contexte, montrer qu'une fissure ayant amorcé s'arrête peut constituer une marge supplémentaire pour garantir l'intégrité de la structure à condition de maîtriser pleinement le phénomène. L'objectif de ma thèse était d'évaluer la pertinence d'une telle approche.

Elle a été réalisée entre 2004 et 2007 en collaboration entre le Lamcos (encadrants : Alain Combescure et Anthony Gravouil) et le CEA (encadrant : Stéphane Marie). Plus précisément, l'objectif était de fournir les moyens de prédire si un défaut présent sur une cuve de réacteur à eau pressurisée (REP) et soumis à un chargement accidentel de type choc thermique (scénario d'injection d'eau froide suite à la perte du refroidissement normal) pouvait conduire à la perte ou non de son intégrité. L'hypothèse d'un défaut suffisamment important pour amorcer une fissuration fragile étant retenue, le cahier des charges de ma thèse impliquait donc l'étude de la propagation de fissure. En résumé, j'ai réalisé :

- le développement d'un outil numérique capable de traiter la propagation de fissures en élasto-viscoplasticité dynamique,
- des essais de rupture fragile avec mesure de la vitesse d'avancée de fissure,
- la proposition et la validation de critères pilotant cette propagation.

Ces trois points sont synthétisés ci-après.

Méthode numérique : Alors en plein essor, la méthode XFEM (eXtended Finite Element Method) a été retenue pour prendre en compte la propagation de fissure. J'ai donc testé son implémentation dans Cast3M. Cette méthode se base sur deux ingrédients essentiels :

- Une description de la fissure indépendante du maillage (cf. figure 2a).
- Un enrichissement de l'approximation éléments finis permettant d'introduire la cinématique due à la fissure où I_{\square} et I_{\triangle} désignent les noeuds à enrichir avec des fonctions respectivement discontinue et singulières (cf. figure 2b) :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_i N_i(\underline{x}) \underline{u}_i(t) + \sum_{i \in I_{\square}} N_i(\underline{x}) \mathcal{H}(\underline{x}) \underline{a}_i(t) + \sum_{i \in I_{\triangle}} N_i(\underline{x}) \sum_{j=1,4} \mathcal{F}_j(\underline{x}) \underline{b}_{i,j}(t) \quad (1)$$

avec : $\mathcal{H}(\underline{x}) = \text{sign } \phi(\underline{x})$ et $\mathcal{F}_j(\underline{x}) = \mathcal{F}_j(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{cases}$

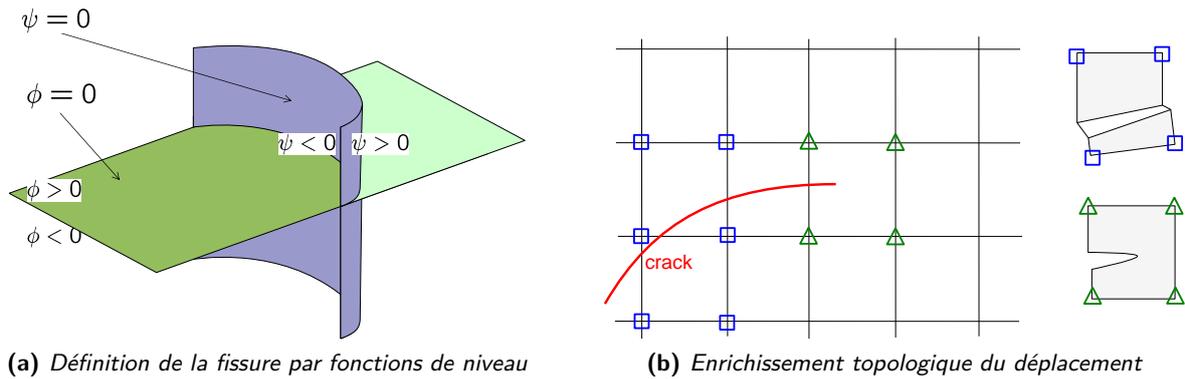


Figure 2 – La méthode XFEM

On remarque que l'équation (1) peut se remettre sous une forme plus condensée :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i \in I_{\text{actif}}} \mathcal{N}_i(\underline{x}) \underline{q}_i(t) = [\mathcal{N}(\underline{x})] \cdot \{\underline{q}(t)\} \quad (2)$$

où I_{actif} représente l'ensemble des degrés de liberté (ddl) actifs à l'instant t , $[\mathcal{N}]$ est la matrice de l'ensemble des fonctions d'approximation et $\{\underline{q}\}$ est le vecteur des inconnues éléments finis regroupant l'ensemble des ddl (standards et enrichis).

Suivant les travaux de Moës et Gravouil [50, 49], il a été choisi d'utiliser des fonctions de niveau (ou *Level Set*) pour représenter la fissure (cf. figure 2a). Leur mise à jour implique classiquement la résolution d'équations de type Hamilton-Jacobi qui est une opération a priori délicate sur un maillage non structuré. Ainsi, une approche pragmatique a été mise en œuvre en définissant ces fonctions de niveau sur un maillage auxiliaire réglé (i.e. une grille cartésienne). Sur ce maillage seront mises à jour les fonctions de niveau, et ensuite projetées sur le maillage de la structure. Cette technique a fait l'objet d'une publication dans IJNME [1].

Une fois la position de la fissure ainsi définie, la cinématique éléments finis est enrichie (équation 1) avec une fonction discontinue (notée \mathcal{H}) et une base permettant de capter la pointe de fissure (\mathcal{F}_j).

Dans [1], on a aussi utilisé une méthode d'intégration des éléments enrichis mise en place au Lamcos et publiée parallèlement par Elguedj *et al.* [51] ne prenant pas en compte la position de la fissure. Elle utilise simplement un sous-découpage de l'élément enrichi en sous-éléments hiérarchiques fournissant une intégration par point de Gauss du même ordre que l'élément non-enrichi de base. La position finale de ces points d'intégration pour un quadrilatère est représentée figure 3b. Cette approche permet :

- de conserver l'intégration exacte des fonctions de forme polynomiales,
- d'avoir une précision satisfaisante des fonctions d'enrichissement,
- d'éviter le sous-découpage conforme à la fissure des éléments enrichis très souvent pratiqué.

Le dernier point est essentiel, car les méthodes d'intégration de la XFEM basées sur ce découpage en sous-éléments conformes (représenté figure 3a) impliquent, lors de la propagation, la projection des champs s'appuyant sur les points d'intégration (contraintes, variables internes, etc.) dans des zones à très forts gradients (notamment dans l'élément contenant la pointe de fissure). Dans la méthode développée pendant ma thèse, une estimation du rayon plastique en pointe de fissure permettait d'anticiper la plastification et l'arrivée de la pointe de fissure en basculant vers cette sur-intégration en avance, le changement de support (i.e. de points de Gauss) ayant alors lieu dans des éléments encore élastiques.

Une première application de la méthode en dynamique élasto-plastique a été réalisée sur un cas de propagation tiré des essais de Grégoire [60]. La capacité des outils à prédire la propagation, l'arrêt et le redémarrage d'une fissure a été très encourageante (cf. figure 4) et est aussi présentée dans [1].

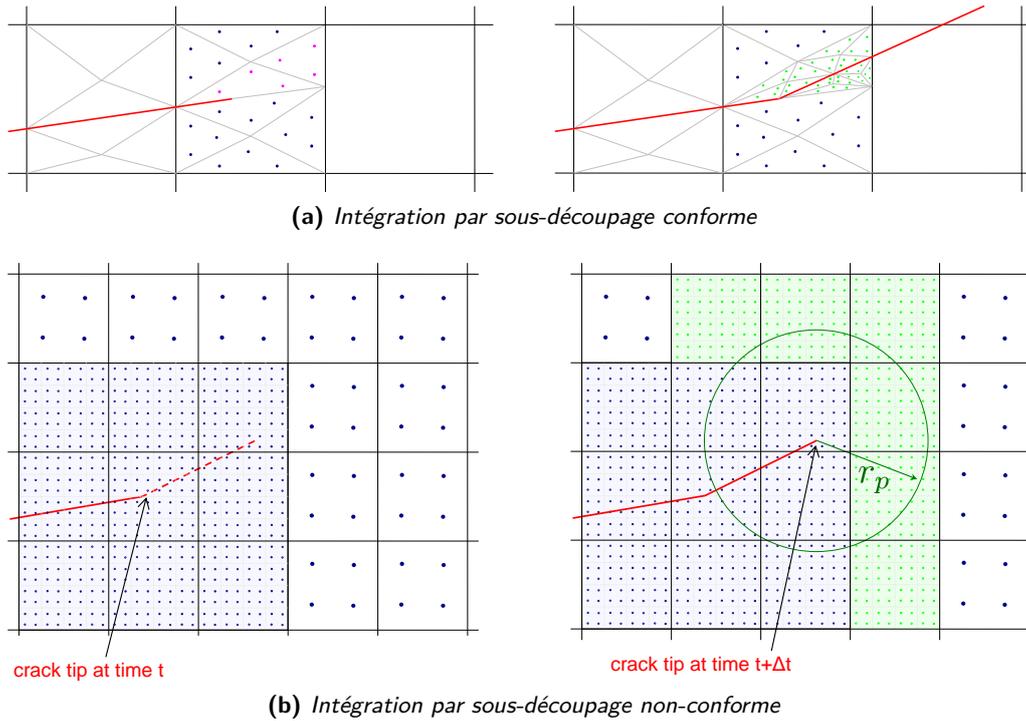


Figure 3 – Méthodes d'intégration XFEM et propagation élémentaire

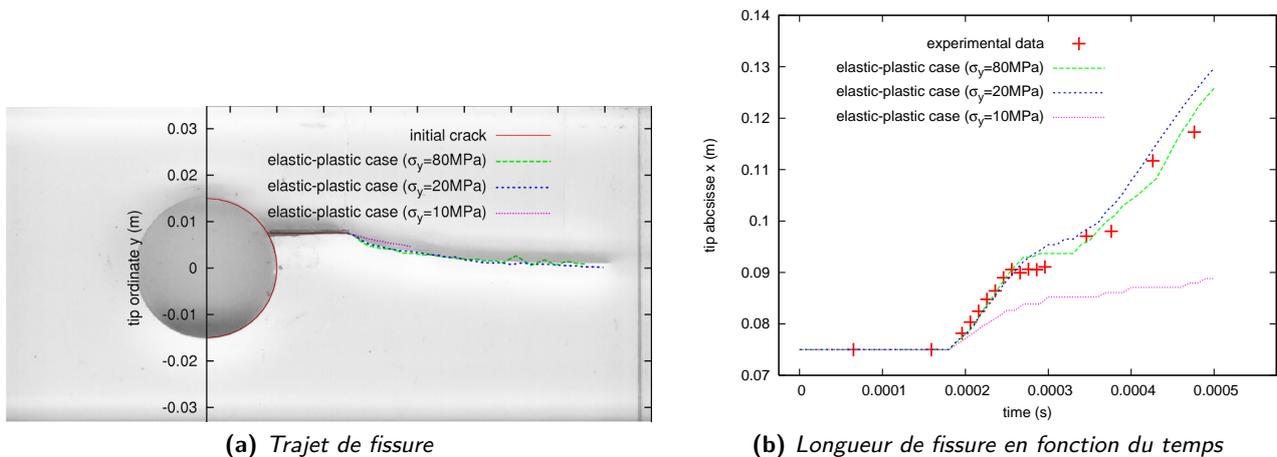


Figure 4 – Comparaison calcul - essais sur l'expérience de Grégoire [60]

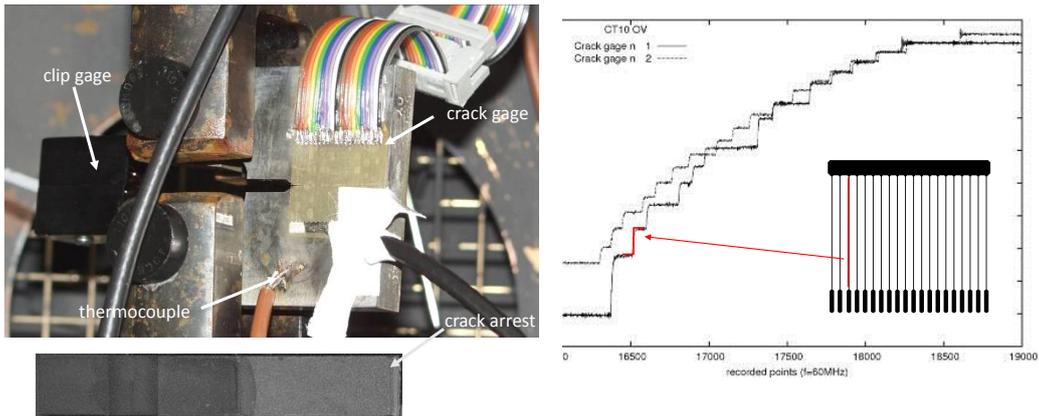
Expériences : Une campagne expérimentale à -125°C a été menée sur trois types d'éprouvette en acier 16MND5 (nuance d'acier des cuves de réacteurs REP) :

- éprouvettes CT (Compact Tension) sollicitées en mode 1 (figure 5a),
- éprouvettes annulaires sollicitées en mode 1 (figure 5b),
- et éprouvettes annulaires sollicitées en mode mixte.

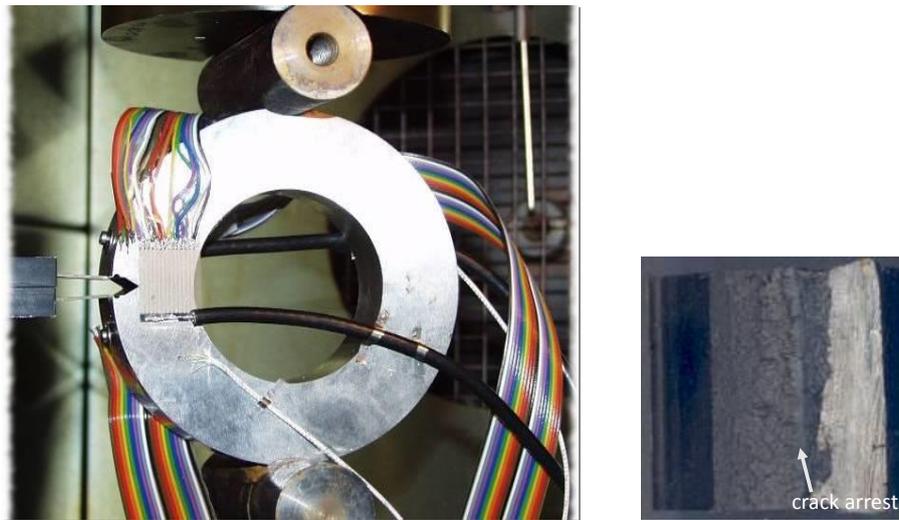
La figure 5 illustre des dispositifs expérimentaux type. Le chargement est quasi-statique, mais le comportement fragile de l'acier à cette température conduit à une rupture brutale (i.e. dynamique) de l'éprouvette. Une jauge à fils coupés reliée à une carte d'acquisition rapide permet de connaître l'avancée de la fissure avec le temps.

Au vu des vitesses en jeu, le matériau a été caractérisé dynamiquement sur barres de Hopkinson, et une loi de comportement de Symonds-Cowper modifiée a été identifiée (cf. fig 6) :

$$\sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{in}}, \dot{\epsilon}^{\text{in}}, T) = \sigma^{\text{eq}}(\epsilon^{\text{in}}, 0, T) \cdot \left[1 + H \cdot (\dot{\epsilon}^{\text{in}})^{\frac{1}{p}} \right] \quad (3)$$



(a) Essais sur éprouvettes CT



(b) Essais sur éprouvettes annulaires

Figure 5 – Dispositifs expérimentaux

Afin de reproduire au mieux les essais réalisés entre -150°C et $+25^{\circ}\text{C}$, il a été proposé de faire dépendre le coefficient p de T et le coefficient H de ϵ^{in} et de T .

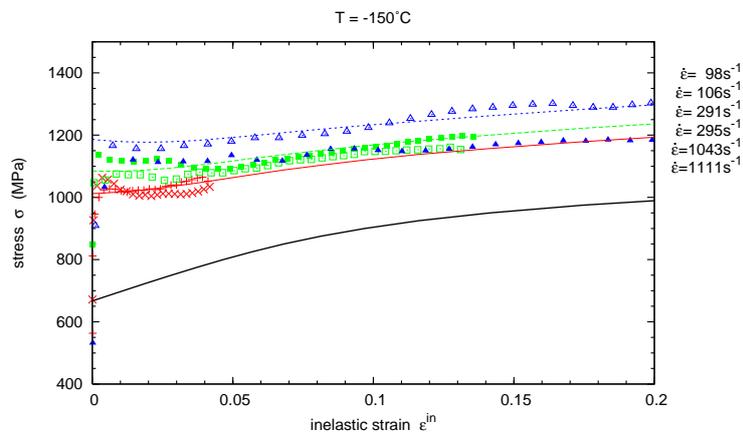


Figure 6 – Courbes de traction élasto-visco-plastiques à -150°C pour différentes vitesses de déformation. Les marqueurs représentent les points expérimentaux et la loi identifiée est représentée par les courbes continues

Proposition d'un critère et validation : Dans une première phase, des simulations des essais sur éprouvettes CT ont été conduites en imposant l'avancée de la fissure avec le temps. L'analyse de différentes mesures de la contrainte principale en pointe de fissure a ainsi mis en évidence leur dépendance avec la vitesse des phénomènes. In fine, ont été retenus et identifiés quatre critères pouvant s'exprimer sous le formalisme unique :

$$\text{Propagation} \Leftrightarrow \tilde{\sigma}_I = \sigma_{Ic}(\dot{a} \text{ ou } \dot{\epsilon}) \quad (4)$$

où $\tilde{\sigma}_I$ représente une mesure au voisinage de la pointe de fissure de la contrainte principale pouvant être :

- une mesure ponctuelle (notée "RKR") de la contrainte principale :

$$\tilde{\sigma}_I = \left[\underline{\underline{\sigma}}(r = 100\mu\text{m}) \right]_I \quad (5a)$$

ou

- une mesure régularisée (notée "half-disc") de la contrainte principale sur un demi-disque avec une fonction de pondération Gaussienne w :

$$\tilde{\sigma}_I = \left[\frac{\int w \underline{\underline{\sigma}} d\Omega}{\int w d\Omega} \right]_I \quad (5b)$$

et où σ_{Ic} représente la contrainte critique du matériau dépendant :

- de la vitesse d'avancée de la fissure : \dot{a}

ou

- de la vitesse de déformation : $\dot{\epsilon}$

La figure 7 représente par exemple le résultat de l'identification d'un de ces critères.

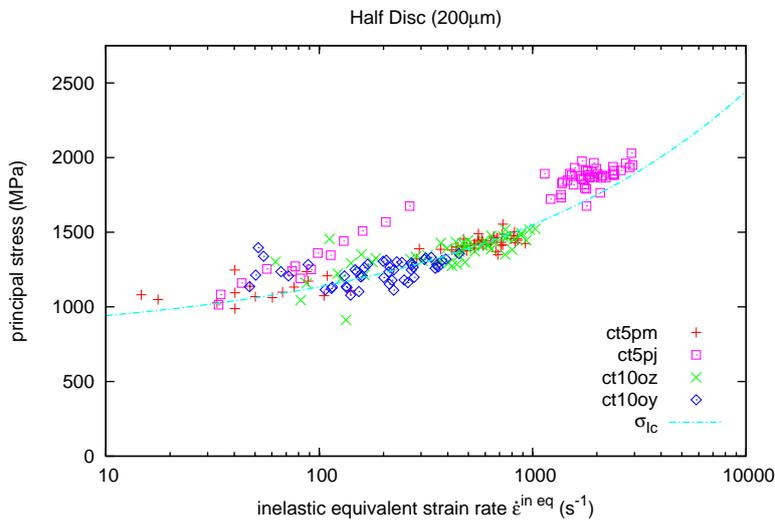


Figure 7 – Contrainte principale en pointe de fissure en fonction de la vitesse de déformation.

Les marqueurs représentent les points calculés en imposant la vitesse de propagation égale aux expériences. La loi identifiée est représentée par la courbe continue.

Dans une seconde phase, ces critères ont été appliqués aux trois configurations d'essais. Si retrouver de bons résultats sur les éprouvettes CT était un résultat attendu, la bonne concordance observée sur les autres géométries a permis d'éprouver la transférabilité des critères proposés. La figure 8 montre les comparaisons essais-calculs obtenus. Dans le cas en mode mixte, la direction de propagation utilisée est l'orthogonale à celle de la contrainte principale maximale. Ces résultats très satisfaisants ont fait l'objet de la publication [2].

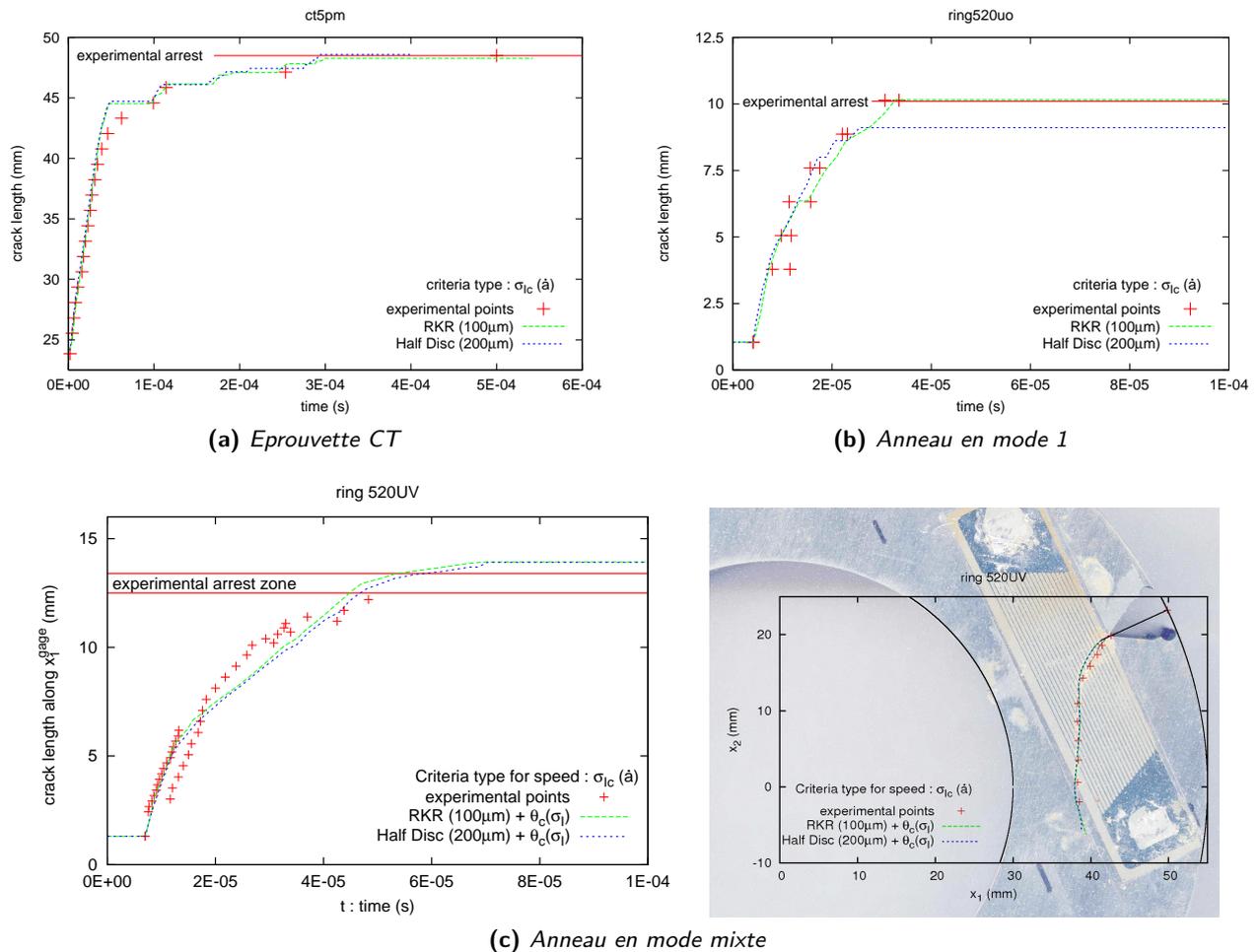


Figure 8 – Comparaisons calcul-essais sur 3 éprouvettes en acier 16MND5

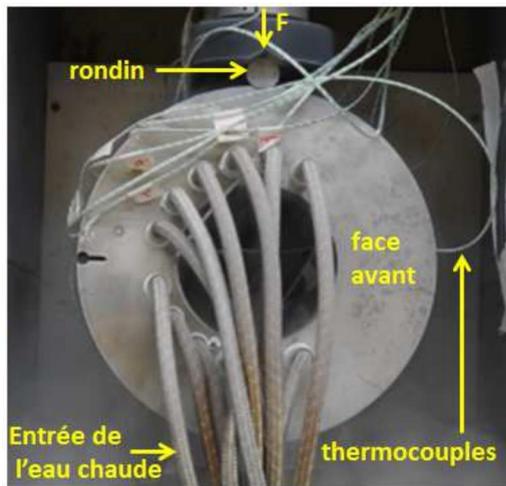
3.2.2 Travaux poursuivis au LISN sur la propagation dynamique de fissure

Les outils numériques mis en oeuvre pendant ma thèse et dans les années qui ont suivi ont servis de base aux travaux des thèses (encadrées par Stéphane Marie, Philippe Bompard et Clémentine Jacquemoud) de Amaury Bousquet [71] et de Xiao Yu Yang [73] qui ont tout deux poursuivi l'analyse de la propagation dynamique de fissure dans l'acier 16MND5.

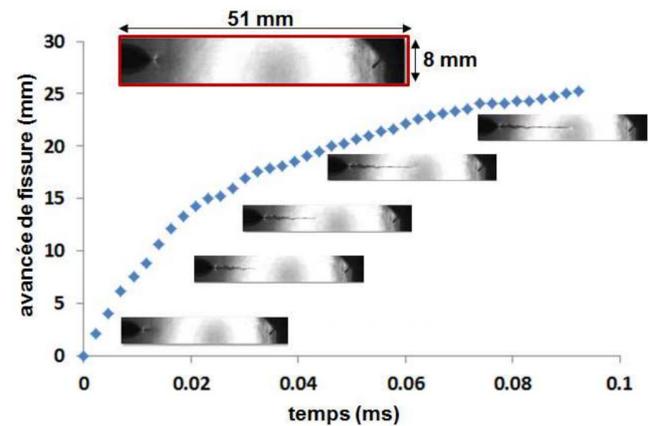
Une caméra rapide (444 000 images/s pour une image de 128×56 pixels) a été utilisée pour confirmer les mesures réalisées pendant ma thèse. Des essais à d'autres températures ont également été réalisés.

La forme du critère proposé a pu être confirmée et interprétée à partir d'observations MEB. En plus du mécanisme de clivage dominant, la présence de marches de cisaillement ductiles dont la rupture peut être reliée au comportement du matériau, expliquerait la dépendance du critère macroscopique à la vitesse de déformation. Une formulation analytique du critère prenant en compte la présence de ces ligaments a été proposée. La confrontation calculs-essais a été menée avec succès.

Yang a également étudié le cas d'un chargement thermo-mécanique (compression + choc thermique) sur anneaux (cf. figure 9). Enfin, l'aspect aléatoire du branchement de fissure observé sur certaines éprouvettes a aussi fait l'objet de simulations possibles grâce à la méthode XFEM développée dans Cast3M.



(a) Dispositif expérimental



(b) Avancée de fissure expérimentale obtenue par caméra rapide

Figure 9 – Anneau en compression sous choc thermique (tiré de [73])

3.2.3 Intégration effective de la XFEM dans Cast3M

Après ma thèse, l'implémentation effective d'un élément XFEM dans Cast3M a été initiée par Thierry Charas, développeur historique de Cast3M. Quelques aménagements lui sont dus pour sa version actuellement disponible.

Par exemple, il a été choisi de ne pas changer la méthode d'intégration au cours du calcul comme cela était fait pendant ma thèse. Tous les éléments XFEM utilisent donc les 64 points de Gauss tout au long du calcul, qu'ils soient effectivement enrichis, proches de la fissure ou non. Cela implique un coût de calcul plus élevé mais aussi une gestion plus facile de ces éléments. Charge à l'utilisateur de ne pas définir une trop grande zone avec ce type d'éléments.

Un point d'amélioration concerne la mise à jour des fonctions de niveau. Cast3M disposant d'outils de maillage efficaces et la définition analytique de deux fonctions de distance signées orthogonales étant difficile pour des géométries de fissure pouvant être complexes, une définition explicite/implicite de la fissure a été adoptée [18, 66]. Elle repose sur le maillage explicite (mais indépendant du maillage de la structure) de la fissure et du calcul des fonctions de niveau aux noeuds de la structure à partir de considérations géométriques comme illustré figure 10.

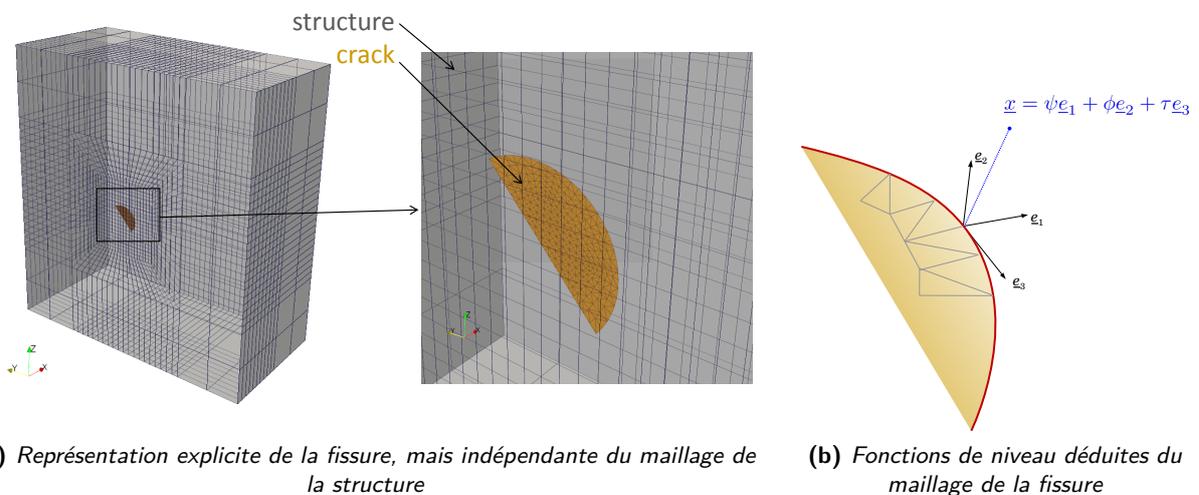


Figure 10 – Représentation explicite/implicite de la fissure

J'ai ensuite pris en charge le maintien et l'évolution des opérateurs en lien avec la méthode XFEM. Par

exemple, l'opérateur PSIP réalisant le calcul des fonctions de niveau a été complètement ré-écrit pour améliorer sa précision, sa robustesse et ses performances. Sur ce dernier point, s'agissant d'un problème de minimisation en chaque point de la structure indépendant des autres points, la parallélisation en mémoire partagée a été mise en place avec une extensibilité quasi-parfaite.

De même, l'opérateur TRIE attribuant l'enrichissement des éléments en fonction des *Level sets* a vu de nombreuses évolutions, comme la possibilité d'utiliser uniquement des fonction "saut" (cf. thèse d'Anita Simatos [62] et §3.3.1) ou le cas d'un maillage avec raffinement hiérarchique (cf. thèse de Gaël Gibert [75] et §3.4).

J'ai aussi étendu la procédure G_THETA au cas d'un modèle XFEM pour le calcul des diverses intégrales de la mécanique de la rupture, permettant la détermination du taux de restitution d'énergie G et des facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} . Une synthèse générale de la méthode et de son implémentation dans Cast3M est fournie en annexe B.1.

3.3 Autres cas d'applications de la XFEM

A la suite de ma thèse et de mon embauche au CEA, je suis naturellement intervenu en soutien à plusieurs thèses utilisant la méthode XFEM développée dans Cast3M.

3.3.1 Cas de l'endommagement

Les modèles d'endommagement sont classiquement utilisés pour traiter des problèmes de déchirure ductile, même si des méthodes alternatives existent [46]. Plusieurs difficultés peuvent être signalées quant à leur application pratique :

- ces modèles montrent généralement une dépendance à la taille de maille,
- leur caractère adoucissant peut conduire à des difficultés de convergence du solveur non-linéaire,
- ils s'accompagnent souvent d'une forte déformation et des problèmes d'incompressibilité plastique peuvent apparaître,
- les problèmes mentionnés ci-dessus sont exacerbés pour les longues déchirures, car les éléments en arrière du front sont très endommagés, très déformés et avec une rigidité quasi-nulle.

Le premier item peut être traité par des méthodes de régularisation diverses ou, plus simplement, en identifiant le comportement pour une taille de maille donnée. Afin de traiter des cas de longues déchirures, une méthode numérique couplant le modèle d'endommagement global de Rousselier à une zone cohésive introduite sur un support XFEM a été réalisée lors de la thèse de Anita Simatos [62, 16, 63, 19]. Ces trois ingrédients numériques illustré figure 11a permettent de décrire le processus de déchirure :

- Tout d'abord, la dégradation du matériau est volumique et est traitée par le modèle d'endommagement classique du matériau.
- Ensuite apparait le phénomène de localisation de l'endommagement, et un élément cohésif est introduit dans le modèle afin de supporter ces déformations excessives.
- Après avoir dissipée une certaine quantité d'énergie, la force cohésive devient nulle et laisse place à une fissure classique, représentée naturellement à l'aide de la cinématique XFEM sur laquelle s'appuyait la zone cohésive (cf. figure 11c).

Les points délicats de cette méthode concernaient la bonne identification de la loi cohésive en grandes transformations (cf. figure 11b) et les difficultés liées au pilotage des pas de chargement (quand introduire un nouvel élément cohésif, adapter le pas de calcul pour bien représenter l'énergie dissipée par la zone cohésive et choisir le bon moment pour mettre à zéro la contribution des forces cohésives).

L'application à une déchirure d'éprouvette CT a été menée avec succès jusqu'à 6 mm de propagation ("*Coupling method*" sur la figure 12) alors que le calcul d'endommagement classique ("*Classical formulation*") posait des problèmes de convergence plus tôt (entre 2 mm et 3 mm de propagation).

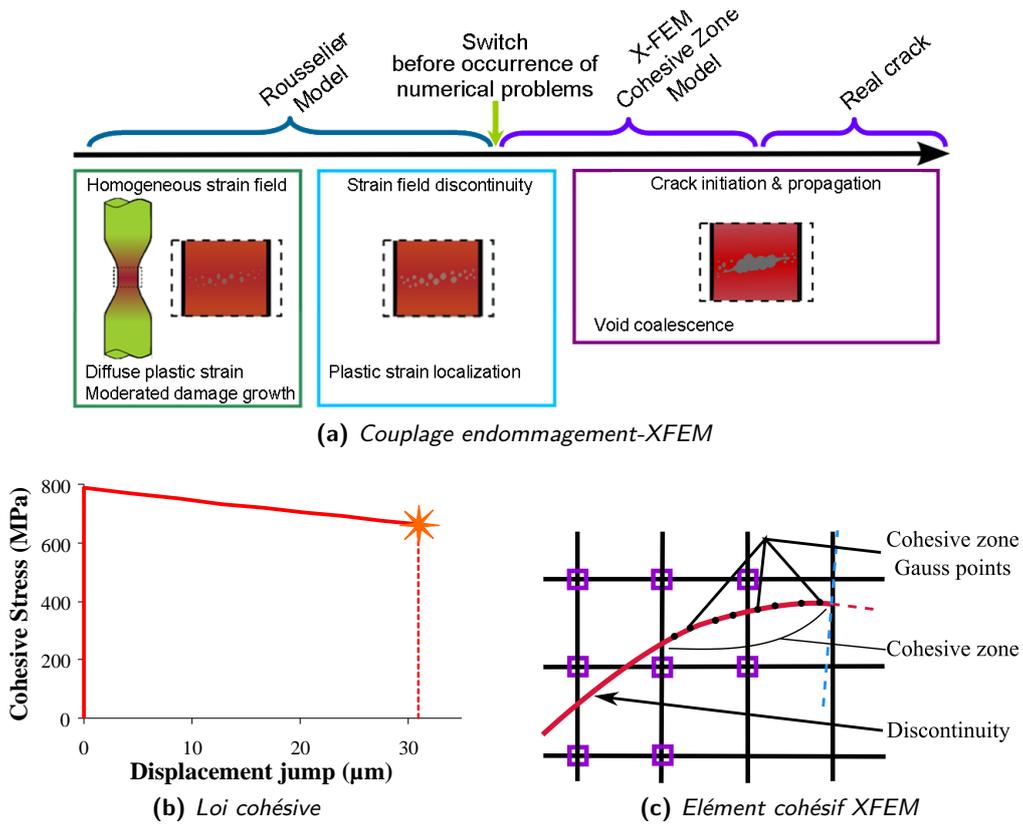


Figure 11 – Couplage modèle d'endommagement-XFEM par introduction de zones cohésives

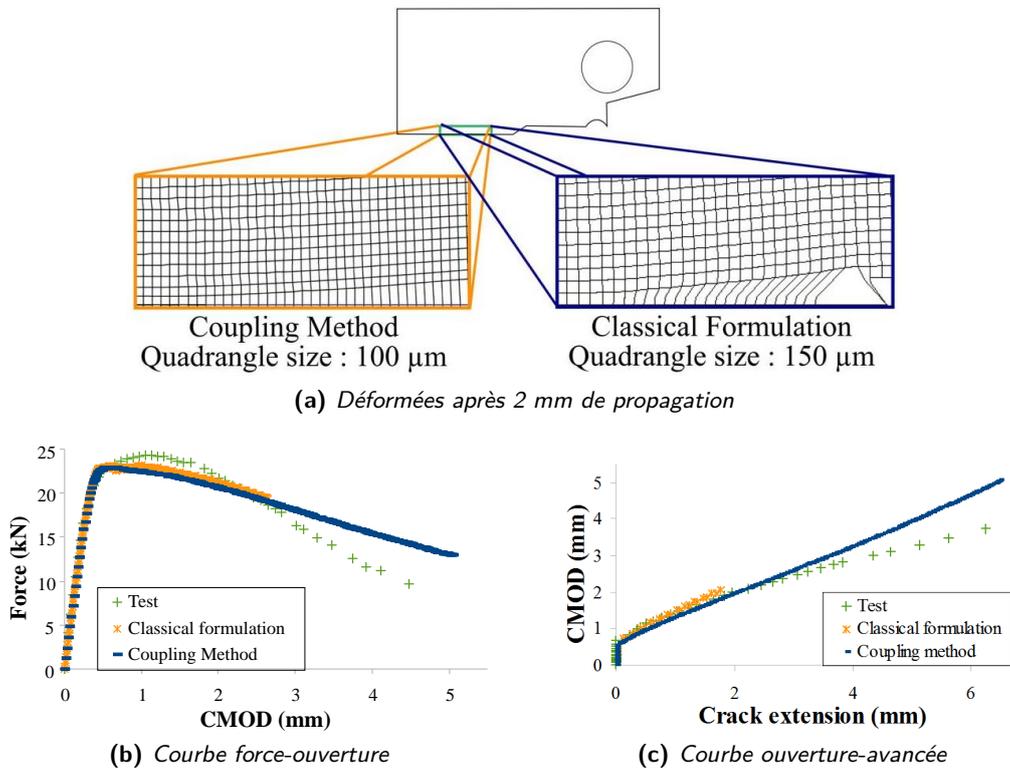


Figure 12 – Couplage modèle d'endommagement-XFEM par introduction de zones cohésives

3.3.2 Cas du fretting/fatigue

Les passages répétés de trains sur les voies de chemin de fer peuvent conduire à un phénomène d'endommagement par fatigue du rail. Pour s'en prémunir et optimiser la maintenance des rails, la SNCF développe une chaîne de calcul à vocation prédictive à plusieurs échelles mettant en jeu successivement :

- la dynamique multi-corps pour traiter le problème à l'échelle du système train/voie et en déduire le chargement lié au contact frottant,
- la modélisation par éléments finis à l'échelle du rail pour obtenir les champs de contraintes et permettre de déterminer l'initiation d'un défaut à partir du critère de Dang Van,
- la modélisation XFEM de la propagation par fatigue du défaut (i.e. de la fissure) en conditions de chargement cyclique.

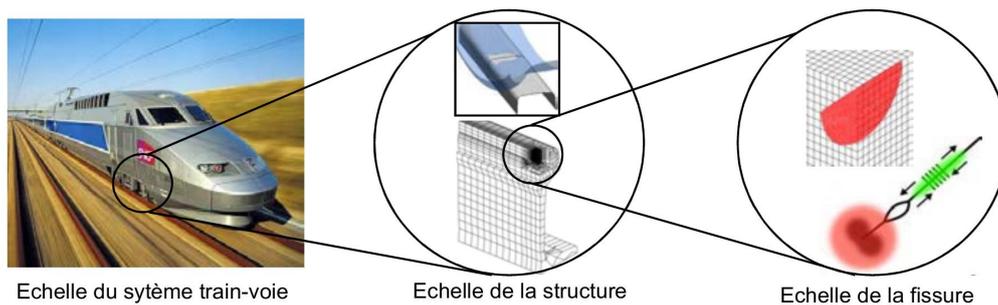


Figure 13 – Problématique multi-échelle de la fissuration des rails

C'est cette dernière étape qui a fait l'objet de la thèse de Benoit Trollé [70], dirigé par Anthony Gravouil et Marie-Christine Baietto du LaMCoS, et encadré par Si Hai Mai de la SNCF et moi-même au CEA. Je suis donc intervenu pour aider à la mise en place dans Cast3M des modèles numériques décrits dans [70, 4].

Le problème à deux échelles considéré est le suivant :

- A l'échelle du volume, le problème d'élasticité fait intervenir le champ de déplacement \underline{u} , le champ de déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, et les efforts extérieurs \underline{F} appliqués sur la frontière. Les termes associés intervenant dans le principe des puissances virtuelles s'écrivent :

$$P^{\text{int}} = - \int_{\Omega} \text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^*) d\Omega \quad P^{\text{ext}} = \int_{\Gamma^F} \underline{F} \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (6a)$$

- A l'échelle de la fissure, les conditions de contact-frottant font intervenir le champ de déplacement \underline{w} et les efforts sur les lèvres de la fissure $\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ et fournissent le terme :

$$P^{\text{fiss}} = \int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \underline{w}^* d\Gamma \quad (6b)$$

- Le couplage entre les deux échelles est obtenu avec le terme :

$$P^{\text{coupl}} = \int_{\Gamma} \underline{\lambda} \cdot (\underline{u}^* - \underline{w}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\lambda}^* \cdot (\underline{u} - \underline{w}) d\Gamma \quad (6c)$$

L'écriture des puissances virtuelles sur cette formulation à trois champs s'énonce ainsi :

$\forall \underline{u}^*, \underline{w}^*$ et $\underline{\lambda}^*$ cinématiquement admissibles à 0, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^*) d\Omega - \int_{\Gamma^F} \underline{F} \cdot \underline{u}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{\lambda} \cdot \underline{u}^* d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \underline{w}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\lambda} \cdot \underline{w}^* d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} \underline{\lambda}^* \cdot \underline{u} d\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\lambda}^* \cdot \underline{w} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Dans ce travail, la loi de comportement du matériau est supposée élastique linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{D}\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) \quad (8)$$

On décompose déplacements et efforts sur les lèvres selon la direction normale et tangentielle :

$$\underline{w} = w_n \underline{e}_n + w_t \underline{e}_t \quad \underline{t} = t_n \underline{e}_n + t_t \underline{e}_t \quad (9)$$

et on utilise les crochets $[\]$ pour mesurer le saut d'une quantité à la traversée de la fissure orientée :

$$\begin{aligned} [w_n] &= w_n^+ - w_n^- & [t_n] &= t_n^+ - t_n^- \\ [w_t] &= w_t^+ - w_t^- & [t_t] &= t_t^+ - t_t^- \end{aligned} \quad (10)$$

Un modèle classique de contact avec loi de Coulomb pour le frottement permet de caractériser le comportement des lèvres de fissure dans les directions normales et tangentielles :

$$\begin{cases} t_n \cdot [w_n] = 0 \\ t_n \leq 0 \\ [w_n] \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{opening : } t_n = 0 \ \& \ [w_n] > 0 \\ \text{contact : } t_n < 0 \ \& \ [w_n] = 0 \end{cases} \quad (11a)$$

$$\begin{cases} (t_t - \mu|t_n|) \cdot [\dot{w}_t] = 0 \\ (t_t - \mu|t_n|) \leq 0 \\ t_t \cdot [\dot{w}_t] \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sticking : } |t_t| < \mu|t_n| \ \& \ [\dot{w}_t] = 0 \\ \text{sliding : } |t_t| = \mu|t_n| \ \& \ t_t \cdot [\dot{w}_t] < 0 \end{cases}$$

Le fait d'avoir une représentation explicite (i.e. maillée) de la fissure (comme indiquée figure 10) permet d'avoir naturellement un support pour les champs \underline{w} et \underline{t} . Une discrétisation de type XFEM (cf. figure 14) a donc été utilisée pour les trois champs de la formulation :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \sum_{i \in I_{structure}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in \square} N_i(\underline{x}) \mathcal{H}(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in \triangle} N_i(\underline{x}) \sum_{j=1..4} \mathcal{F}_j(\underline{x}) \underline{b}_{i,j} \\ \underline{w} &= \sum_{i \in I_{fissure}} N_i(\underline{x}) \underline{w}_i^u + N_i(\underline{x}) \mathcal{H}(\underline{x}) \underline{w}_i^a \\ \underline{t} &= \sum_{i \in I_{fissure}} N_i(\underline{x}) \underline{t}_i^u + N_i(\underline{x}) \mathcal{H}(\underline{x}) \underline{t}_i^a \end{aligned} \quad (12)$$

Le degré de liberté "saut" peut directement être relié à la discontinuité du champ :

$$[\underline{w}] = 2\underline{w}_i^a \quad [\underline{t}] = 2\underline{t}_i^a \quad (13)$$

L'opérateur RELA 'ACCRO' 'FAIBLE' a été développé dans Cast3M pour former les matrices de relations associées à P^{coupl} en considérant une discrétisation des multiplicateurs de Lagrange λ utilisant les mêmes fonctions de forme N que w . Une option RELA 'ACCRO' 'FORT' a aussi été prévue avec une écriture nodale des relations (approximation discrète de λ au lieu d'être continue).

Des procédures ont été développées pour calculer les efforts dus au contact-frottant sur les lèvres de la fissure.

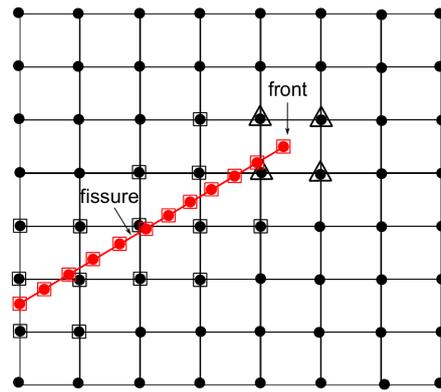


Figure 14 – *Discretisation XFEM : structure en noir et fissure en rouge*

Un algorithme de résolution non-linéaire de type LATIN a été écrit spécifiquement pour cette application, l'étape globale étant l'équilibre élastique de la structure et l'étape locale étant la résolution du problème de contact frottant. Afin d'assurer la convergence de la méthode, des termes de stabilisation ont été ajoutés afin de vérifier la condition LBB. Un travail d'optimisation des paramètres de stabilisation a été mené dans [68]. Des exemples de validation par comparaison avec un code académique du LaMCoS sont donnés figure 15.

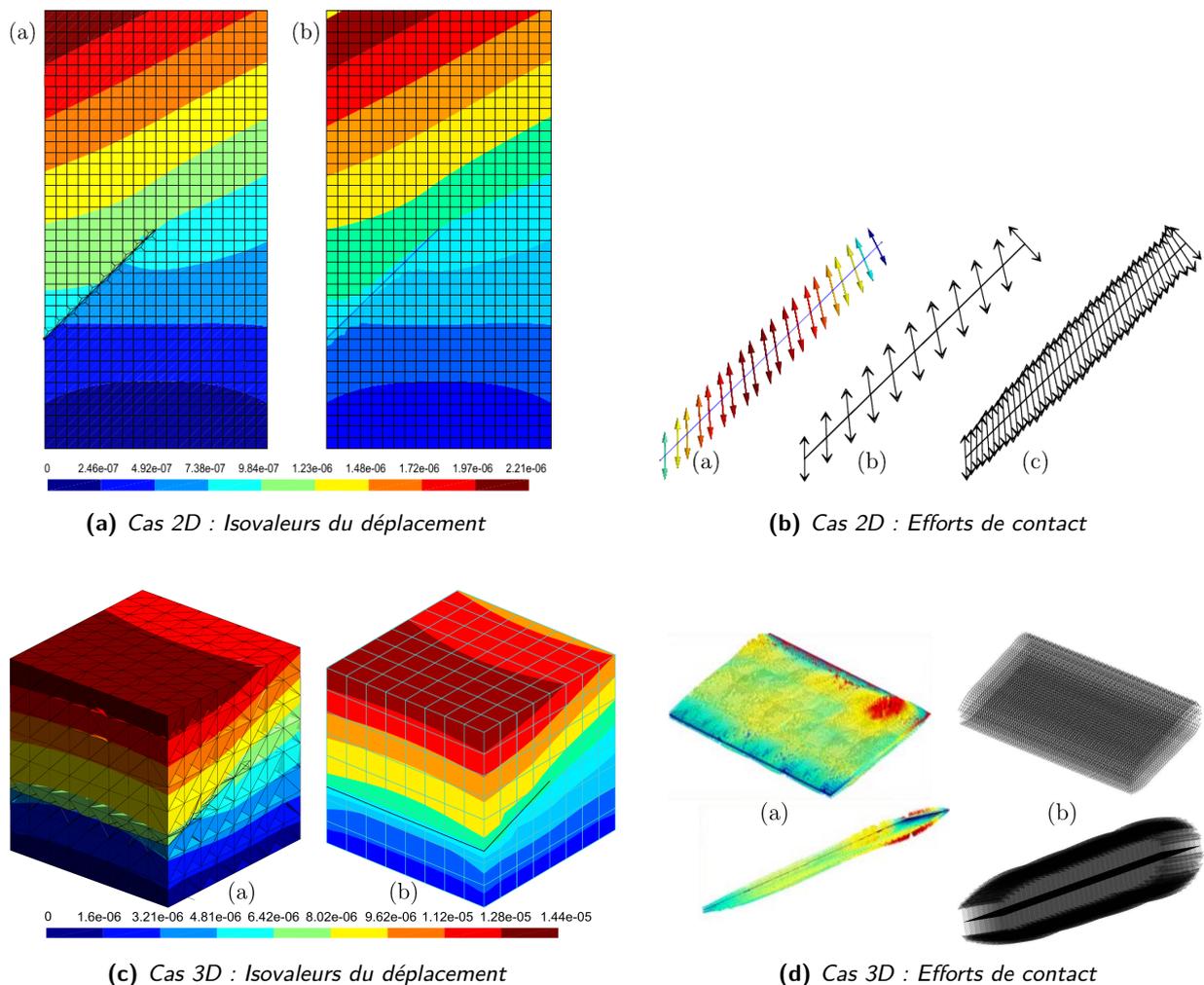


Figure 15 – *Validation du modèle numérique à deux échelles sur des cas 2D et 3D avec fissure inclinée par comparaison entre : (a) code académique et (b) Cast3M*

Enfin, l'utilisation d'un critère de propagation nécessite le calcul de l'histoire des facteurs d'intensité des contraintes au cours d'un cycle de chargement. La procédure G_THETA a été modifiée en conséquence pour prendre en compte le terme supplémentaire :

$$\int_{\Gamma} (\underline{t} \cdot \nabla[w]) \cdot \underline{\theta} d\Gamma \quad (14)$$

Les conditions de non-proportionnalité ont conduit à choisir le critère de Hourlier-Pineau pour orienter la direction de propagation tandis que la vitesse d'avancée utilise une loi de type Paris où intervient ΔK_{eq} fonction de ΔK_I et ΔK_{II} .

De nombreux paramètres et de nombreuses configurations ont été étudiées pendant la thèse de Benoit Trollé [70] : influence de l'orientation initiale de la fissure, du coefficient de frottement, des contraintes résiduelles, de la flexion globale du rail, de la présence d'une, deux ou d'un réseau de fissures. Un exemple de résultat obtenu sur l'orientation initiale de la fissure est fourni figure 17 à titre d'exemple.

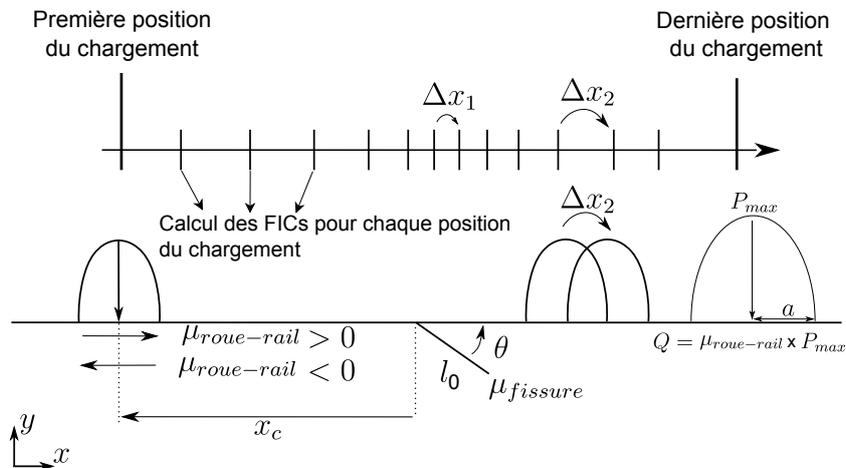


Figure 16 – Modélisation quasi-statique d'un cycle avec chargement Hertzien en glissement complet

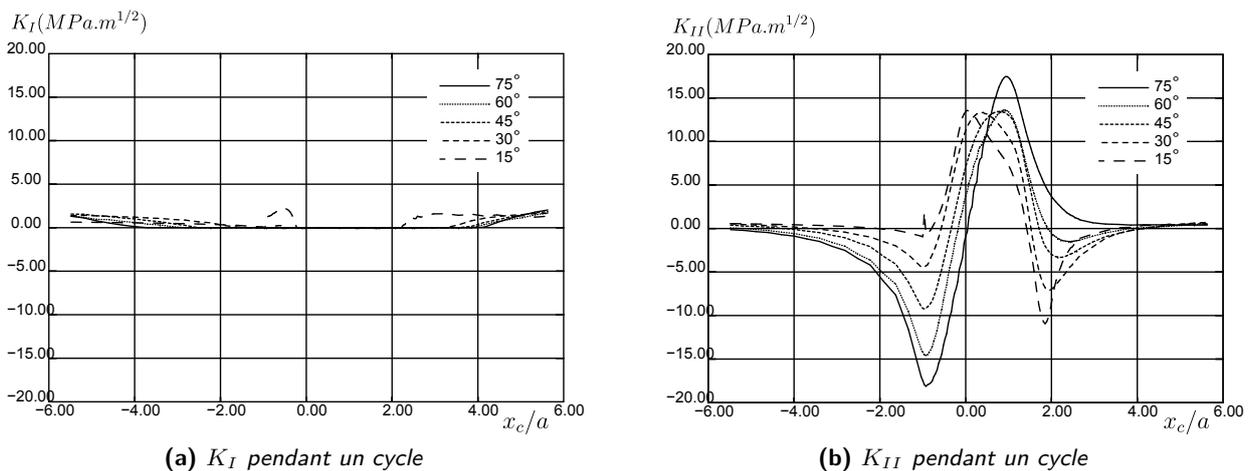


Figure 17 – Etude paramétrique de l'influence de l'orientation initiale de la fissure sur l'évolution des FIC durant un cycle

Enfin, notons que la division de la recherche de la SNCF utilise toujours ce module de Cast3M pour étudier les cas de propagation de fissures dans les rails tant en 2D qu'en 3D.

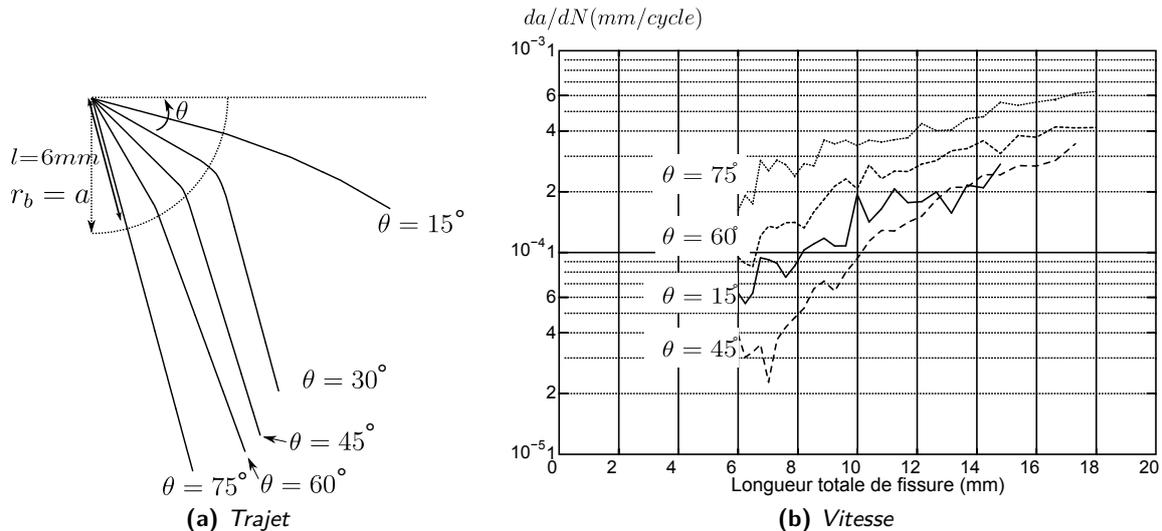


Figure 18 – Etude paramétrique de l'influence de l'orientation initiale de la fissure sur sa propagation

3.3.3 Dynamique explicite

Précédents travaux : Les premiers travaux concernant l'implémentation de la méthode XFEM dans le code de dynamique rapide Europlexus datent de la thèse de Thomas Menouillard [55] encadrée par Alain Combescure et Hariddh Bung. Lors de cette thèse ont été mis place :

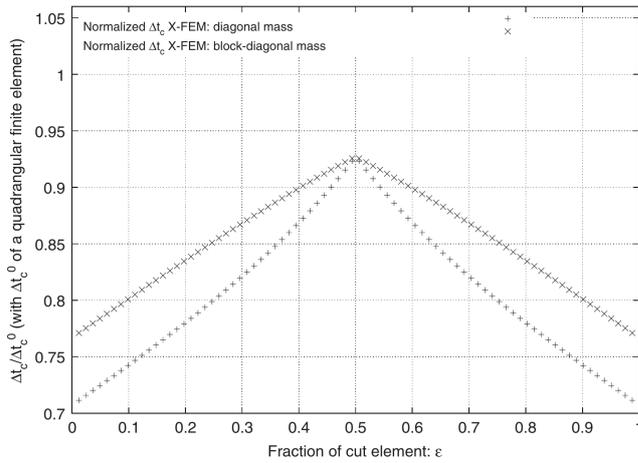
- l'actualisation des fonctions de niveaux avec la même méthode que celle décrite au §3.2.1 et dans [1] (utilisation d'une grille de type "différences finies" sur la configuration initiale),
- un enrichissement n'utilisant que des fonctions \mathcal{H} (impliquant une représentation à 1 élément près du front de fissure),
- une stratégie d'intégration identique à celle décrite dans §3.2.1 et [51, 1],
- et surtout une stratégie de diagonalisation de la matrice de masse permettant de préserver un pas de temps de stabilité proche de celui des éléments non rompus.

Une méthode de diagonalisation est d'abord présentée dans [53], puis une méthode de diagonalisation par bloc dans [58] permettant d'augmenter le seuil d'instabilité (cf. figure 19a). Enfin, cette méthodologie a été étendue à d'autres fonctions dans [59].

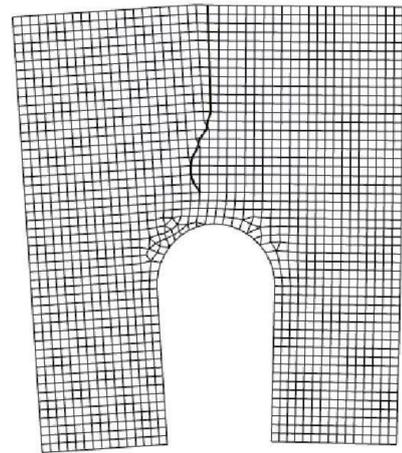
A la suite de ces premiers travaux, la thèse de Romain Pelée [69], encadrée par Alain Combescure, Thomas Elguedj, Vincent Faucher et moi-même, avait pour objectif d'étendre la méthode au 3D et d'utiliser un critère simple mais adapté au cas ductile.

Actualisation des fonctions de niveaux en 3D : L'actualisation des fonctions de niveau (ψ, ϕ) définissant la localisation de la fissure par résolution des équations de Hamilton-Jacobi a été introduite dans [50, 49]. Cependant, il a été constaté que cet algorithme a des difficultés à converger lorsque de brusques changements de directions existent. Cela peut être attribué à la difficulté à générer des fonctions qui soient à la fois orthogonales entre elles, et avec la propriété de distance signée. De nombreuses itérations sont nécessaires pour aboutir à un résultat qui n'est pas toujours celui escompté.

Pour circonvier à ce manque de robustesse, de nombreux auteurs ont proposés des méthodes alternatives, souvent basées sur des considérations géométriques, comme [54] ou [65]. La méthode proposée et décrite



(a) Pas de temps critique pour un quadrangle \mathcal{H} -enrichi



(b) Exemple de calcul sur éprouvette CCS

Figure 19 – Résultats de la thèse de Menouillard [55]

dans [7] repose sur des considérations similaires et est résumée par la figure 20 et les équations ci-après :

$$\psi = (\psi \cos \theta + \phi \sin \theta) - \dot{a} \Delta t \tag{15a}$$

$$\phi = \begin{cases} \phi^0 & \text{in zone 1} \\ \text{sign}(\phi_0) \cdot \min(|\phi_0|, |\phi_0 \cos \theta - \psi_0 \sin \theta|) & \text{in zone 2} \\ \phi_0 \cos \theta - \psi_0 \sin \theta & \text{in zone 3} \\ \text{sign}(\phi^0) \sqrt{\phi_0^2 + \psi_0^2} & \text{in zone 4} \end{cases} \tag{15b}$$

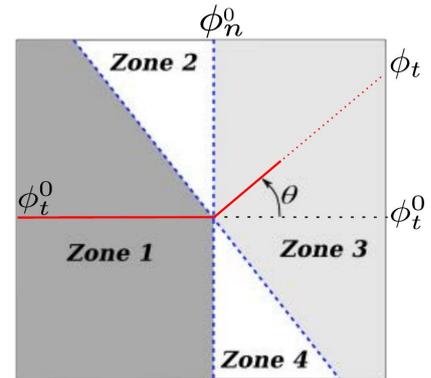


Figure 20 – Définition des différentes zones pour l'actualisation géométrique proposée par Pelée et al.

où (ψ_0, ϕ_0) sont les fonctions de niveau avant actualisation, $\theta = \arctan(V_\phi/V_\psi)$, $\dot{a} = \sqrt{V_\phi^2 + V_\psi^2}$ et les zones définies graphiquement figure 20.

Les isovalues obtenues sont comparées à celles obtenues avec d'autres méthodes sur un exemple élémentaire figure 21.

Deux exemples 3D plus complexes montrent sa robustesse figures 22a et 22b.

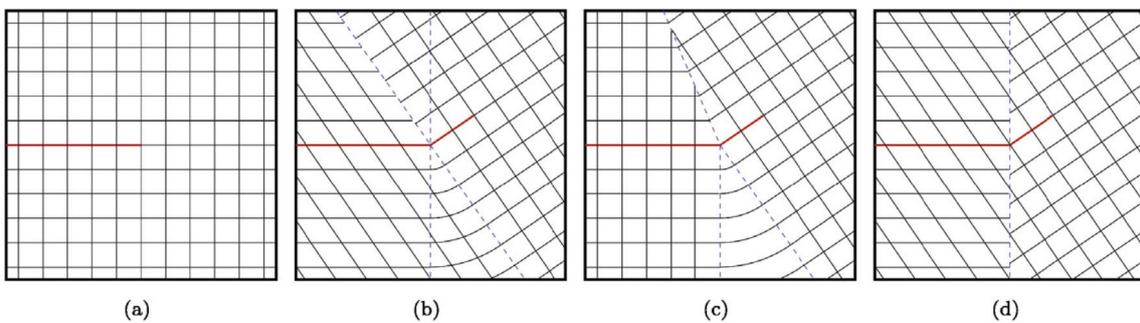


Figure 21 – Isovalues des fonctions de niveau sur un exemple élémentaire 2D. (a) : Initial, (b) : Actualisation de Pelée et al. , (c) : Actualisation de Duflot, (d) : Actualisation de Colombo et Massin

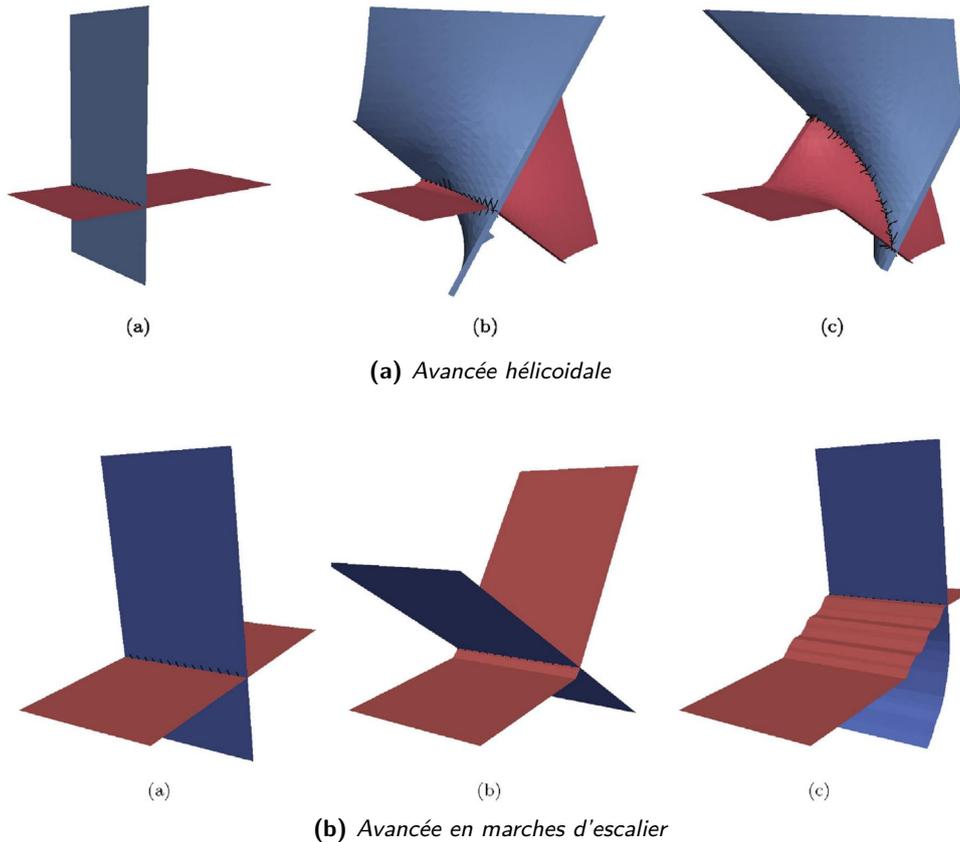


Figure 22 – Actualisation des fonctions de niveau : exemples 3D

Calcul du critère et gestion de la propagation en 3D : Le choix pragmatique de n'utiliser que des fonctions \mathcal{H} implique une description "pixelisée" de la position du front en 3D, différente de la description lisse des fonctions de niveaux, comme on peut le constater figure 23.

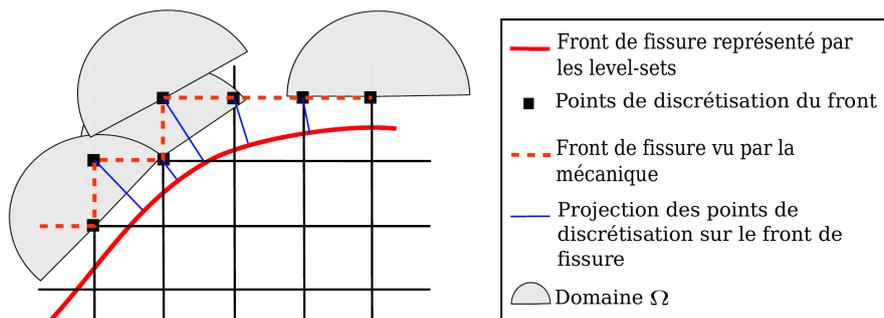


Figure 23 – Inconsistance entre le front des fonctions de niveaux et du modèle mécanique XFEM

Ainsi, la solution mécanique calculée, ainsi que le calcul du critère de rupture et la propagation se trouve très vite entachée d'erreurs importantes. Par exemple, l'utilisation d'un critère basé sur une moyenne spatiale (sur les domaines Ω de la figure 23), comme celui proposé dans [2] et rappelé au §3.2.1, est difficile à appliquer.

De plus, une propagation incrémentale (par élément) introduit en dynamique rapide des oscillations parasites. Pour atténuer ces effets, la fissure est "figée" tant que le cumul temporel des avancées de fissure prédites par le critère n'a pas atteint la taille caractéristique d'un élément (figure 24). La propagation effective est donc réalisée périodiquement, après quelques pas de temps. La stabilisation de la direction de propagation est aussi nécessaire. Elle est réalisée en utilisant dans le critère la moyenne temporelle des

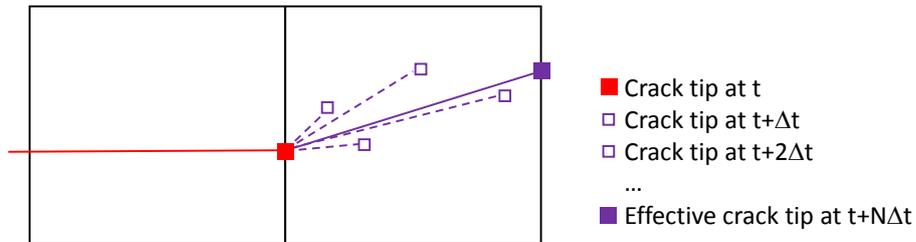


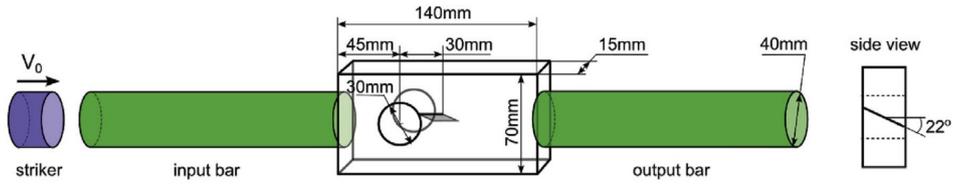
Figure 24 – Moyenne temporelle

quantités mécaniques utilisées (i.e. des contraintes ici) calculée durant l'intervalle de temps pour lequel la propagation est "figée".

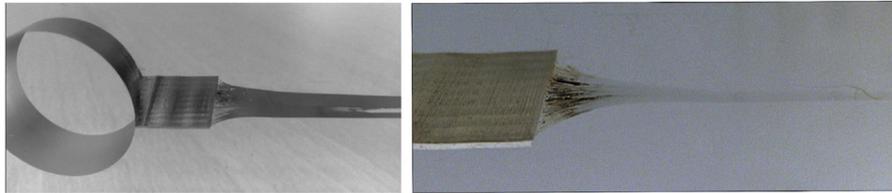
Le critère mis en oeuvre pendant la thèse de Romains Pelée [69] et utilisé dans les résultats ci-après provient du travail de David Haboussa [67]. Deux angles (bifurcation et déversement) sont considérés et leur valeur critique calculée en maximisant σ_{22} lorsque la rupture a lieu à cause de la traction, ou en maximisant σ_{eq} pour une rupture par cisaillement. La transition entre ces deux régimes est pilotée par une mesure de la déformation équivalent $\bar{\epsilon}^{eq}$.

L'application des méthodes exposées en dynamique rapide à l'expérience de Grégoire [57] avec une fissure inclinée est présentée figure 25.

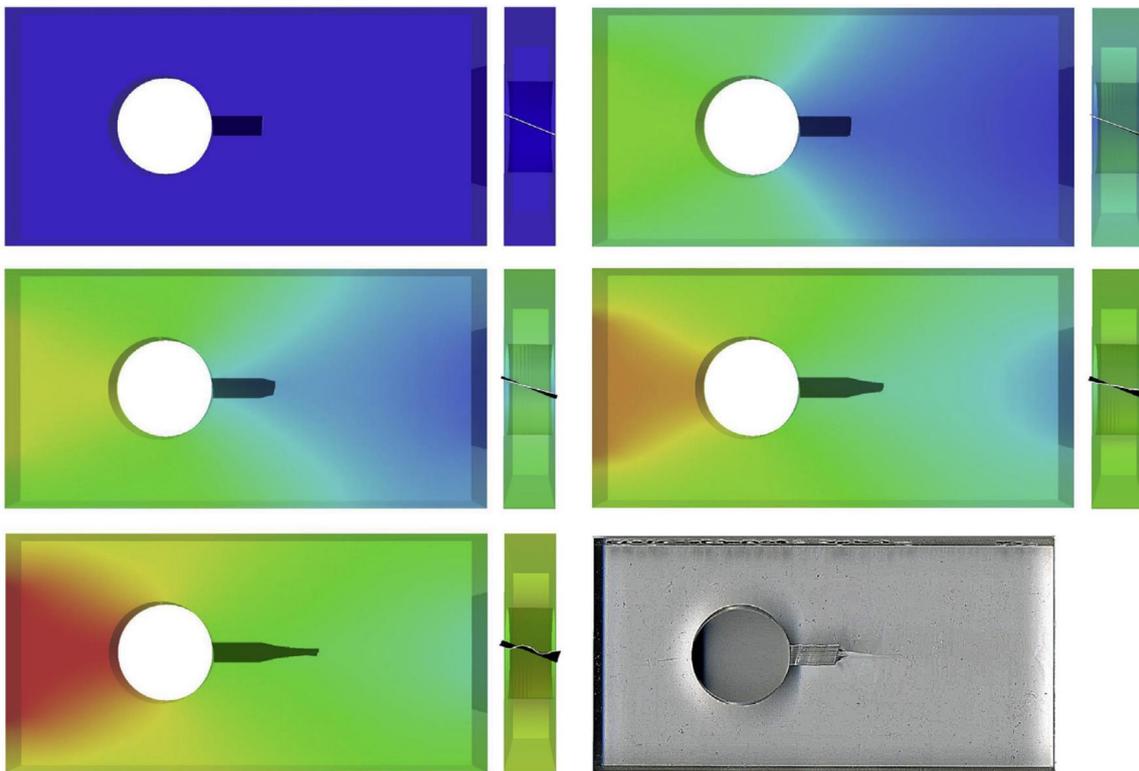
Des oscillations sont observées en fin de propagation sur le plan de fissure. Des investigations seraient nécessaires pour vérifier si elles sont liées au critère, à sa mise oeuvre numérique, à la moyenne temporelle ou même à l'actualisation des fonctions de niveau.



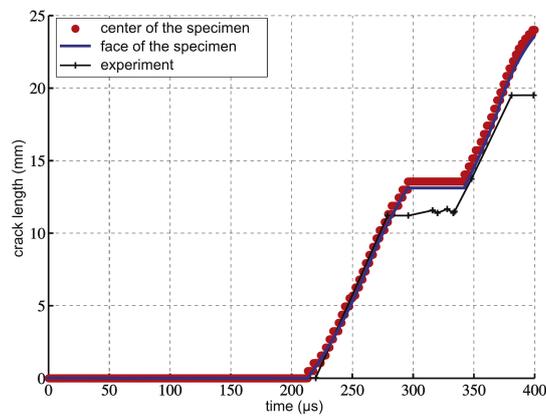
(a) Dispositif expérimental



(b) Cliché post-mortem



(c) Champs de déplacement aux temps 0 μs, 200 μs, 225 μs, 250 μs, 275 μs et post-mortem



(d) avancé de fissure en fonction du temps

Figure 25 – Comparaison calcul-essai de l'expérience de Grégoire

3.4 Couplage XFEM/AMR

3.4.1 Motivation pour le raffinement

Dès les papiers fondateurs de Belytshko et Black [45] et de Moës *et al.* [47], la méthode XFEM a été mise en avant comme permettant de limiter ou d'éviter les opérations de remaillage, alors courantes dans les simulations numériques de propagation de fissure.

Cependant, il n'en reste pas moins que pour avoir une précision suffisante, la taille des éléments au voisinage du front de fissure doit être suffisamment petite. Cela est difficile à assurer lorsque le trajet de fissure n'est pas a priori connu, et/ou que les dimensions de la structure étudiée sont grandes. De plus, la qualité de la solution est principalement pilotée par la finesse de la discrétisation dans une zone localisée autour du front, et, dans les cas de propagation, cette zone change de lieu au cours du temps.

Il apparaît donc clairement le besoin d'adapter la discrétisation avec la propagation de la fissure. On se concentre ici sur les méthodes de h -raffinement (c'est à dire jouant sur la taille et le nombre d'éléments) par opposition aux méthodes de p -raffinement (qui augmentent le degré et le nombre de fonctions d'approximation par élément). Plusieurs approches illustrées figure 26 sont possibles pour h -raffiner et ainsi obtenir une taille d'éléments "objectif" :

- Figure 26b : on peut subdiviser les éléments de manière hiérarchique et récursive (généralement en puissance de 2). Cela permet de préserver le ratio d'aspect des éléments, mais introduit des noeuds "pendants" (ou *hanging nodes*). Ces derniers matérialisent la non-continuité de l'approximation des déplacements à l'interface inter-éléments. Ce problème est classiquement résolu en imposant une relation cinématique à chaque degré de liberté introduit par ce noeud. Cette relation de conformité est obtenue aisément en écrivant la continuité du déplacement à l'interface.
- Figure 26c : on peut aussi subdiviser les éléments en conservant naturellement la conformité de ceux-ci. Les algorithmes sont généralement plus complexes et nécessitent de choisir l'option qui introduit le moins de distorsion dans le maillage.
- Figure 26d : enfin, on peut choisir de remailler complètement le domaine.

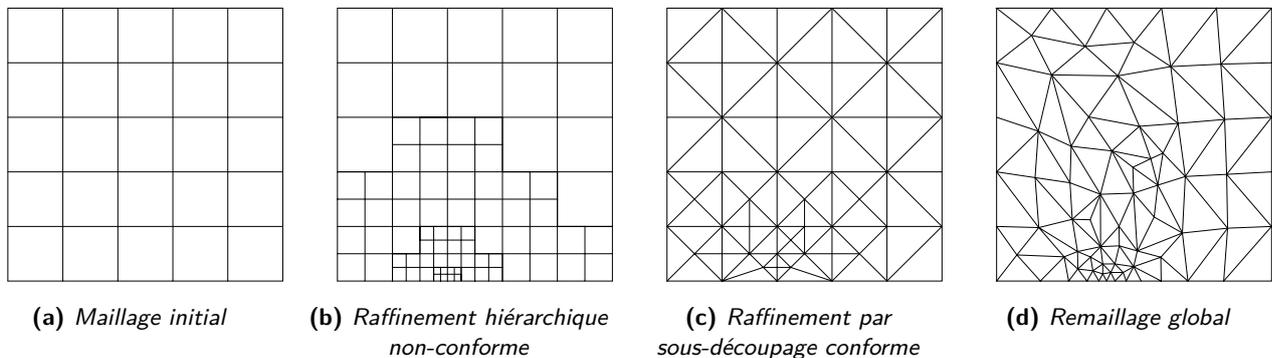


Figure 26 – Méthodes de h -raffinement

La première option semble la plus cohérente avec la philosophie XFEM et, à première vue, la plus facile à mettre en oeuvre numériquement. La sous-section suivante détaille comment s'obtiennent les relations de compatibilité dans le cas d'éléments finis standards.

3.4.2 Relations de compatibilité dans le cas "standard"

Le raffinement hiérarchique engendre des maillages non compatibles : sur la figure 27, on remarque que le noeud "3" n'existe pas dans l'élément grossier (*coarse*) mais seulement dans les éléments fins. Il est appelé *hanging node*. Par conséquent l'approximation du champ de déplacement est discontinue à l'interface inter-éléments (notée Γ_{nc} sur la figure 27)

Il est possible de retrouver la continuité de l'approximation éléments finis de manière forte. En effet, en s'appuyant sur les notations de la figure 28, on peut démontrer facilement que la continuité des déplacements est assurée en imposant une relation linéaire entre inconnues des noeuds appartenant à l'interface.

Cette relation s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \underline{u}^{coarse} = \underline{u}^{fine} &\Leftrightarrow N_1^c u_1 + N_2^c u_2 = \begin{cases} N_1^f u_1 + N_3^f u_3 & \text{pour } \xi \leq 0 \\ N_3^f u_3 + N_2^f u_2 & \text{pour } \xi \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-(2\xi+1))u_1 + \frac{1}{2}(1+(2\xi+1))u_2 & \text{pour } \xi \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1-(2\xi-1))u_3 + \frac{1}{2}(1+(2\xi-1))u_2 & \text{pour } \xi \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = u_3 \end{aligned} \quad (16a)$$

dans le cas d'éléments 2D linéaires, et comme :

$$\underline{u}^{coarse} = \underline{u}^{fine} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{8}u_1 + \frac{3}{4}u_2 - \frac{1}{8}u_3 = u_4 \\ -\frac{1}{8}u_1 + \frac{3}{4}u_2 + \frac{3}{8}u_3 = u_5 \end{cases} \quad (16b)$$

dans le cas d'éléments 2D quadratiques.

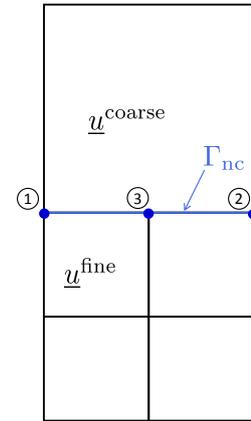
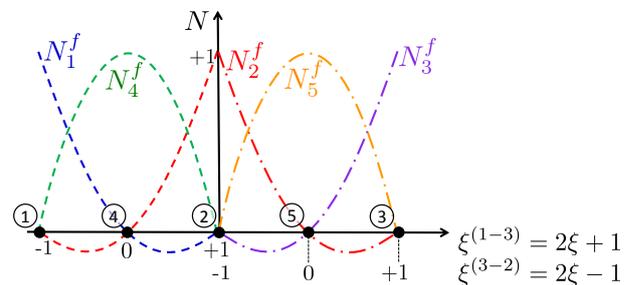
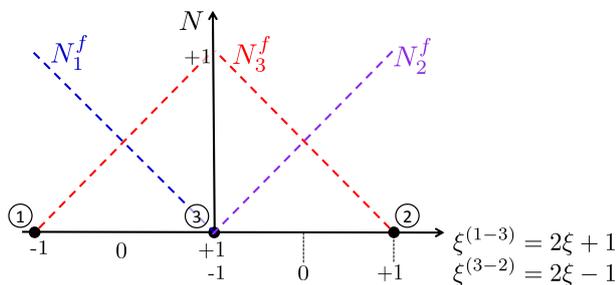
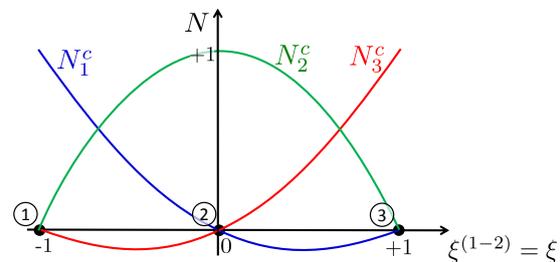
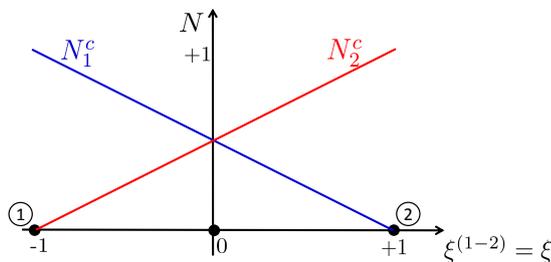


Figure 27 – Maillage incompatible



(a) Fonctions de formes linéaires sur l'interface

(b) Fonctions de formes quadratiques sur l'interface

Figure 28 – Fonctions de forme des éléments grossier (en haut) et fin (en bas)

La même démarche peut être conduite en 3D pour déterminer les coefficients des relations à imposer pour des noeuds appartenant à une face interface entre éléments grossier et fins.

Dans Cast3M, à partir du maillage initial, l'opérateur RAFF génère un maillage raffiné hiérarchiquement et un maillage de *hanging node*. Ce dernier est ensuite traité par l'opérateur RELA pour construire les matrices de relations permettant d'imposer la continuité inter-éléments par multiplicateurs de Lagrange.

3.4.3 Application à l'étude paramétrique d'un réseau de fissures stationnaires

Afin de tester les bonnes propriétés d'un couplage entre AMR et XFEM sur un cas simple, j'ai eu l'opportunité de réaliser une étude paramétrique sur le cas 2D d'un réseau périodique de fissures stationnaires lors d'une collaboration avec Véronique Lazarus et Jean-Baptiste Leblond [10]. Parallèlement, le cas 3D de plusieurs fissures de géométries complexes déterminées par tomographie X réparties dans une éprouvette en flexion trois points a aussi été investiguée [31], mais ne sera pas présentée ici.

Contexte de l'étude : La sollicitation en mode III-dominant d'une fissure initialement plane peut conduire à une segmentation du front de fissure selon un motif caractéristique de facettes inclinées que l'on peut observer sur les clichés expérimentaux de la figure 29. L'analyse de ce cas fait l'objet de nombreuses publications comme [61, 72, 10]. Les éléments présentés ci-après proviennent de la dernière citée.

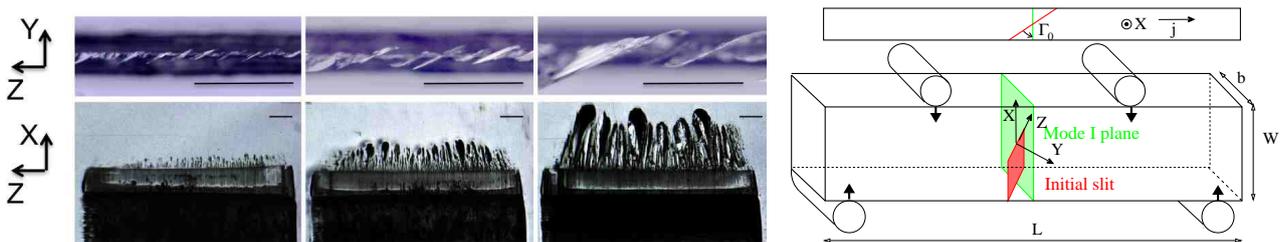


Figure 29 – Segmentation et coalescence de facettes dans une éprouvette de plexiglass comportant une fissure initialement inclinée et sollicitée par fatigue en flexion 4 points ($W = b = 10 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ mm}$, $\Gamma_0 = 30^\circ$).

En particulier, Jean-Baptiste Leblond *et al.* ont établi une modélisation à 2 échelles permettant de simplifier le problème 3D (figure 30a).

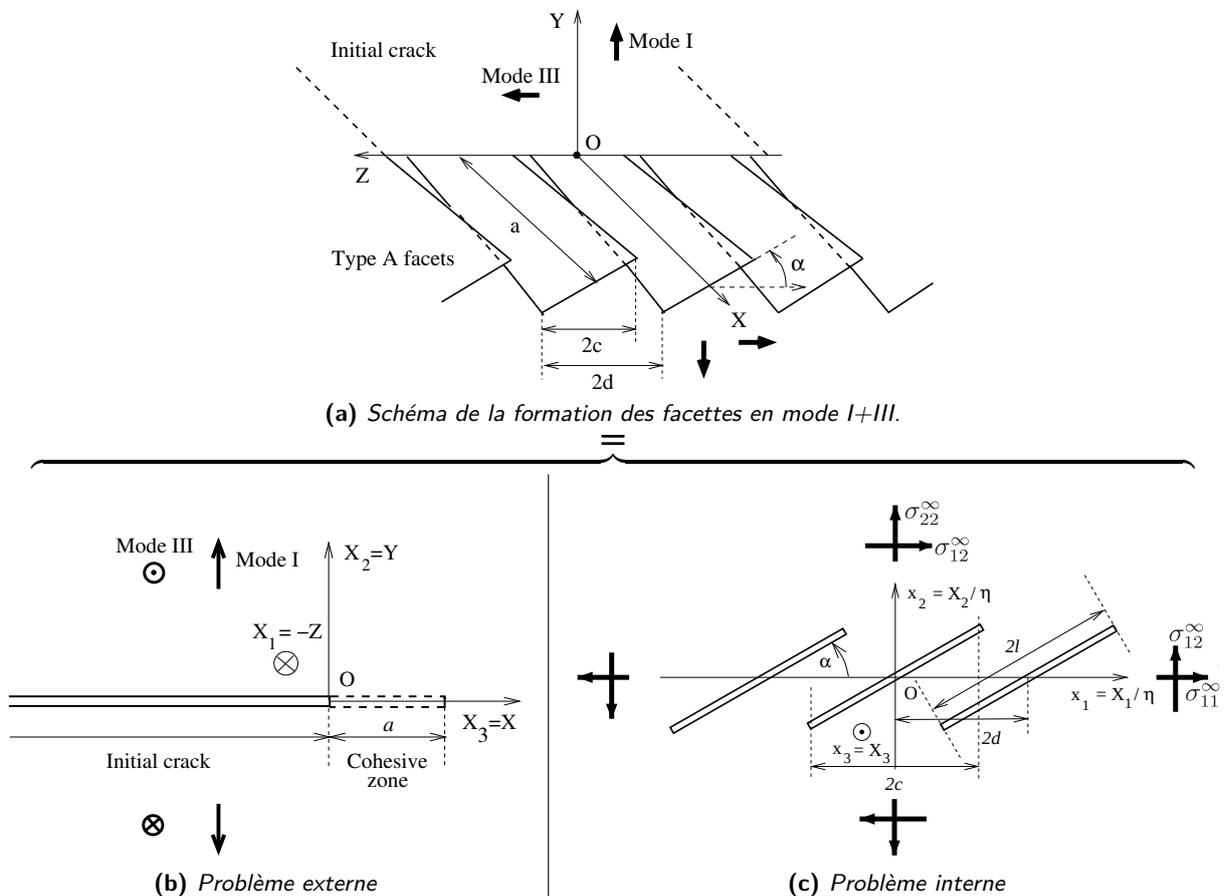


Figure 30 – Modélisation à 2 échelles.

Cette modélisation s'appuie sur deux problèmes 2D :

- Le problème à l'échelle externe (figure 30b) qui représente l'avancée de la fissure dans le plan (X, Y) .
- Le problème à l'échelle interne (figure 30c) qui décrit les phénomènes dans le plan orthogonal à la propagation à l'aide d'un modèle élastique de réseau périodique de fissure.

Démarche de résolution du problème interne : Le problème interne est uniquement caractérisé par la géométrie dont :

- l'angle de dévers α
- et la largeur relative des facettes $\frac{c}{d}$

sont les paramètres. De précédents travaux [72] avaient permis d'obtenir la loi interne à partir de calculs éléments finis classiques, mais pour des valeurs limitées de α et $\frac{c}{d}$. Il s'est rapidement avéré que la construction d'un maillage paramétrique ou automatisé permettant de traiter une plus large plage de configurations, typiquement ($\alpha \in [0^\circ - 45^\circ]$ et $\frac{c}{d} \in [0 - 1.4]$) était quasi-impossible car cela impliquait :

- l'utilisation d'un maillage assez grossier loin des pointes de fissure pour des raisons de temps de calcul au vu du nombre de points calculés,
- un maillage suffisamment fin au voisinage de la pointe de fissure,
- un maillage régulier autour de la pointe de fissure pour avoir une bonne précision lors du calcul de l'intégrale J par la méthode $G\theta$,
- un maillage symétrique pour imposer facilement les conditions aux limites.

A contrario, la combinaison d'un raffinement hiérarchique avec un modèle XFEM a permis d'obtenir les courbes caractéristiques du problème à l'échelle des facettes sans difficulté. Une vérification de la convergence des résultats a même été menée en comparant trois niveaux de raffinement représentés figure 31a, 31b et 31c.

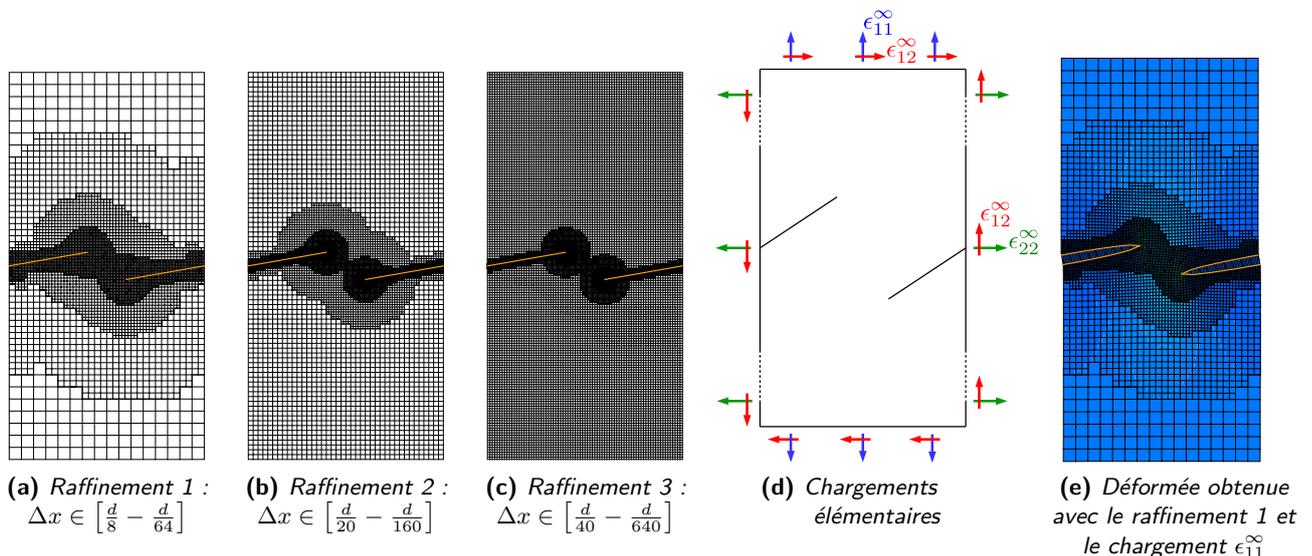


Figure 31 – Calculs combinant raffinement hiérarchique et XFEM

Afin de simplifier la démarche, le raffinement a été réalisé en s'assurant qu'aucun *hanging node* n'appartienne à une interface où interviendrait des enrichissements. Cette astuce permet d'utiliser une méthode d'enrichissement standard et d'éviter l'écriture de relations de conformité mettant en jeu des enrichissements XFEM comme expliqué dans la section suivante. Seules des relations de conformité sur les degrés de liberté "standards" sont ainsi ajoutées au modèle.

Enfin, les relations de périodicité doivent prendre en compte les degrés de liberté enrichis. En notant I_0 et I_{2d} les noeuds situés respectivement à $x_1 = 0$ et à $x_1 = 2d$, on montre que les conditions de périodicité à imposer s'écrivent :

$$\underline{u}(x_1 = 0, x_2) - \underline{u}(x_1 = d, x_2) = -\underline{\epsilon}^\infty \cdot 2d\underline{e}_1 \quad (17a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u}_i - \underline{u}_j = -\underline{\epsilon}^\infty \cdot 2d\underline{e}_1 & \text{for } i \in (I \setminus I_a) \cap I_0 \\ & \text{and } j \in (I \setminus I_a) \cap I_{2d} \\ \underline{u}_i + \text{sign}(\phi_i)\underline{a}_i - \underline{u}_j - \text{sign}(\phi_j)\underline{a}_j = -\underline{\epsilon}^\infty \cdot 2d\underline{e}_1 & \text{for } i \in I_a \cap (I_0 \setminus \{\underline{x}_i : x_{i2} = 0\}) \\ & \text{and } j \in I_a \cap (I_{2d} \setminus \{\underline{x}_j : x_{j2} = 0\}) \\ \begin{cases} \underline{u}_i - \underline{u}_j = -\underline{\epsilon}^\infty \cdot 2d\underline{e}_1 \\ \underline{a}_i - \underline{a}_j = 0 \end{cases} & \text{for } i \in I_0 \cap \{\underline{x}_i : x_{i2} = 0\} \\ & \text{and } j \in I_{2d} \cap \{\underline{x}_j : x_{j2} = 0\} \end{cases} \quad (17b)$$

où I_a est l'ensemble des noeuds \mathcal{H} -enrichis (associé aux dds \underline{a}).

Ensuite, trois problèmes d'élasticité avec les trois chargement représentés figure 31d sont résolus et la valeur des facteurs d'intensité de contraintes calculés. Les chargements équivalents en contraintes sont déduits des réactions, ainsi que la valeur des 6 fonctions F caractérisant l'influence du chargement global sur la réponse locale en terme de facteur par la résolution de :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\infty 1} & \sigma_{11}^{\infty 2} & \sigma_{11}^{\infty 3} \\ \sigma_{22}^{\infty 1} & \sigma_{22}^{\infty 2} & \sigma_{22}^{\infty 3} \\ \sigma_{12}^{\infty 1} & \sigma_{12}^{\infty 2} & \sigma_{12}^{\infty 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{11}^k \\ F_{22}^k \\ F_{12}^k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2d}} \begin{pmatrix} K_k^1 \\ K_k^2 \\ K_k^3 \end{pmatrix} \quad \text{for } k = \{I, II\} \quad (18)$$

Résultats : Cette méthode de calcul a permis d'obtenir les courbes de la figure 33 qui caractérisent le comportement à l'échelle interne.

La comparaison des résultats numériques avec des formules analytiques proposées dans [72] montre qu'elles ne sont valides que pour des valeurs de $\frac{c}{d}$ petites. En effet, l'interaction des 2 fissures est suffisamment complexe pour produire des allures de courbes difficile à appréhender par des raisonnements analytiques. Cela justifie ainsi pleinement l'utilisation de l'outil numérique.

Deux manières d'obtenir le chargement appliqué depuis le problème à l'échelle externe ont été étudiées dans [10] :

- Directement à partir de l'inclinaison macro de la fissure Γ_0 en considérant le changement de base appropriée (approche notée $\sigma^\infty = \sigma^\infty \underline{j} \otimes \underline{j}$ sur la figure 32).
- En identifiant les efforts surfaciques d'une zone cohésive (approche notée CZ sur la figure 32).

Les deux méthodes de résolution à l'échelle externes (*Cohesive Zone* et $\sigma^\infty = \sigma^\infty \underline{j} \otimes \underline{j}$) et deux critères basés sur le principe de symétrie locale et de minimisation de l'énergie ont été comparés aux résultats expérimentaux sur la figure 32 pour la prédiction de l'angle de dévers en situation de chargement en mode combiné I+III.

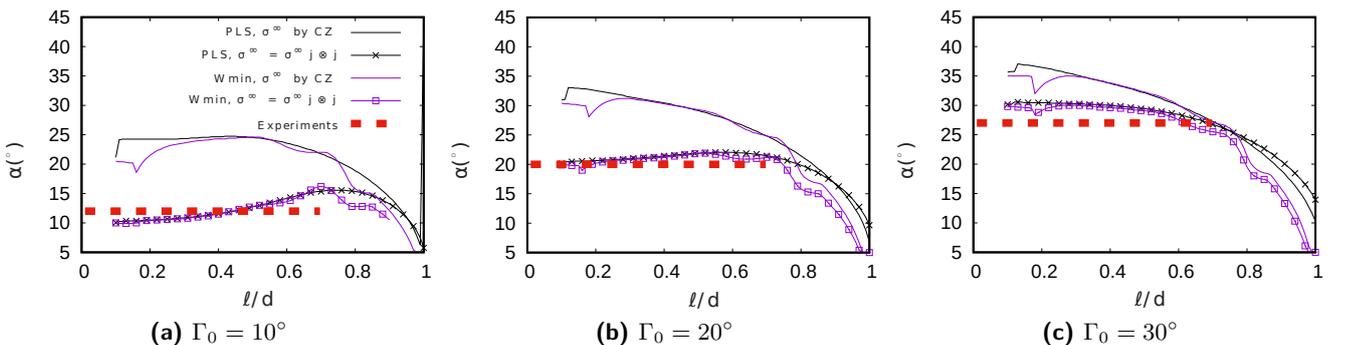


Figure 32 – Valeurs de α prédites par le modèle numérique pour plusieurs macro-inclinaisons initiales de fissure Γ_0

Une présentation et une discussion plus avancée peuvent être trouvés dans [10].

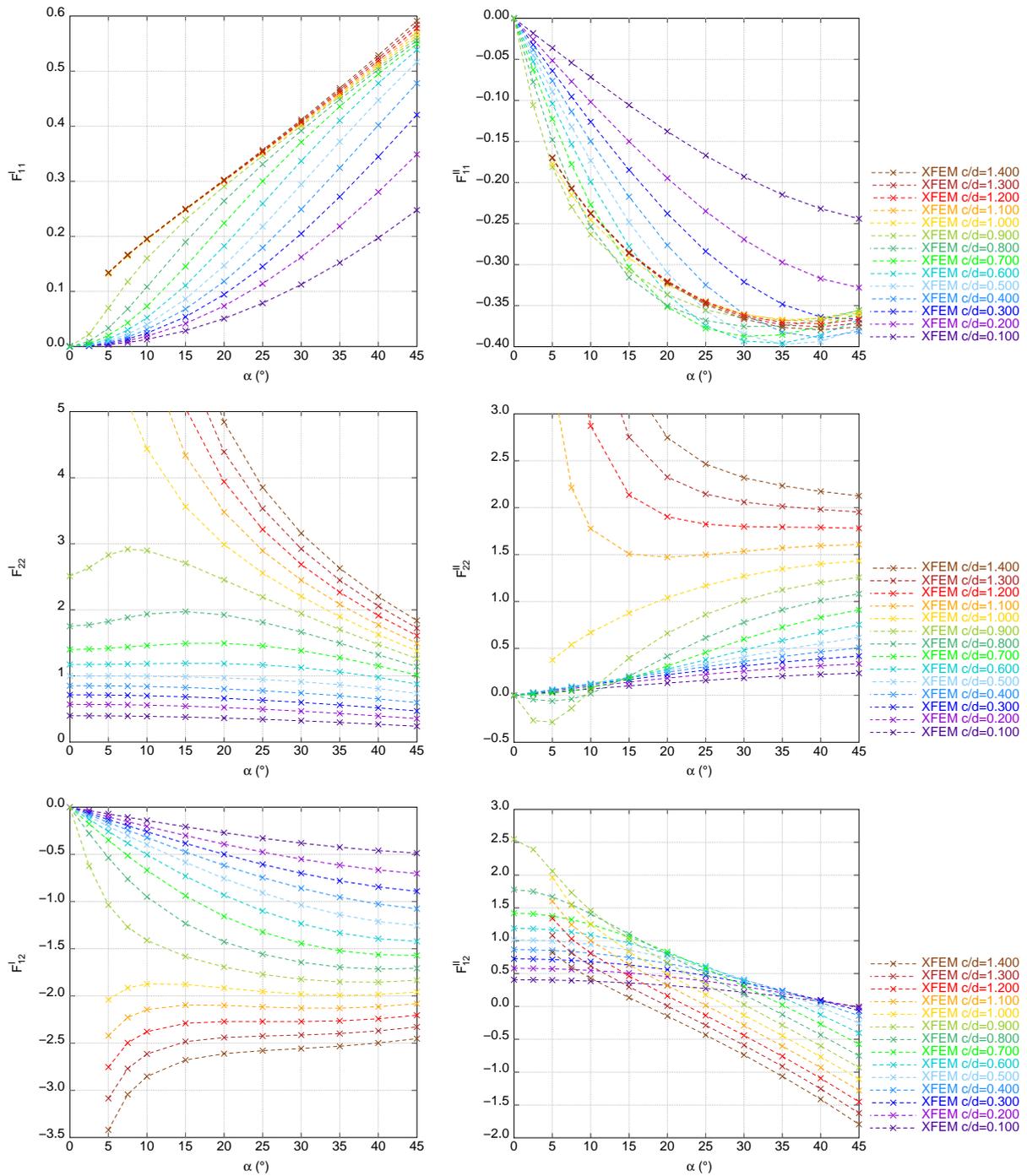


Figure 33 – Fonctions $F_{ij}^k(\alpha, \frac{c}{d})$

3.4.4 Algorithme de propagation

Dans la section précédente, un exemple d'application a été donné pour illustrer la souplesse d'utilisation d'une méthode mariant raffinement hiérarchique et XFEM. L'exploration de l'applicabilité de cette méthode à des cas de propagation dans des matériaux inélastiques était l'objectif de la thèse de Gaël Gibert [75] encadré par Anthony Gravouil, Clémentine Jacquemoud et moi-même. Les sections §3.4.4 à §3.4.7 résument ces travaux.

L'algorithme général d'un calcul de propagation de fissure par la méthode AMR-XFEM est fourni ci-après avec en [couleur](#) les étapes supplémentaires et celles affectées par l'adaptation automatique de maillage. Il apparait opportun de rappeler ici que l'espace de discrétisation enrichi \mathcal{N} dépend notamment du maillage \mathcal{M} (éventuellement raffiné) et de la position considérée de la fissure Γ . On fait apparaître ces deux éléments en notant la discrétisation à l'instant n :

$$\mathcal{N}^n = \mathcal{N}(\mathcal{M}^n, \Gamma^n) \quad (19)$$

Algorithme 1 : Propagation de fissure par une méthode couplant AMR et XFEM.

Données : Maillage initial grossier \mathcal{M}^0 et Fissure initiale Γ^1
Conditions aux limites et chargement

Pour les cycles de chargement $n=1$ à n_{max} , **Calculer** :

$\mathcal{M}^n \leftarrow$ Maillage issu de \mathcal{M}^0 raffiné autour du front de la fissure courante Γ^n

$(\psi, \phi)^n \leftarrow$ Level-sets calculés depuis \mathcal{M}^n et Γ^n

$\mathcal{N}^n \leftarrow$ Enrichissement déduit de $(\psi, \phi)^n$ prenant en compte la topologie de \mathcal{M}^n

$L^n \leftarrow$ Relations de conformité associées à la discrétisation \mathcal{N}^n

$(\tilde{\underline{u}}(0), \tilde{\underline{\sigma}}(0), \dots)^n \leftarrow$ Transfert de $(\underline{u}(T), \underline{\sigma}(T), \dots)^{n-1}$ depuis \mathcal{N}^{n-1} vers \mathcal{N}^n

$(\underline{u}(t), \underline{\sigma}(t), \dots)^n \leftarrow$ Calcul mécanique sur un cycle de chargement $t \in [0 - T]$

$(K_I(t), K_{II}(t), \dots) \leftarrow$ Calcul des grandeurs pertinentes pour le critère de propagation

$\Gamma^{n+1} \leftarrow$ Fissure mise à jour en fonction du critère de propagation $f(K_I, K_{II}, \dots)$

Fin de boucle

Sauvegarde et Post traitement

Considérant le problème particulier d'une fissure, on a choisi de ne pas utiliser d'estimateur d'erreur (souvent déterminés a posteriori ou au cours de la résolution), mais d'imposer simplement la taille d'élément objectif comme une fonction simple de la distance au front de fissure $r = \sqrt{\psi^2 + \phi^2}$. La forme simple de la fonction retenue ainsi que les paramètres de raffinement h_{min} , h_{max} , r_1 et r_2 qui la compose sont explicités figure 34a. Les figures 34b et 34c illustrent l'action de raffinement.

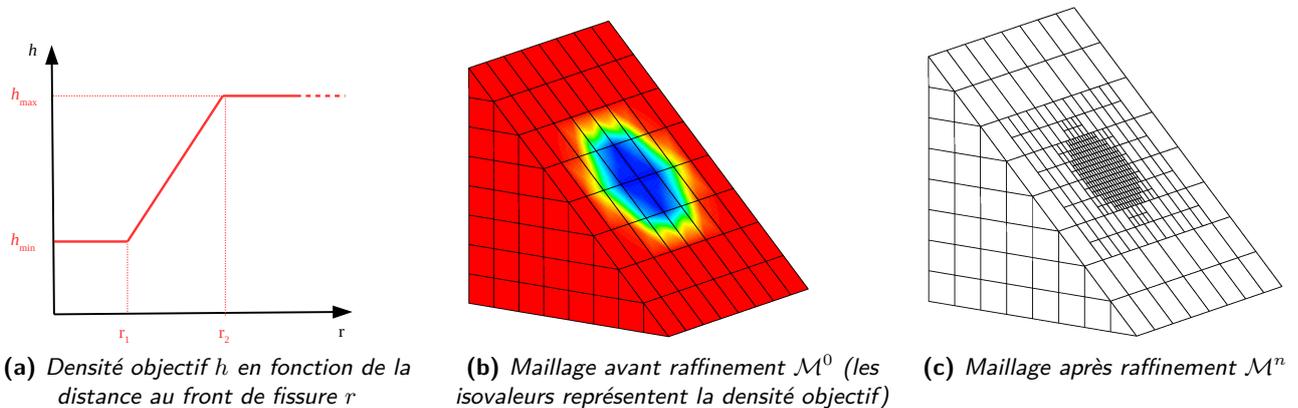


Figure 34 – Raffinement hiérarchique de maillage

De manière classique, le raffinement hiérarchique engendre des incompatibilités de maillage qu'il faut traiter (cf. §3.4.2 pour le rappel dans cas éléments finis standards). Son utilisation dans le cadre XFEM introduit de nouvelles problématiques par rapport à un calcul XFEM "habituel" :

- La gestion de l'enrichissement doit tenir compte d'éventuelles non-conformités du maillage.
- Les relations de conformité doivent aussi être écrites pour les ddls d'enrichissement.
- Lors de l'adaptation de maillage, la solution mécanique doit être transférée de l'ancien vers le nouveau support de discrétisation (maillage et enrichissement).

Ces items ne traduisent rien d'autre que le besoin d'assurer respectivement la **continuité en espace et en temps du problème discrétisé**. Les deux sections suivantes traitent de ces deux aspects.

3.4.5 Stratégie d'enrichissement et relations de compatibilité

Enrichissement d'un maillage raffiné : L'incompatibilité du maillage implique que la stratégie d'enrichissement visant à déterminer quels sont les noeuds à enrichir a dû être adaptée. Deux règles ont été énoncées à cette fin :

- Si un noeud enrichi (*hanging* ou pas) apparaît dans une relation de compatibilité (mettant en jeu des ddls standards), alors la même relation de compatibilité doit être écrite pour les ddls enrichis.
- En conséquence, les *hanging nodes* en jeu dans cette nouvelle relation de compatibilité doivent aussi être enrichis. Les autres noeuds de cette nouvelle relation qui n'étaient pas enrichis peuvent l'être mais il faut imposer par ailleurs à ces ddls enrichis de rester nuls.

La figure 35 illustre un cas où l'enrichissement \mathcal{H} a ainsi été "diffusé" vers les noeuds voisins a posteriori.

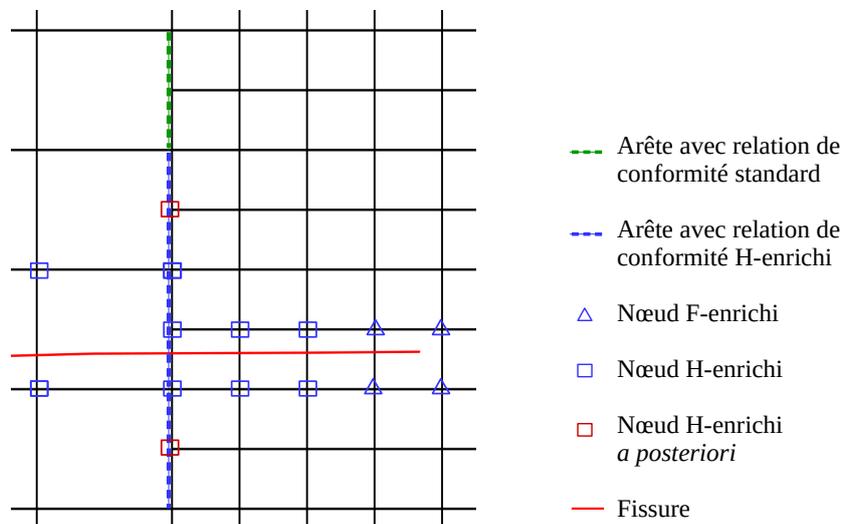


Figure 35 – Stratégie d'enrichissement pour un maillage incompatible

Relation de compatibilité d'une cinématique enrichie : Le raisonnement permettant d'écrire la relation de compatibilité pour une cinématique éléments finis standards doit être réitéré pour une cinématique XFEM afin d'assurer la continuité du champ déplacement enrichi à l'interface entre éléments grossiers et fins.

On s'aperçoit assez vite que la partition de l'unité a le bon goût de nous éviter trop de calcul sous réserve que les fonctions d'enrichissement soient identiques dans les éléments grossiers et fins de part et d'autre

de l'interface. En clair, en plus des relations sur les ddls standards, on peut écrire directement :

$$\begin{aligned} \underline{a}_3 &= \frac{1}{2}\underline{a}_1 + \frac{1}{2}\underline{a}_2 \\ \underline{b}_{3j} &= \frac{1}{2}\underline{b}_{1j} + \frac{1}{2}\underline{b}_{2j} \end{aligned} \quad (20)$$

tant que les fonctions de niveau respectent :

$$\begin{cases} \phi_3 = \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2 \\ \psi_3 = \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 \end{cases} \quad (21)$$

puisque ce sont elles qui sont interpolées et dont dépendent directement les fonctions \mathcal{H} et \mathcal{F} .

De part la nature des fonctions de niveau, ces conditions sont généralement respectées. De plus, cette condition peut être relâchée pour \mathcal{H} (et le ddl a) car seul le signe de ϕ compte dans la définition de la fonction. Enfin, en pratique, les zones de transition entre éléments fins et grossiers ne coïncident pas avec des éléments \mathcal{F} -enrichis puisque l'on cherche à avoir une zone de même raffinement de plusieurs éléments autour de la pointe de fissure. En conclusion, le même formalisme que pour les ddls standards s'applique pour les ddls enrichis, ce qui conserve la simplicité de l'approche.

3.4.6 Stratégie de transfert de champs

Généralités : A cause de la présence de grandeurs physiques dépendant de l'histoire (comme les variables internes et de déformations plastiques), il est nécessaire d'initialiser les champs mécaniques sur la nouvelle discrétisation \mathcal{N}^n en début de pas en respectant deux critères principaux :

- La minimisation de l'écart avec la solution connue sur la discrétisation précédente (càd sur \mathcal{N}^{n-1}) en fin de pas.
- La vérification par les variables projetées des équations du modèle retenu (équilibre, comportement, compatibilité, etc.).

auxquels il faut ajouter le pragmatisme de l'approche adoptée : simplicité de mise en oeuvre, temps de calcul raisonnable, etc.

Cette étape difficile a fait l'objet de nombreuses publications [42, 43, 44, 52, 56] principalement pour des méthodes de remaillages. De manière générale, certaines quantités sont projetées, d'autres déduites, et la manière de procéder dépend étroitement du support des champs considérés.

Pour les champs définis aux noeuds, il est naturel d'utiliser l'approximation éléments finis pour calculer le champ sur son nouveau support, soit par interpolation (comme dans [44] ou option par défaut de l'opérateur PROI de Cast3M), soit en minimisant de façon faible l'écart entre les deux champs (comme dans [64] ou l'option 'MINI' de l'opérateur PROI).

On trouve deux grandes familles de méthodes pour les champs définis aux points d'intégration. D'une part, celles qui cherchent à retrouver une approximation (continue ou par élément) des champs pour revenir à une simple interpolation comme on le peut voir figure 36a. Cette approche qualifiée de "classique" (par [56]) est utilisée dans [42, 43, 44, 52] et se réalise très simplement dans Cast3M pour les éléments finis standards. D'autre part, celles qui vont "recopier" pour le nouveau point de Gauss la valeur du point support de l'ancienne discrétisation le plus proche (ou de l'élément dans lequel se trouve le nouveau point) comme illustré figure 36b. Ce second type d'approche est utilisé dans [41, 64] et dans Europlexus par exemple.

Enfin, il existe des méthodes basées sur des approximations diffuses qui considèrent les champs comme étant définis sur un nuage de points [48, 56]. Plus précisément, une minimisation pondérée y est réalisée entre les données initiales et une approximation polynomiale.

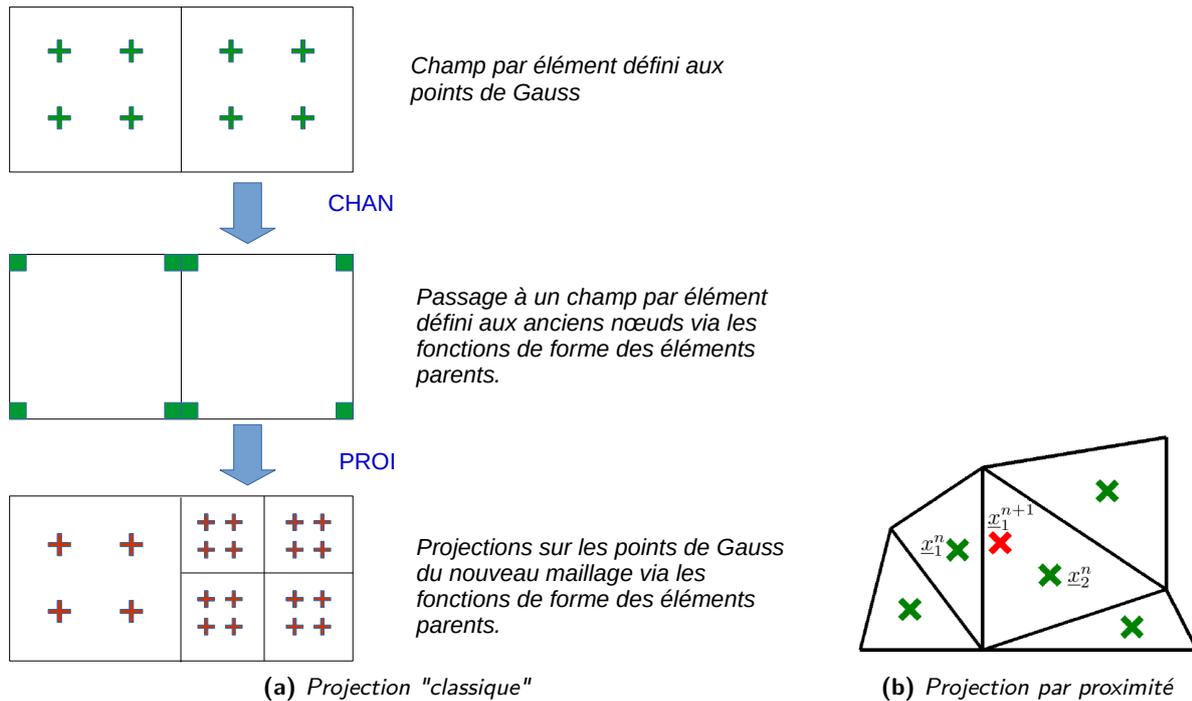


Figure 36 – Méthodes de projection de champs définis aux points de Gauss

Afin de répondre à la problématique du transfert de champ dans un cadre XFEM/GFEM, la démarche présentée ci-après a été proposée et publiée dans [9] :

Algorithme 2 : Etapes de transfert des champs mécaniques depuis \mathcal{N}^{n-1} vers \mathcal{N}^n

1. Enrichissement du nouveau maillage \mathcal{M}^n avec l'ancienne position de fissure Γ^{n-1} .
2. Transfert du champ de déplacement \underline{u}^{n-1} calculés à la fin du cycle précédent (vecteur $\{\underline{q}^{n-1}\}$ avec ses degrés de liberté enrichis) sur le nouveau maillage : $\tilde{\underline{u}}^n$ (vecteur $\{\tilde{\underline{q}}^n\}$).
3. Transfert des contraintes $\underline{\sigma}^{n-1}$ et des variables internes p^{n-1} sur le nouveau maillage : $\tilde{\underline{\sigma}}^n, \tilde{p}^n$ (avec mise à zéro des éventuelles valeurs négatives des variables internes).
4. Mise à jour de l'enrichissement avec la nouvelle position de fissure Γ^n .
5. Étape de rééquilibrage pour retrouver l'équilibre et l'admissibilité plastique de l'état transféré.

Projection des champs définis aux points de Gauss : L'étape 3 implique la projection des contraintes (définies aux point de Gauss) sur les nouveaux points d'intégration. La méthode "classique" présentée précédemment et décrite en détail par l'algorithme 3 a été testée.

Algorithme 3 : Projection d'un champ $\underline{\sigma}$ des points de Gauss de \mathcal{M}^{n-1} vers ceux de \mathcal{M}^n

Pour les éléments E^n de \mathcal{M}^n ayant changés, **Calculer** :

Pour les points d'intégration \underline{x}_k^n de \mathcal{M}^n , **Calculer** :

L'élément E^{n-1} de \mathcal{M}^{n-1} où il se trouve.

Ses coordonnées locales dans cet élément : $\underline{\xi}_k$.

Le vecteur d'approximation $\{\hat{\underline{\sigma}}^{n-1}\}$ solution de :

$$\int_{E^{n-1}} [\mathcal{N}^\sigma(\underline{x})]^T \cdot [\mathcal{N}^\sigma(\underline{x})] \cdot \{\hat{\underline{\sigma}}^{n-1}\} d\Omega = \int_{E^{n-1}} [\mathcal{N}^\sigma(\underline{x})]^T \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}, t^{n-1}) d\Omega \quad (22)$$

où $\mathcal{N}^\sigma(\underline{x})$ est la base d'approximation retenue pour les contraintes.

Le champ projeté est finalement obtenu en évaluant l'interpolation :

$$\Pi_{\mathcal{N}^n}(\underline{\sigma}^{n-1}) = [\mathcal{N}^\sigma(\underline{\xi}_k)] \cdot \{\hat{\underline{\sigma}}^{n-1}\} \quad (23)$$

Fin de boucle

Fin de boucle

Le champ projeté est évidemment utilisé comme "prédicteur" de l'état initial :

$$\tilde{\underline{\sigma}}^n = \Pi_{\mathcal{N}^n}(\underline{\sigma}^{n-1}) \quad (24)$$

Une première approche "naive" utilisant seulement les fonctions de forme classique :

$$\mathcal{N}^\sigma = N \quad (25)$$

n'était pas satisfaisante pour les éléments en pointe de fissure comme le montre la figure 37b. Il a ainsi été proposé d'utiliser une base plus riche. Une seconde tentative baptisée "X-FEM" représentée figure 37c basée sur les fonctions de forme de déplacement de l'élément enrichi :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i^\sigma &= N_i \\ \mathcal{N}_{4+i}^\sigma &= N_i \mathcal{H} \\ \mathcal{N}_{8+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{N}_{12+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{N}_{16+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{N}_{24+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_4 \end{aligned} \quad (26)$$

améliore un peu les résultats. Enfin, puisque les dérivées sont en jeu, la base "X-FEM stress" :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i^\sigma &= N_i \\ \mathcal{N}_{4+i}^\sigma &= N_i \mathcal{H} \\ \mathcal{N}_{8+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_{1,r} \\ \mathcal{N}_{12+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_{2,r} \\ \mathcal{N}_{16+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_{3,r} \\ \mathcal{N}_{24+i}^\sigma &= N_i \mathcal{F}_{4,r} \end{aligned} \quad (27)$$

a permis d'atteindre une précision suffisante dans la projection des contraintes en pointe de fissure comme illustré figure 37d.

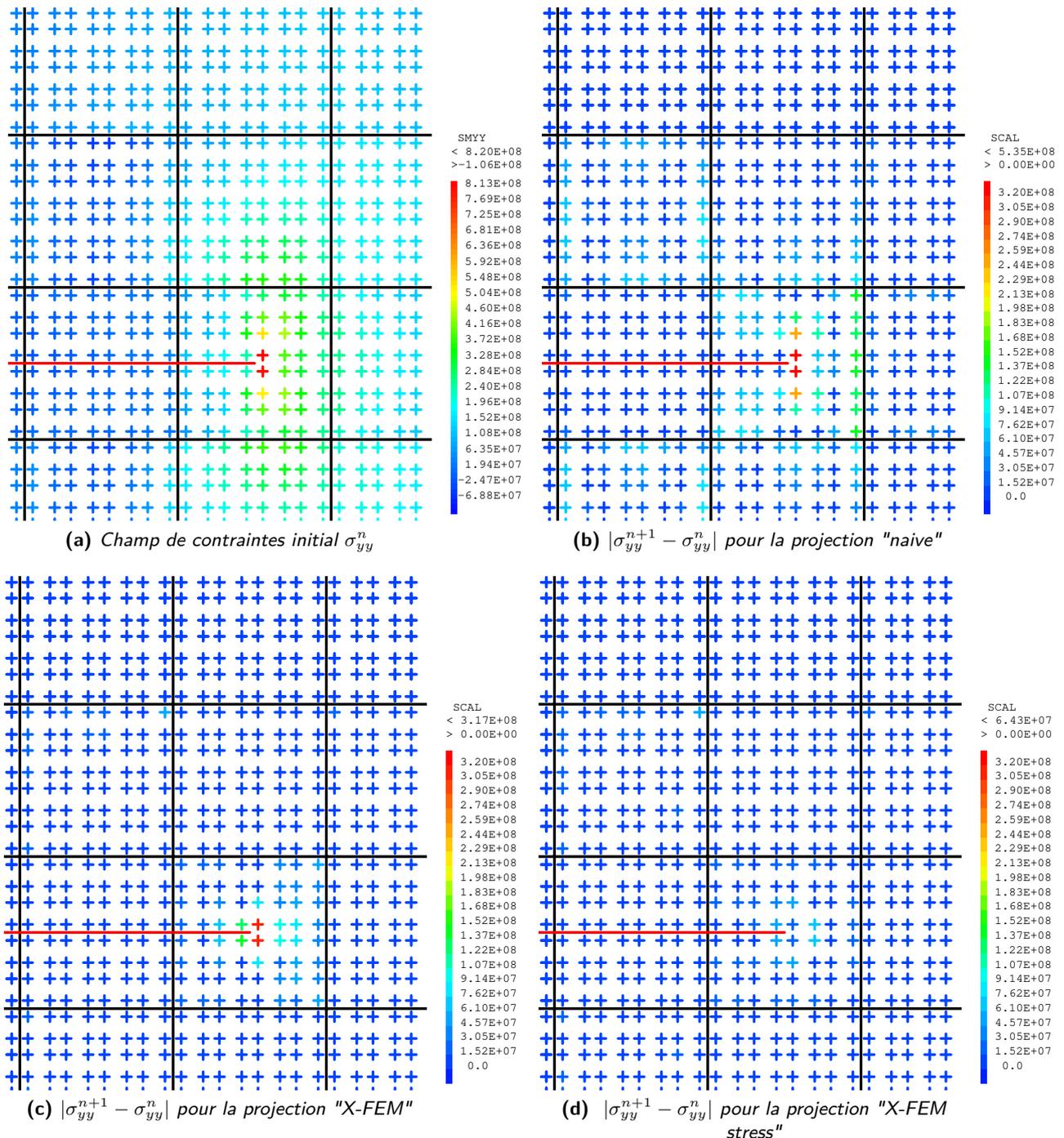


Figure 37 – Test d'auto-projection des contraintes

La même procédure est appliquée au calcul du champ de variables internes \hat{p}^{n+1} .

Projection du champ de déplacement enrichi : Le champ de déplacement disposant d'une approximation, on pourrait s'attendre à pouvoir utiliser une simple interpolation de l'ancien champ sur le nouveau maillage. Cependant, l'enrichissement complexifie grandement le problème. En effet, il n'est pas possible de projeter chaque composante du déplacement individuellement à cause de l'incompatibilité entre les enrichissements n et $n + 1$, comme illustré figure 38.

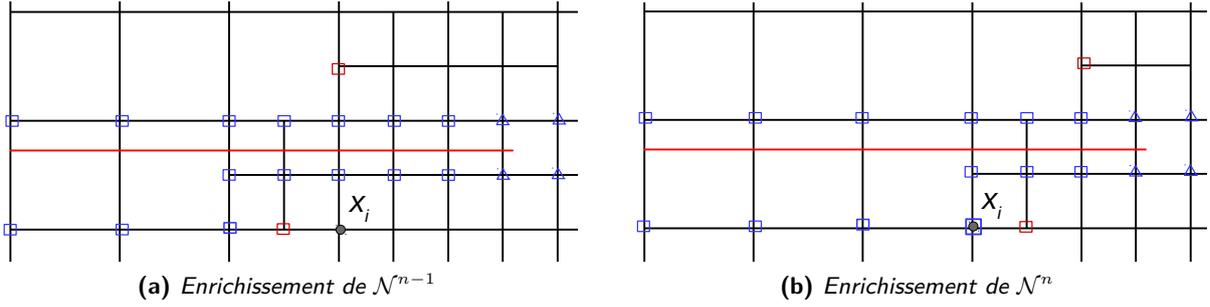


Figure 38 – Exemple d'incompatibilité d'enrichissement : le noeud x_i a été \mathcal{H} -enrichi a posteriori

Pour calculer le déplacement $\tilde{\underline{u}}^n$ sur la discrétisation \mathcal{N}^n (càd pour calculer le vecteur $\{\tilde{\underline{q}}^n\}$), on propose de résoudre le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{u}^{n*} \text{ cinématiquement admissible,} \\ & \int_{\mathcal{M}^n} \frac{1}{2} \text{tr} \left(\mathbb{D} \underline{\underline{\epsilon}}^{n*} \cdot \left(\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^n - \Pi_{\mathcal{N}^n} \left(\underline{\underline{\epsilon}}^{n-1} \right) \right) \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}^{n*}$, $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^n$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^{n-1}$ sont les déformations linéaires des déplacements \underline{u}^{n*} , $\tilde{\underline{u}}^n$ et \underline{u}^{n-1} respectivement et où $\Pi_{\mathcal{N}^n}$ désigne l'opérateur de projection vers la discrétisation \mathcal{N}^n . Ce problème conduit à la séquence d'opérations strictement équivalente décrite par l'algorithme 4.

Algorithme 4 : Projection d'un champ \underline{q} de \mathcal{N}^{n-1} vers \mathcal{N}^n

A partir du champ de déplacement initial \underline{q}^{n-1} , la déformation linéaire est calculée sur les points d'intégration du maillage \mathcal{M}^{n-1} de la discrétisation de départ \mathcal{N}^{n-1} :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{n-1} = \nabla^{\text{sym}} \underline{u}^{n-1} = [B^{n-1}] \cdot \{\underline{q}^{n-1}\} \quad (29)$$

Cette déformation est projetée sur les points de Gauss \underline{x}_k^n du maillage d'arrivée \mathcal{M}^n via l'algorithme 3. On obtient ainsi : $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^n$

Les contraintes linéaires élastiques associées sont ensuite calculées par la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^n = \mathbb{D} \cdot \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^n \quad (30)$$

Les forces nodales sont évaluées par intégration sur \mathcal{N}^n :

$$\tilde{F}^{\text{int } n} = \int_{\mathcal{M}^n} [B^n] \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^n d\Omega \quad (31)$$

Le problème d'élasticité linéaire suivant est finalement résolu :

$$\int_{\mathcal{M}^n} B^{nT} \mathbb{D} B^n d\Omega \cdot \{\tilde{\underline{q}}^n\} = \tilde{F}^{\text{int } n} \quad (32)$$

La figure 39 montre que :

- Une projection utilisant seulement les ddls standards lorsque l'enrichissement est incompatible conduit à des ouvertures de fissure erronées (figure 39c).
- L'utilisation de l'algorithme 4 (figure 39d) permet de retrouver un champ de déplacement proche de celui qu'on aurait obtenu en résolvant directement le problème sur la discrétisation finale (figure 39b).

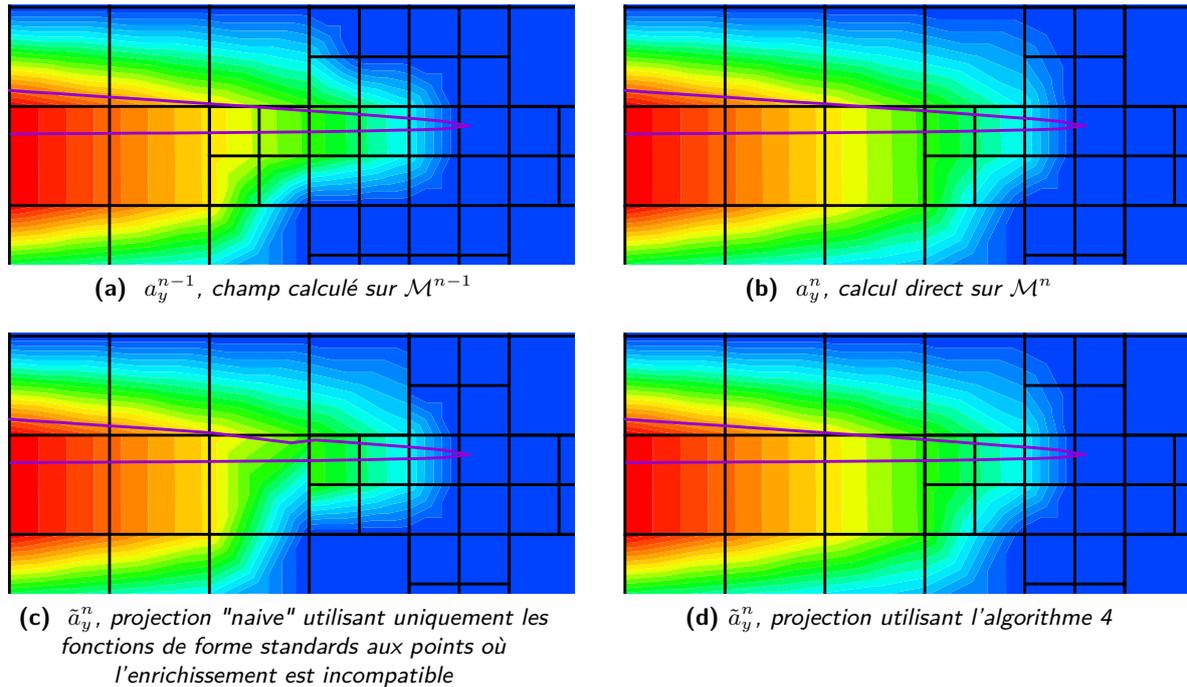


Figure 39 – Projection du ddl 'AY' en cas d'enrichissement incompatible.

Ré-équilibrage : L'étape 4 de mise à jour de l'enrichissement ajoute de nouveaux ddls à \tilde{q}^n initialisés à 0. Pendant l'étape 5 de ré-équilibrage, on force les ddls associés à l'ancienne pointe de fissure à décroître à 0, tandis que les nouveaux ddls d'enrichissement sont libérés, assurant une redistribution vers la nouvelle approximation du front de fissure et permettant d'éviter l'accumulation des ddls associés à toutes les fonctions \mathcal{F} générées.

De plus, le ré-équilibrage permet de retrouver l'équilibre et un comportement valide sur la nouvelle discrétisation. La convergence du solveur est grandement facilitée lorsque les prédicteurs (résultats du transfert notés avec le "tilde") sont proches de la solution attendue. Le choix d'un raffinement hiérarchique (conserver un grand nombre de points supports) constitue un avantage par rapport aux méthodes de remaillage total.

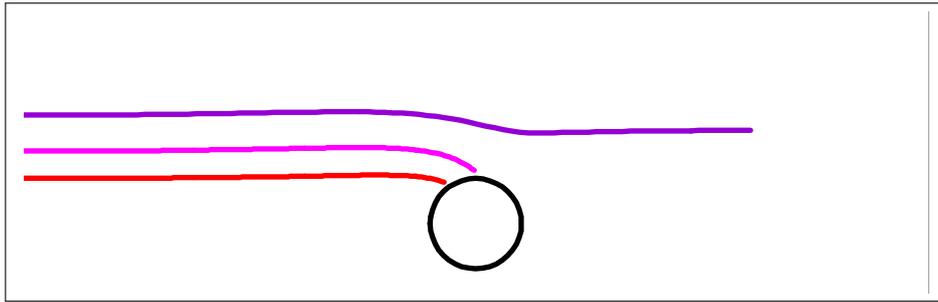
La solution obtenue à l'issue de ce pas de ré-équilibrage peut être utilisée comme condition initiale du nouveau cycle de chargement.

3.4.7 Applications à la propagation par fatigue

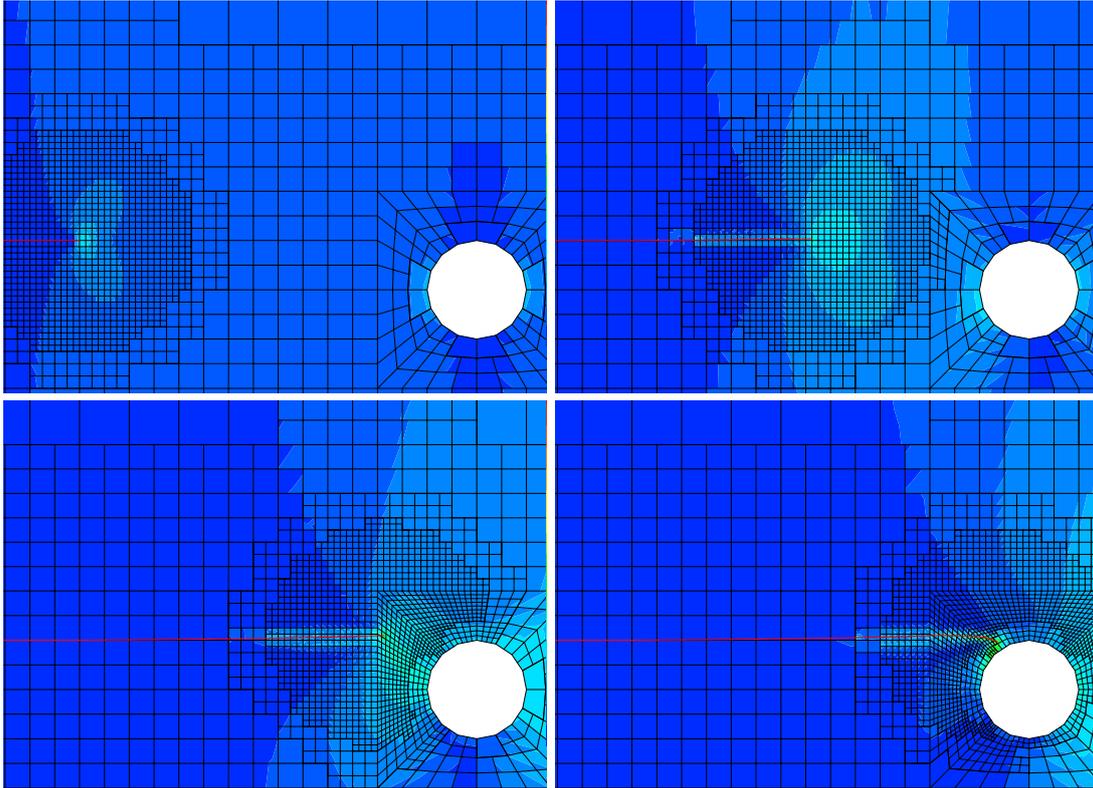
Benchmark Fatacrack : Lors de la thèse de Gael Gibert, le benchmark Fatacrack [74] a été investigué. Il s'agit d'une plaque trouée sollicitée en fatigue. Les trajets de propagation prédits pour plusieurs décalages verticaux δ de l'entaille initiale par rapport au centre du trou sont présentés figure 40a.

Quelques clichés du calcul sont aussi fournis figures 40b

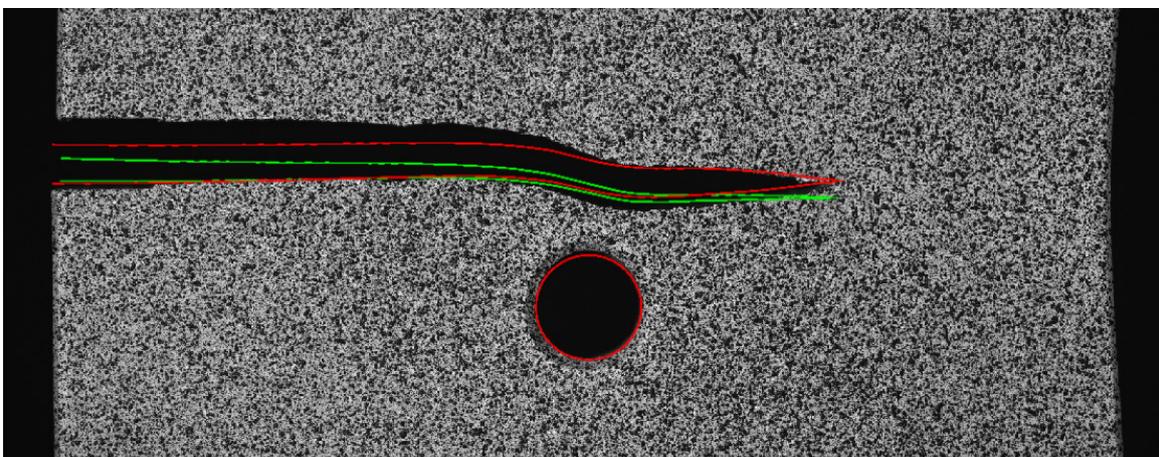
Enfin, la comparaison de la déformée expérimentale avec celle obtenue par calcul élastique et élasto-plastique (figure 40c) montre l'importance de la prise en compte de la déformation plastique pour les niveaux de chargement en jeu.



(a) Trajets de propagation pour trois positions d'entaille ($\delta = 2.5, 4$ et 6 mm)



(b) Avancée de fissure et contrainte de Von Mises calculées aux pas 1, 30, 50 et 60 de la simulation avec raffinement adaptatif ($F_{\max} = 15$ kN, $\delta = 2.5$ mm)



(c) Ouverture de fissure pour $\delta = 6$ mm (en vert : calcul élastique ; en rouge : calcul élasto-plastique)

Figure 40 – Benchmark Fatacrack

CT en 304L - Identification d'une loi de propagation en fatigue : Afin de mieux maîtriser les conditions expérimentales et valider le bon comportement des outils numériques mis en place, une campagne d'essais de propagation par fatigue sur éprouvette CT trouée en acier 304L ont été réalisés.

Des essais en mode I pur ont d'abord été réalisés ($F_{\max}=20$ kN) afin d'identifier les paramètres de la loi de Paris du matériau. Une méthode de corrélation d'image a permis de suivre l'avancée de la fissure avec le nombre de cycles. Le calcul a mis en évidence la refermeture des lèvres de la fissure liée à la plasticité au cours des cycles. Ainsi, il a été proposé d'adopter la loi de Elber :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K_{\text{eff}}^m \quad (33)$$

qui utilise $\Delta K_{\text{eff}} = K_{\max} - K_{\text{ouv}}$ au lieu de ΔK . L'instant d'ouverture est détecté par les réactions de contact. L'identification de cette loi a conduit à adopter les paramètres (fournis en unités SI) : $m = 2.2251$ et $C = 1.0395 \cdot 10^{-23}$.

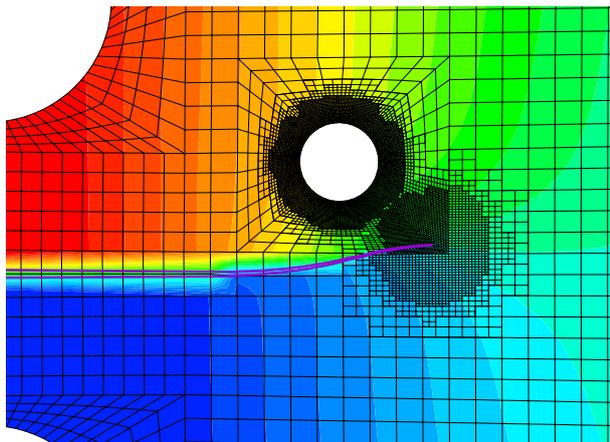
CT en 304L - Effet de la présence d'un trou : Cette loi a ensuite été utilisée pour prédire la propagation par fatigue de fissure en mode mixte dans des éprouvettes CT trouées. La direction de propagation est choisie en adoptant le critère de contrainte circonférentielle maximale, qui donne explicitement l'angle de propagation en fonction des facteurs d'intensité de contrainte.

Deux géométries de trous (diamètres de 4.0 et 5.3 mm) ont d'abord été testées à chargement "nominal" ($F_{\max}=20$ kN). Le calcul prédit un trajet simplement perturbé pour le premier cas (figure 41a) et qui dévie en direction du trou dans le second cas (figure 41b). Les figures 41c et 41d montre que les trajets numériques et expérimentaux se superposent parfaitement. La vitesse de propagation (via les courbes ouverture-nombre de cycle des figures 41e et 41f) montre un bon accord pour la géométrie 1 (en particulier avec la loi d'Elber), mais est plus éloignée pour la géométrie 2. Le critère de propagation ne semble plus valide pour ce niveau de chargement. La plasticité, importante à proximité du trou, pourrait être à l'origine des écarts observés.

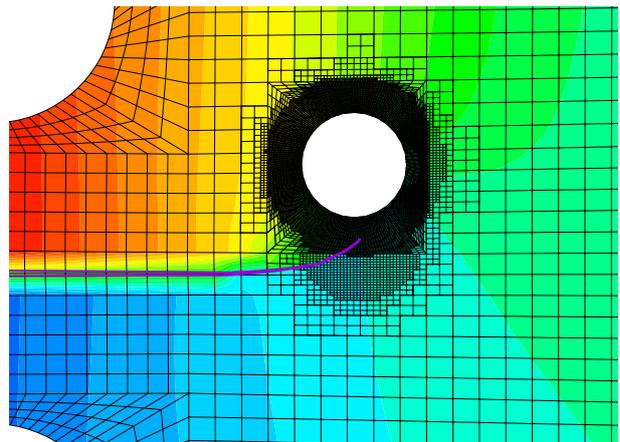
CT en 304L - Effet du niveau de chargement : L'effet du niveau de chargement a aussi été étudié sur la géométrie 1 en comparant les résultats obtenus pour des efforts $F_{\max} = 10$ et 30 kN (figure 42).

Pour le chargement faible, le trajet est bien prédit par le modèle, mais l'ouverture semble surestimée.

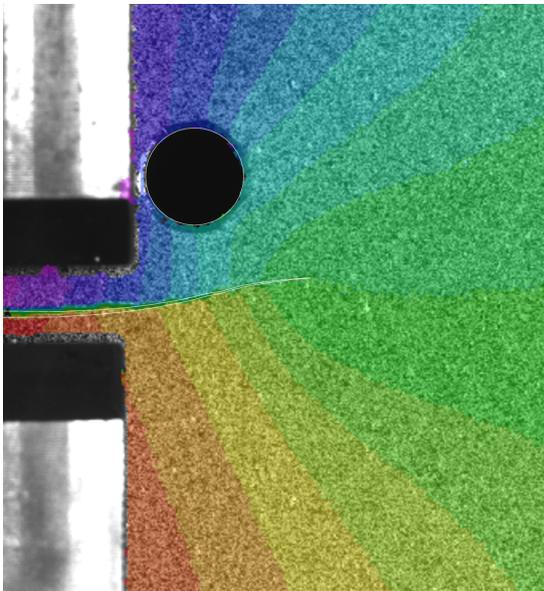
Au contraire, pour le chargement élevé, l'ouverture calculée est en-deçà des observations expérimentales. De plus, le brusque changement de direction de la fissure en direction du trou n'est pas prédite par le modèle. Une hypothèse de déchirure ductile a été levée par des observations au MEB. Ces constatations motivent le besoin d'une plus grande compréhension des phénomènes de fatigue pour une meilleure modélisation de ce mode de rupture.



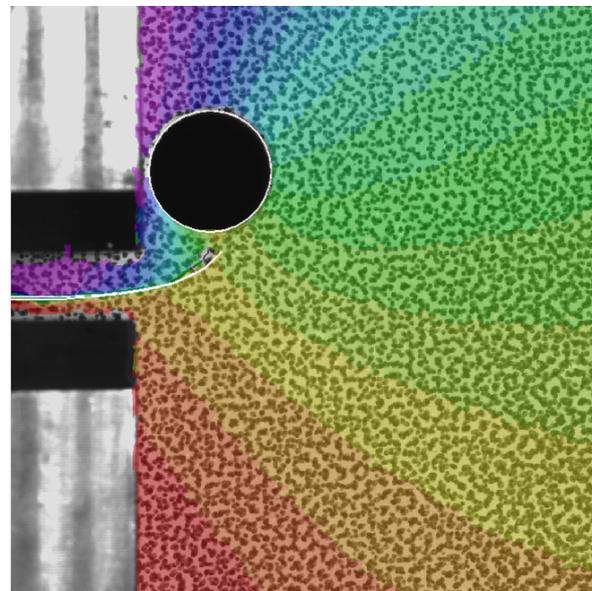
(a) Géométrie 1 : trajet de fissuration calculé (pas 134)



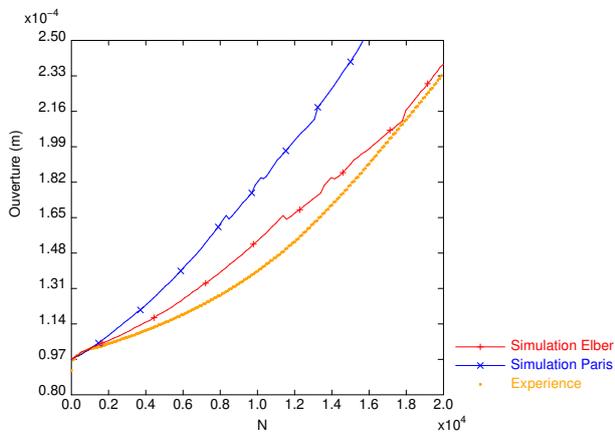
(b) Géométrie 2 : trajet de fissuration calculé (pas 92)



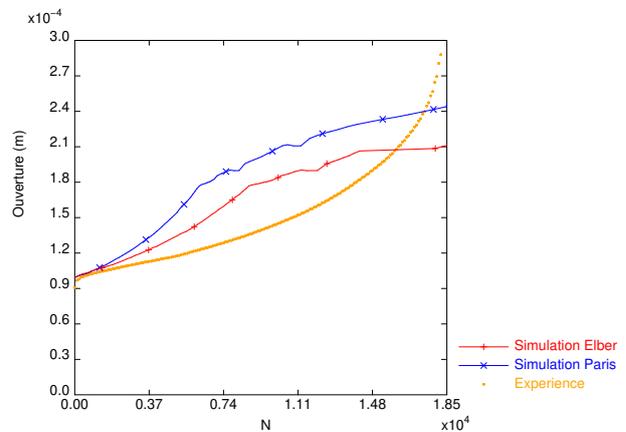
(c) Géométrie 1 : trajet de fissuration calculé (en blanc, pas 134) superposé à la corrélation d'image expérimentale ($-u_y$ en couleur, cycle 27475)



(d) Géométrie 2 : trajet de fissuration calculé (en blanc, pas 92) superposé à la corrélation d'image expérimentale ($-u_y$ en couleur)

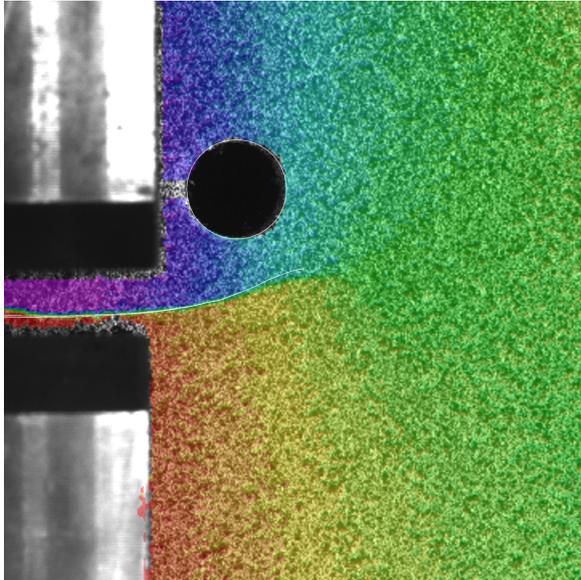


(e) Géométrie 1 : Ouverture en fonction du nombre de cycle

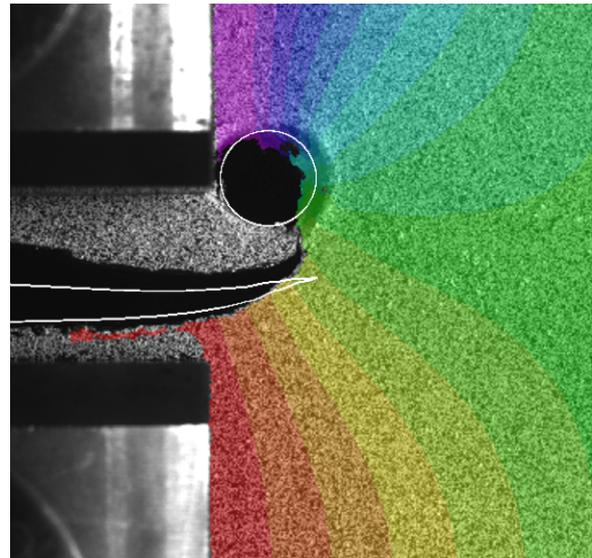


(f) Géométrie 2 : Ouverture en fonction du nombre de cycle

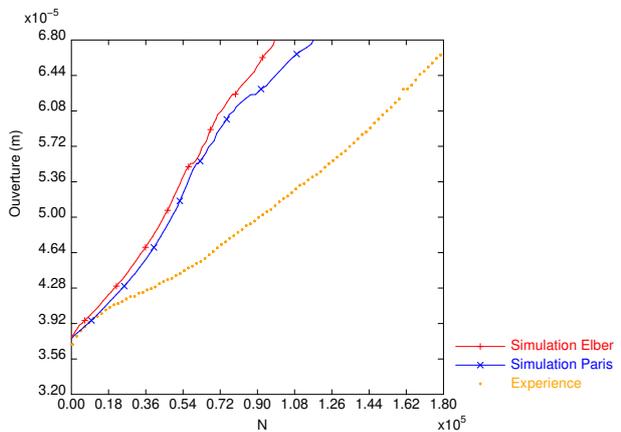
Figure 41 – Comparaison calculs/essais sur deux cas de propagation par fatigue de CT trouées



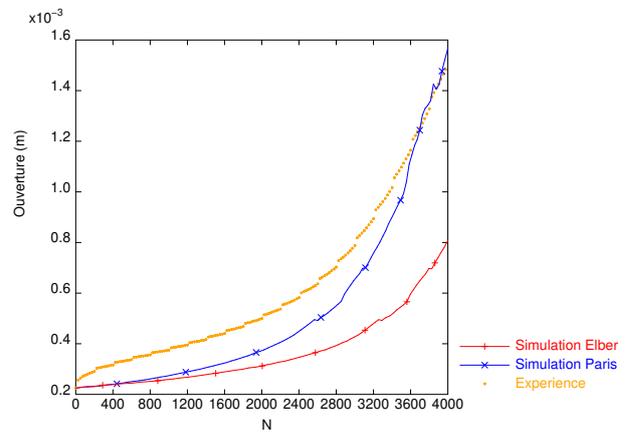
(a) $F_{max} = 10 \text{ kN}$: trajet de fissuration calculé (en blanc, pas 128) superposé à la corrélation d'image expérimentale ($-u_y$ en couleur, cycle 40200)



(b) $F_{max} = 30 \text{ kN}$: trajet de fissuration calculé (en blanc, pas 109) superposé à la corrélation d'image expérimentale ($-u_y$ en couleur, cycle 5859)



(c) $F_{max} = 10 \text{ kN}$: Ouverture en fonction du nombre de cycle



(d) $F_{max} = 30 \text{ kN}$: Ouverture en fonction du nombre de cycle

Figure 42 – Comparaison calculs/essais sur deux cas de propagation par fatigue de CT trouées

3.5 Conclusions du chapitre et perspectives

Afin de modéliser la propagation de fissure, j'ai initié puis contribué à la mise en place effective dans Cast3M de la méthode XFEM. Son objectif premier est de simplifier pour l'ingénieur la modélisation éléments finis de ce type de problème. Son application à de nombreux cas (rupture fragile en dynamique, fretting-fatigue, couplage avec un modèle d'endommagement par le biais de zones cohésive, fatigue) a été réalisée avec succès, même si des questions restent souvent ouvertes sur la bonne modélisation du comportement du matériau et l'identification de la loi de propagation.

Les premiers développements pour permettre son couplage avec un raffinement hiérarchique de maillage ont fournis des résultats prometteurs car cette combinaison rend la méthode :

- précise (la finesse de maillage adéquate peut être utilisée),
- performante (le temps de calcul est réduit par un remaillage simple),
- générale (la discrétisation reste orthogonale aux équations de la physique permettant son application à d'autres domaines voisins aisée),
- et robuste (il s'agit de concepts simples qu'on peut donc facilement contrôler).

Cependant, certains points pourraient encore être améliorés comme :

- La représentation et la mise à jour de la fissure :
 Dans Cast3M, la stratégie explicite/implicite implique que l'avancée de fissure est synonyme d'extension du maillage, ce qui peut conduire à des difficultés lorsque les géométries sont complexes (en présence de frontières courbes ou de trous par exemple). A contrario, l'utilisation d'une représentation implicite seule ne fournit pas le support nécessaire au traitement des modèles cohésifs et du contact-frottant. A terme, une meilleure association entre ces deux représentations devrait être envisagée. L'utilisation de la *Marching cubes* a été implémentée en ce sens pour permettre le passage implicite vers explicite, mais il faudrait l'améliorer pour qu'elle soit cohérente avec les éléments de fissure déjà existants.
 Dans Europlexus, malgré la stratégie robuste d'actualisation des fonctions de niveau par des considérations géométriques, des instabilités ont été identifiées en fin de propagation. Elles pourraient aussi être dues au critère de propagation utilisé et ce point mériterait de plus amples investigations.
- Règle d'intégration :
 Une approche pragmatique a été adoptée pour permettre d'intégrer les fonctions non-polynomiales de la méthode XFEM de manière homogène à ce qui existe pour les éléments classiques. Elle permet de traiter les comportements non-linéaires simplement et évite au passage certains problèmes de conditionnement qui peuvent surgir avec d'autres méthodes. Néanmoins, cela se fait au prix d'une précision moyenne pour un coût de calcul assez élevé (typiquement 64 points de Gauss sont utilisés pour un quadrangle linéaire et pour un hexaèdre linéaire). Ce point peut devenir bloquant pour des calculs tridimensionnels.
 Deux voies d'amélioration sont possibles : trouver une autre méthode d'intégration plus efficace, ou améliorer l'efficacité informatique de la méthode en place (réécriture des algorithmes, vectorisation et parallélisation de certaines étapes).
- Critères de propagation en 3D :
 La précision dans le calcul des critères de propagation (basés sur les facteurs d'intensité des contraintes, sur le taux de restitution d'énergie ou sur une mesure des contraintes) peut vite devenir problématique en 3D. Ainsi, il est courant, même dans le cadre éléments finis standards, de "lisser" les valeurs calculées le long du front afin d'avoir une avancée régulière de la fissure. Cela est d'autant plus vrai avec la XFEM car la non-conformité du maillage avec la fissure induit une source d'erreur supplémentaire.
- Robustesse du code :
 Enfin, la diffusion et l'utilisation effective des méthodes développées dans des études courantes est conditionnée par la qualité du code implémenté (absence d'anomalie) et sa facilité d'utilisation (documentation, exemples, support). Ainsi, je prévois une action de rénovation du raffinement hiérarchique très prochainement afin de conserver les informations d'appariement entre les maillages \mathcal{M}^{n-1} et \mathcal{M}^n

dans le but d'améliorer les performances de la projection de champs. Cela sera l'occasion aussi de mieux documenter la méthode et de la tester sur un plus grand nombre de cas motivés par d'autres physiques (soudage, fabrication additive, usure par fretting, etc.) où l'on a besoin d'une description fine dans une zone dont le lieu évolue avec le temps.

3.6 Bibliographie du chapitre

- [40] M. F. Kanninen and C. L. Popelar. Advanced fracture mechanics. 1985.
- [41] T. Belytschko, B. L. Wong, and E. J. Plaskacz. Fission-fusion adaptivity in finite elements for nonlinear dynamics of shells. *Computers & structures*, 33(5) :1307–1323, 1989.
- [42] M. Ortiz and J. Quigley IV. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90(1-3) :781–804, 1991.
- [43] N.-S. Lee and K.-J. Bathe. Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 16(2) :99–139, 1994.
- [44] D. Perić, C. Hochard, M. Dutko, and D. Owen. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137(3-4) :331–344, 1996.
- [45] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5) :601–620, 1999.
- [46] S. Marie. *Approche énergétique de la déchirure ductile*. PhD thesis, ENSMA Poitiers, 1999.
- [47] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1) :131–150, 1999.
- [48] P. Breitkopf, A. Rassineux, and P. Villon. An introduction to moving least squares meshfree methods. *Revue européenne des éléments finis*, 11(7-8) :825–867, 2002.
- [49] A. Gravouil, N. Moës, and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. part ii : Level set update. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 53(11) :2569–2586, 2002.
- [50] N. Moës, A. Gravouil, and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part I : Mechanical model. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 53(11) :2549–2568, 2002.
- [51] T. Elguedj, A. Gravouil, and A. Combescure. Appropriate extended functions for x-fem simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(7-8) :501–515, 2006.
- [52] J. Mediavilla, R. Peerlings, and M. Geers. A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations. *Computers & structures*, 84(8-9) :604–623, 2006.
- [53] T. Menouillard, J. Rethore, A. Combescure, and H. Bung. Efficient explicit time stepping for the extended finite element method (x-fem). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(9) :911–939, 2006.
- [54] M. Duflot. A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(11) :1261–1302, 2007.
- [55] T. Menouillard. *Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2007.
- [56] D. Brancherie, P. Villon, and A. Ibrahimbegovic. On a consistent field transfer in non linear inelastic analysis and ultimate load computation. *Computational Mechanics*, 42(2) :213–226, 2008.
- [57] D. Grégoire. *Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2008.
- [58] T. Menouillard, J. Rethore, N. Moës, A. Combescure, and H. Bung. Mass lumping strategies for x-fem explicit dynamics : application to crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(3) :447–474, 2008.
- [59] T. Elguedj, A. Gravouil, and H. Maigre. An explicit dynamics extended finite element method. Part 1 : Mass lumping for arbitrary enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(30-32) :2297–2317, Jun 2009.
- [60] D. Grégoire, H. Maigre, and A. Combescure. New experimental and numerical techniques to study the arrest and the restart of a crack under impact in transparent materials. *International Journal of Solids and Structures*, 46(18) :3480–3491, 2009.

- [61] A. J. Pons and A. Karma. Helical crack-front instability in mixed-mode fracture. *Nature*, 464(7285) :85, 2010.
- [62] A. Simatos. *Méthode XFEM pour la Modélisation de grandes propagations de fissure en déchirure ductile*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2010.
- [63] A. Simatos, S. Marie, A. Combescure, and F. Cazes. Modelling ductile tearing from diffuse plasticity to crack propagation. In *ASME 2010 Pressure Vessels and Piping Division/K-PVP Conference*, pages 421–434. American Society of Mechanical Engineers, 2010.
- [64] A. Berard. *Transferts de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2011.
- [65] D. Colombo and P. Massin. Fast and robust level set update for 3D non-planar X-FEM crack propagation modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(25) :2160–2180, 2011.
- [66] T.-P. Fries, A. Byfut, A. Alizada, K. W. Cheng, and A. Schröder. Hanging nodes and x fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(4-5) :404–430, 2011.
- [67] D. Haboussa. *Modélisation de la transition traction-cisaillement des métaux sous choc par la X-FEM*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2012.
- [68] B. Trollé, A. Gravouil, M.-C. Baietto, and T. Nguyen-Tajan. Optimization of a stabilized x-fem formulation for frictional cracks. *Finite elements in analysis and design*, 59 :18–27, 2012.
- [69] R. Pelée de Saint Maurice. *Extension de l’approche X-FEM en dynamique rapide pour la propagation tridimensionnelle de fissure dans des matériaux ductiles*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2014.
- [70] B. Trollé. *Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2014.
- [71] A. Bousquet. *Critère de propagation et d’arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. PhD thesis, Centrale Paris, 2015.
- [72] J.-B. Leblond, V. Lazarus, and A. Karma. Multiscale cohesive zone model for propagation of segmented crack fronts in mode I+III fracture. *International Journal of Fracture*, 191(1-2) :167, February 2015.
- [73] X. Y. Yang. *Prédiction de propagation et d’arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP (16MND5) sous choc thermique*. PhD thesis, Centrale Paris, 2015.
- [74] R. Langlois, M. Coret, and J. Rethore. Fatigue Crack Propagation Benchmark, GDR 3651 FATA-CRACK, 2018.
- [75] G. Gibert. *Propagation de fissures en fatigue par une approche X-FEM avec raffinement automatique de maillage*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2019.
- [76] T. L. Anderson. *Fracture mechanics : fundamentals and applications*. CRC press, 2017.
- [77] H. D. Bui. *Fracture mechanics : inverse problems and solutions*. Springer, 2006.

Chapitre 4

Analyse vibratoire efficace de systèmes non-linéaires

Sommaire du chapitre 4

4.1	Introduction	54
4.2	Quelques éléments sur l'analyse linéaire des machines tournantes	54
4.2.1	Contexte industriel	54
4.2.2	Modélisation par éléments de poutre dans le repère fixe	55
4.2.3	Modélisation par éléments massifs et de coques dans le repère tournant	56
4.2.4	Prise en compte des supports	59
4.2.5	Intégration temporelle	61
4.3	Analyse "classique" des vibrations des tubes de générateur de vapeur	64
4.3.1	Problématique industrielle	64
4.3.2	Modèle numérique et réponse par intégration temporelle	64
4.3.3	Exemple d'étude	67
4.4	Méthodes d'équilibrage harmonique et de continuation	70
4.4.1	Discrétisation fréquentielle	70
4.4.2	Bascule temps-fréquence	71
4.4.3	Méthode de continuation	71
4.4.4	Stabilité	73
4.5	Détection et suivi de bifurcations	74
4.5.1	Détection de bifurcations	74
4.5.2	Branchement depuis une bifurcation	76
4.5.3	Suivi de bifurcations	76
4.6	Applications	77
4.6.1	Contact rotor/stator	77
4.6.2	Oscillateur à choc non-linéaire (Koala)	79
4.6.3	Couplage fluide-élastique (TGV-ICE)	83
4.7	Conclusions du chapitre	88
4.8	Bibliographie du chapitre	89

4.1 Introduction

Comme expliqué au § 2.3, j'ai en charge le développement de deux outils-métiers Cast3M (BRASERO et GERBOISE) traitant respectivement de l'analyse dynamique des machines tournantes dans le repère tournant et des vibrations des tubes de GV. Dans les deux prochaines sections, je donne un aperçu des fonctionnalités de ces deux codes, et des démarches d'analyses habituellement adoptées dans les projets de R&D à finalités industrielles pour lesquelles ils sont développés.

Un rapide bilan est ensuite dressé et les possibilités d'analyse faisant défaut à ce jour sont identifiées.

Les sections suivantes exposent une méthode d'analyse complémentaire, basée sur une approximation fréquentielle de la réponse. On y résume les travaux de thèses de Lihan Xie [114] et Roberto Alcorta [131] réalisées au CEA en collaboration avec Sébastien Baguet du LaMCoS. Plus précisément, on y explique les principes de base de l'équilibrage harmonique, de l'alternance temps-fréquence et du calcul par continuation. Puis, la détection et le suivi des bifurcations sont mis en avant comme de nouveaux outils permettant de "cartographier" les régimes dynamiques possibles d'un système. Enfin des exemples d'applications illustrent les capacités des méthodes développées.

4.2 Quelques éléments sur l'analyse linéaire des machines tournantes

4.2.1 Contexte industriel

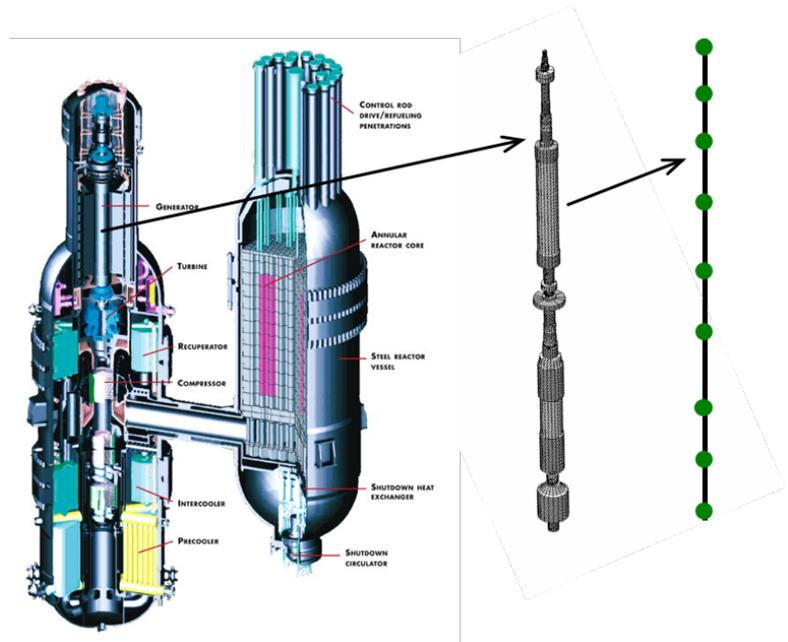
On retrouve les machines tournantes dans bon nombre de composants dont quelques exemples de l'industrie énergétique sont donnés figure 43. Elles se caractérisent par une grande quantité d'énergie cinétique disponible, et donc, par conséquent, une exigence de sûreté vis à vis du risque vibratoire à prendre en compte dès la conception.



(a) Turbo-alternateur de centrale nucléaire



(b) Pompe électromagnétique de débit en sodium



(c) Turbo-compresseur d'un réacteur de type GTMHR (Gas Turbine Modular Helium Reactor modélisé par des éléments de poutre)

Figure 43 – Exemples de machines tournantes industrielles

4.2.2 Modélisation par éléments de poutre dans le repère fixe

De par leur géométrie concentrée au voisinage de l'axe de rotation, un grand nombre de machines tournantes peuvent être traitées à l'aide d'éléments de poutre (cf. figure 43c). Cette modélisation est celle décrite dans [126] et adoptée dans de nombreux codes (ROTORINSA, CADYRO, DYNROT et aussi Cast3M).

Les équations d'équilibre dynamique peuvent s'obtenir :

- en considérant le vecteur rotation $\underline{\Omega}$ entre le repère de la poutre et le repère Galiléen,
- en calculant l'énergie cinétique $W^{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\underline{\Omega}^T \cdot \underline{I} \cdot \underline{\Omega}$,
- en linéarisant cette expression en tenant compte des "petits" angles,
- et en utilisant les équations de Lagrange.

In fine, les vibrations d'un rotor modélisé dans le repère fixe par des éléments de poutre obéissent à l'équation différentielle discrétisée :

$$M \{\ddot{u}\} + [C + \Omega G] \{\dot{u}\} + [K + H] \{u\} = \{F\} \quad (34)$$

où G est la matrice gyroscopique, antisymétrique et couplant les rotations dans les directions orthogonales et H est la matrice d'amortissement corotatif, issue du passage dans le repère fixe des forces visqueuses associées au rotor.

L'étude des modes propres d'un système permet de caractériser sa dynamique vibratoire. Dans le cas des machines tournantes, on note que l'équation homogène associée à (34) conduit à une base de modes propres Ω -dépendants et complexes¹ :

$$\{u(t)\} = \{\phi\} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi = \phi_R + i\phi_I \\ \omega = \omega_R + i\omega_I \end{cases} \quad (35)$$

Pour simplifier, l'amortissement introduit une composante imaginaire à la fréquence (càd un taux de décroissance du mouvement) et le terme gyroscopique une déformée modale complexe, dont la direction n'est pas nécessairement fixe et peut "tourner" dans un mouvement de précession direct ou inverse. Le tracé de l'évolution des fréquences propres complexes avec la vitesse de rotation constitue le diagramme de Campbell dont un exemple est donné figure 44a.

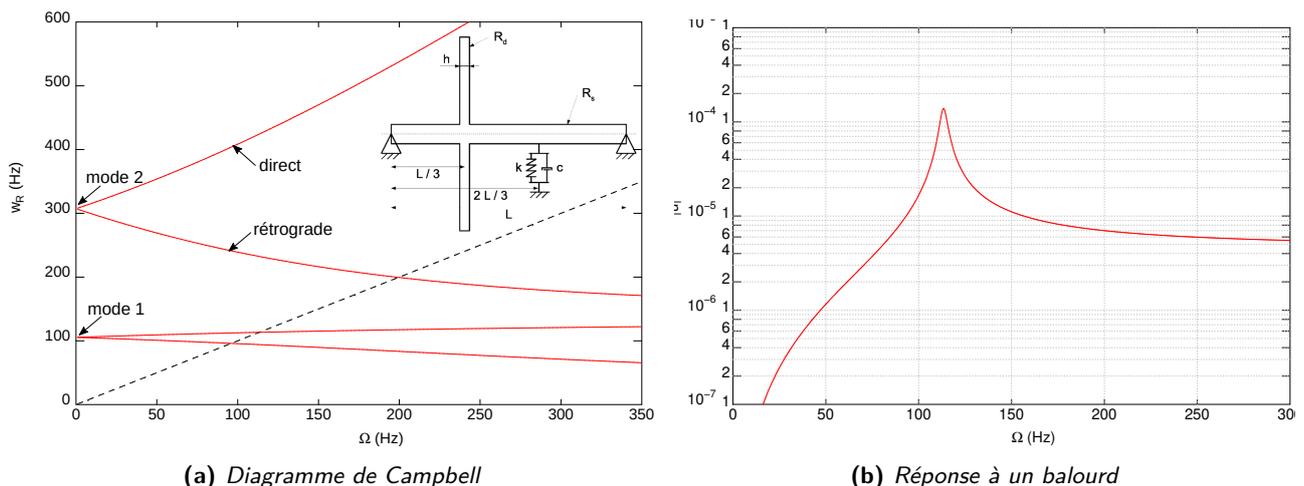


Figure 44 – Analyse d'un rotor simple appuyé-appuyé avec un palier intermédiaire

Lors des études de conception des analyses de réponses à des chargements harmoniques sont classiquement réalisées, comme celui de balourd (cf. figure 44b) qui correspond à un défaut de répartition de masse et conduit à une excitation tournant à la vitesse Ω .

1. On notera en **gras** les grandeurs complexes

4.2.3 Modélisation par éléments massifs et de coques dans le repère tournant

Pour certaines structures tournantes, la flexibilité des éléments (disques, tubes, etc.) ou leur non-axisymétrie (cas des pales) fait que la modélisation par éléments de poutre n'est plus valide. Le diagramme de Campbell obtenu avec un modèle 3D et un modèle axisymétrique 2D Fourier pour l'exemple de rotor simple exposé précédemment est tracé figure 45. Il montre que le mode de disque est évidemment mal reproduit avec la cinématique de poutre et que le mode rétrograde de flexion de l'arbre est fortement influencé par la flexibilité du disque. Ces observations justifient l'utilisation d'une cinématique plus "riche".

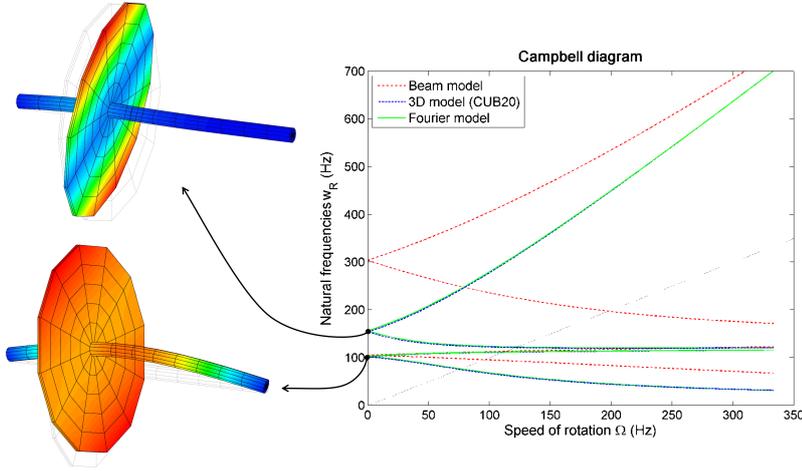


Figure 45 – Analyse d'un rotor simple
(modes réels à gauche et diagramme de Campbell à droite pour 3 modélisations)

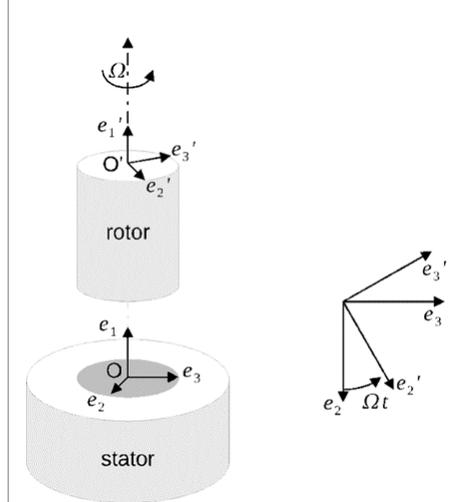


Figure 46 – Repères fixe et tournants

On considère une structure tournante décrite dans le repère tournant $\mathcal{R}'(O', e'_1, e'_2, e'_3)$ représenté figure 46 (le repère fixe étant noté $\mathcal{R}(O, e_1, e_2, e_3)$). La position de tout point P est donnée par ses coordonnées dans le repère tournant ou fixe :

$$\begin{aligned} \underline{O'P} = \underline{x} &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= [e](x) = [e'](x') = [e][R](x') \end{aligned} \quad (36)$$

où $[R]$ est la matrice de rotation :

$$[R] = \begin{bmatrix} (e'_1) & (e'_2) & (e'_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ 0 & \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (37)$$

La position finale (après déplacement) vaut :

$$\begin{aligned} \underline{y} = \underline{OP} &= \underline{OO'} + \underline{O'P} = \underline{s} + (\underline{x} + \underline{u}) \\ &= [e](s) + [e'](x' + u') \end{aligned} \quad (38)$$

En dérivant et en utilisant la formule de la base mobile², on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}} &= \dot{\underline{s}} + \frac{d}{dt}(\underline{x} + \underline{u}) = \dot{\underline{s}} + [e'](\dot{u}') + [e'][\Omega \wedge](x' + u') \\ (\dot{y}) &= (\dot{s}) + [R](\dot{u}') + [R][\Omega \wedge](x' + u') \end{aligned} \quad (39)$$

2. $\dot{e}'_j = \underline{\Omega} \wedge e'_j$ soit $\frac{d[e']}{dt} = \underline{\Omega} \wedge [e'] = [e'][\Omega \wedge]$

puis, de la même façon :

$$(\ddot{y}) = (\ddot{s}) + [R](\ddot{u}') + [R][2\Omega \wedge](\dot{u}') + [R][\dot{\Omega} \wedge](x' + u') + [R][\Omega \wedge \Omega \wedge](x' + u') \quad (40)$$

Injectant cette expression dans le Principe des Puissances Virtuelles :

$$\begin{aligned} \forall \underline{v} \in V^0 = \{ \underline{v}, \text{ tel que } \underline{v} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{D}_u \} \\ \int_{\mathcal{D}} \rho \ddot{\underline{y}} \cdot \underline{v} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{f}}_d \cdot \underline{v} d\mathcal{D} + \int_{\partial \mathcal{D}_F} \underline{\underline{E}}_d \cdot \underline{v} d\Gamma \end{aligned} \quad (41)$$

on obtient après discrétisation l'équilibre dynamique :

$$\begin{aligned} M \{ \ddot{u}' \} + [\rho \dot{\Omega} \wedge + \rho \Omega \wedge \Omega \wedge] \{ u' \} + \rho 2\Omega \wedge \{ \dot{u}' \} + C_{visc} \{ \dot{u}' \} + \{ F'_{int} \} \\ = \{ F'_{ext} \} - M \{ \ddot{s}' \} - [\rho \dot{\Omega} \wedge + \rho \Omega \wedge \Omega \wedge] \{ x' \} \end{aligned} \quad (42)$$

où apparaissent les termes d'**Euler**, **centrifuges** et de **Coriolis**.

On note qu'à vitesse de rotation constante (hypothèse la plus commune), le premier terme disparaît, que l'effet centrifuge est déstabilisant (la force augmente avec le déplacement) et que Coriolis est le pendant de l'effet gyroscopique dans le repère tournant.

Par ailleurs, l'analyse est conduite en 2 étapes représentées figure 47 :

1. Un équilibre stationnaire sous chargement centrifuge est d'abord recherché.
2. Les vibrations sont ensuite considérées comme un état dynamique issu d'une perturbation autour de la précédente solution.

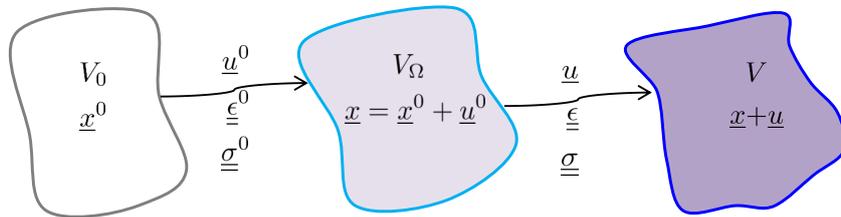


Figure 47 – Etat initial, préchargé par les forces centrifuges et vibratoire

En toute rigueur, la première étape devrait être conduite sous l'hypothèse de grands déplacements à cause des efforts centrifuges suiveurs, mais on constate dans la plupart des cas que l'approximation $F_{cent} = -\Omega \wedge \Omega \wedge x \simeq -\Omega \wedge \Omega \wedge x^0$ est valide et permet d'obtenir l'état précontraint en une unique résolution linéaire, ce qui est très économique. Cette linéarité a un second avantage. En effet, la perturbation des forces internes fait apparaître un terme de raideur géométrique $K_{geo}(\underline{\underline{\sigma}}^0) \{ u' \}$ proportionnel à Ω^2 puisque la force centrifuge et donc les contraintes σ^0 qui l'équilibrent le sont. Ce terme est donc également calculé une seule fois est ajouté à la raideur centrifuge.

La seconde étape est résolue par l'opérateur VIBR de Cast3M dont j'assure le maintien et le développement. Une force du code BRASERO développé dans Cast3M réside dans sa capacité de **modélisation en 2D Fourier**. En effet, celle-ci permet de traiter les géométries de révolution pour un coût très faible. Le maillage est réalisé dans le plan (r, z) (repère cylindrique) et la discrétisation du déplacement obéit au développement en série de Fourier suivant :

$$\begin{aligned} \underline{u}(r, z, \theta) &= \sum_n \underline{u}^{cn}(r, z, \theta) \cos(n\theta) + \underline{u}^{sn}(r, z, \theta) \sin(n\theta) \\ &= \begin{bmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_z & \underline{e}_\theta \end{bmatrix} \cdot \sum_n \begin{bmatrix} N^{sym n} & N^{anti n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{sym n} \\ u^{anti n} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\text{où } N^{\text{sym } n} = \begin{bmatrix} N_i(r, z) \cos(n\theta) & 0 & 0 \\ \dots & 0 & N_i(r, z) \cos(n\theta) & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & N_i(r, z) \sin(n\theta) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } N^{\text{anti } n} = \begin{bmatrix} N_i(r, z) \sin(n\theta) & 0 & 0 \\ \dots & 0 & N_i(r, z) \sin(n\theta) & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & N_i(r, z) \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

Le choix des harmoniques et l'interprétation des résultats implique une bonne compréhension de la physique en jeu. Dans le cas des rotors, les harmoniques 0, 1 et 2 sont généralement suffisantes comme le montre l'analyse d'un tube en rotation (exemple tiré de [132]) sur la figure 48 où a été adoptée pour le diagramme de Campbell la convention sur le signe de la fréquence propre :

$$\begin{cases} \omega_R > 0 & \Leftrightarrow \text{mouvement direct} \\ \omega_R < 0 & \Leftrightarrow \text{mouvement rétrograde} \end{cases} \quad (44)$$

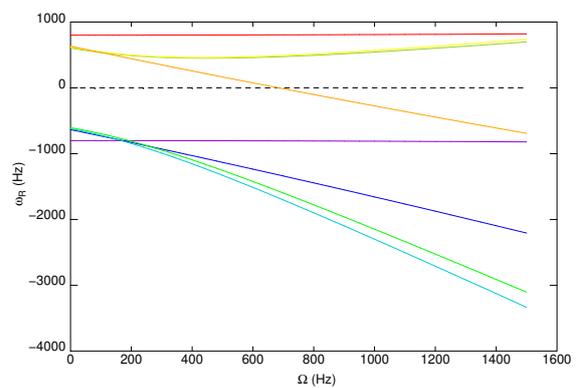
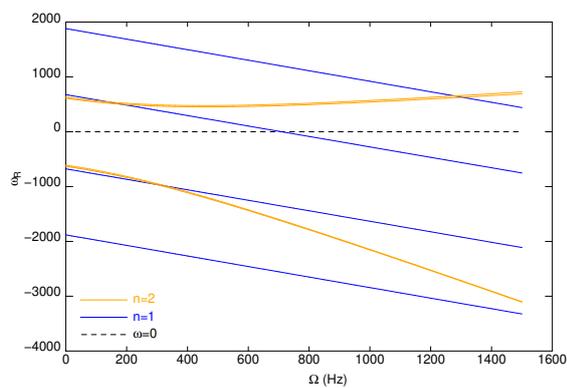
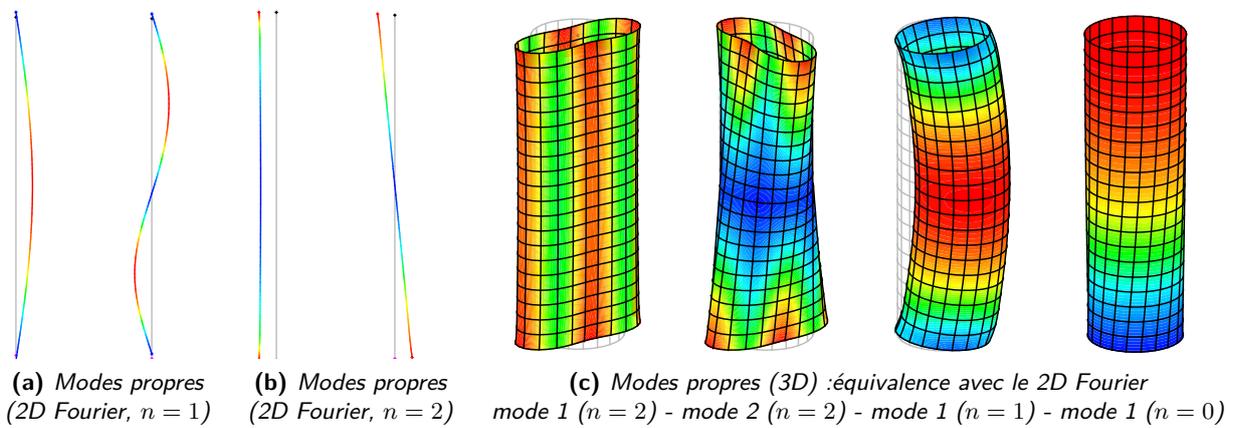


Figure 48 – Analyse d'un tube tournant

4.2.4 Prise en compte des supports

La difficulté à prendre en compte l'influence des parties non tournantes dans le modèle dépend :

- de la modélisation retenue pour le rotor (poutre, 2D Fourier ou 3D),
- du niveau d'approximation du support (parfaitement rigide, simple appui linéaire ou pas, structure complexe avec sa propre discrétisation),
- de la complexité du modèle (axisymétrique ou anisotrope, linéaire ou non) et de la réponse recherchée (périodique, quasi-périodique, transitoire, etc.)

Cas d'une modélisation dans le repère fixe : Dans le cas d'utilisation d'éléments poutre pour décrire le rotor, la liaison cinématique avec le stator s'écrit naturellement car les deux composants appartiennent au même repère (fixe). Il suffit donc d'ajouter cette relation cinématique aux équations dynamiques des parties tournantes et non-tournantes quelque soit la complexité du modèle de support. Toutes les analyses (modales, harmoniques ou temporelles) peuvent être réalisées sans difficulté particulière.

Cas d'un rotor axisymétrique modélisé dans le repère tournant : Le couplage du support décrit dans le repère fixe à un rotor décrit dans le repère tournant peut être plus complexe car la liaison est dans ce cas dépendante du temps :

$$(u(t)) = [R(\Omega t)] \cdot (u'(t)) \quad (45)$$

Pour des systèmes axisymétriques linéaires, tout mouvement est une somme de mouvements mono-harmoniques qui se transfèrent directement d'un repère à l'autre (choix réalisé par exemple dans [103]). En adoptant la convention (44), on montre que la fréquence apparente dans le repère fixe ω est simplement relié à la fréquence dans le repère tournant ω' par :

$$\omega = \omega' + n\Omega \quad (46)$$

où n est l'harmonique de Fourier considérée dans la liaison rotor/stator.

Si une modélisation **2D Fourier** est utilisée, on peut de plus poser le changement de variable :

$$\theta = \theta' + \Omega t \quad (47)$$

permettant d'avoir l'équation de liaison :

$$(u) = (u') \quad (48)$$

et il ne reste qu'à ajouter des termes convectifs à l'équation d'équilibre, puisque la dérivée vaut :

$$\dot{\mathbf{u}}'(r, z, \theta', t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}' e^{-in\theta' + i\omega' t} = i(\omega - n\Omega) \mathbf{u}' e^{-in\theta' + i\omega' t} \quad (49)$$

Cas d'un rotor tridimensionnel modélisé dans le repère tournant : Lorsque le rotor n'est plus axisymétrique, seule une modélisation tridimensionnelle permet de le décrire. Le changement de variable évoqué en 2D Fourier est alors impossible et il faut considérer le mouvement dans sa généralité. Les équations du système (en particulier (45)) montrent qu'il s'agit d'un oscillateur paramétrique. La théorie de Floquet permet alors d'écrire la solution comme la somme des termes élémentaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\text{sta}}(x, t) &= \sum_j \mathbf{u}^j(x) \cdot e^{i(\omega + 2j\Omega)t} \\ \mathbf{u}^{\text{rot}}(x', t) &= \sum_{j'} \mathbf{u}^{j'}(x') \cdot e^{i(\omega' + 2j'\Omega)t} \end{aligned} \quad (50)$$

dans le cas où la périodicité du "défaut" considéré est $\frac{1}{2\Omega}$. Ce type de modélisation était au coeur de la thèse d'Arnaud Lazarus [104, 3] dont on propose ci-après quelques résultats.

La méthodologie permettant d'appliquer la liaison rotor/stator à un modèle éléments finis 3D implique les étapes suivantes :

1. Calcul des coefficients $n = 0$ (translation rigide) du développement en série de Fourier de θ et θ' du déplacement sur les cercles respectifs du stator et du rotor à connecter dont une représentation du maillage est donnée figure 49. L'expression pour le stator est (expression analogue pour le rotor) :

$$\mathbf{u}^{\text{sta}}(x_C, t) \simeq \sum_n \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{cn} \\ \mathbf{u}_2^{cn} \\ \mathbf{u}_3^{cn} \end{pmatrix} \cos n\theta + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{sn} \\ \mathbf{u}_2^{sn} \\ \mathbf{u}_3^{sn} \end{pmatrix} \sin n\theta \cdot e^{i\omega t} \quad (51)$$

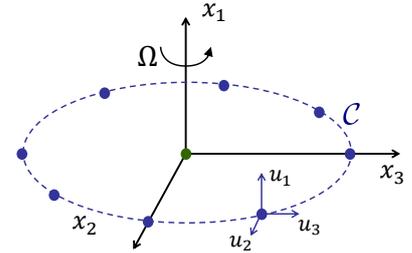


Figure 49 – Cercle sur lequel est identifié le déplacement de Fourier équivalent

2. Le déplacement moyen (et donc indépendant des coordonnées) du rotor est ensuite exprimé dans le repère fixe en identifiant les mouvements axiaux, directs et rétrogrades (indices respectifs A, F et B) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{\text{rot}}(x_C, t) &\simeq [\underline{e}][R(\Omega t)] \sum_{j'} (\mathbf{u}^{j'}) \cdot e^{i(\omega' + 2j'\Omega)t} \\ &\simeq [\underline{e}] \sum_{j'} (\mathbf{u}_A^{j'}) e^{i(\omega' + 2j'\Omega)t} + (\mathbf{u}_F^{j'}) e^{i(\omega' + (2j'+1)\Omega)t} + (\mathbf{u}_B^{j'}) e^{i(\omega' + (2j'-1)\Omega)t} \end{aligned} \quad (52)$$

3. On utilise enfin la relation (46) dans l'expression précédente pour évaluer les mouvements du stator et du rotor :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_F^j) &= (\mathbf{u}_F^{j'}) \quad \text{pour } j = j' \\ (\mathbf{u}_B^j) &= (\mathbf{u}_B^{j'}) \quad \text{pour } j = j' - 1 \end{aligned} \quad (53)$$

Une fois cette liaison rotor/stator écrite, le problème peut être résolu dans le domaine fréquentiel en identifiant les harmoniques en jeu $j = -j_{\text{max}} \dots + j_{\text{max}}$. Comme détaillé dans [3], la sous-structuration permet de réduire efficacement la cinématique de $\mathbf{u}^j(x)$ et $\mathbf{u}^{j'}(x)$ puisque la même base de réduction peut être utilisée pour chaque harmonique j et j' du stator et du rotor.

La comparaison calculs-essais d'un rotor anisotrope sur un stator isotrope (AI) et d'un rotor anisotrope sur un stator anisotrope (AA) représenté figure 50 est proposée ci-après. Les figures 51 et 52 montrent l'ensemble des résultats. Dans le cas AI, seules 2 valeurs de j sont nécessaires (voir [104, 122] pour plus de détails), alors que le nombre d'harmoniques est beaucoup plus conséquent dans le cas AA. On vérifie expérimentalement que leur contribution décroît bien avec la valeur de j , justifiant ainsi la troncature effectuée.

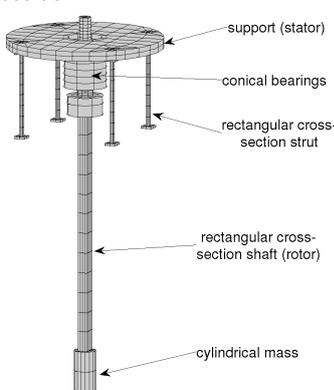
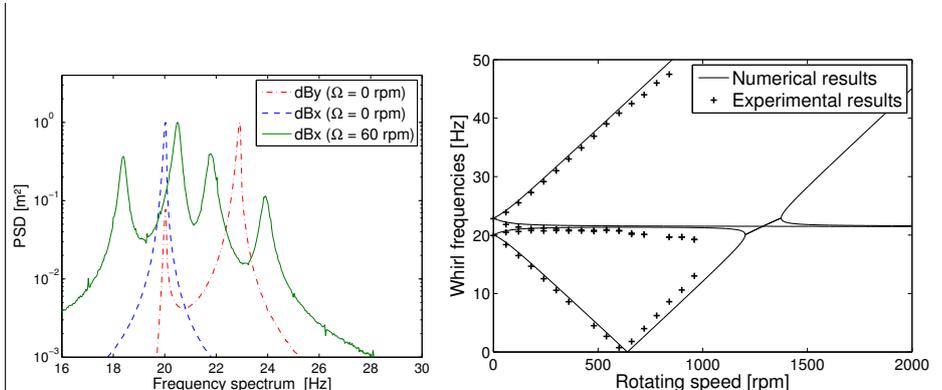


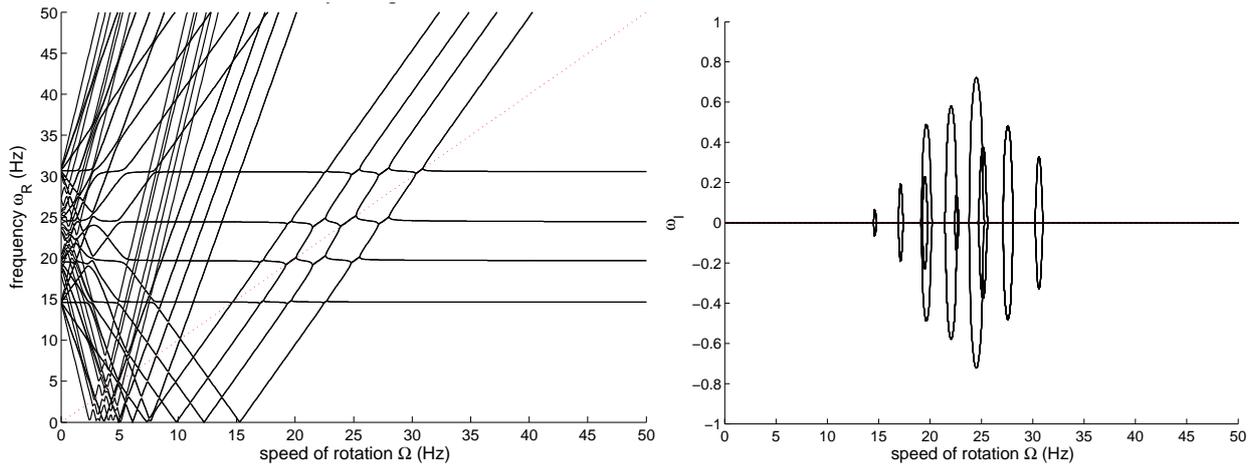
Figure 50 – Montage expérimental



a – DSP expérimentale

b – Diagramme de Campbell

Figure 51 – Configuration AI



(a) Diagramme de Campbell

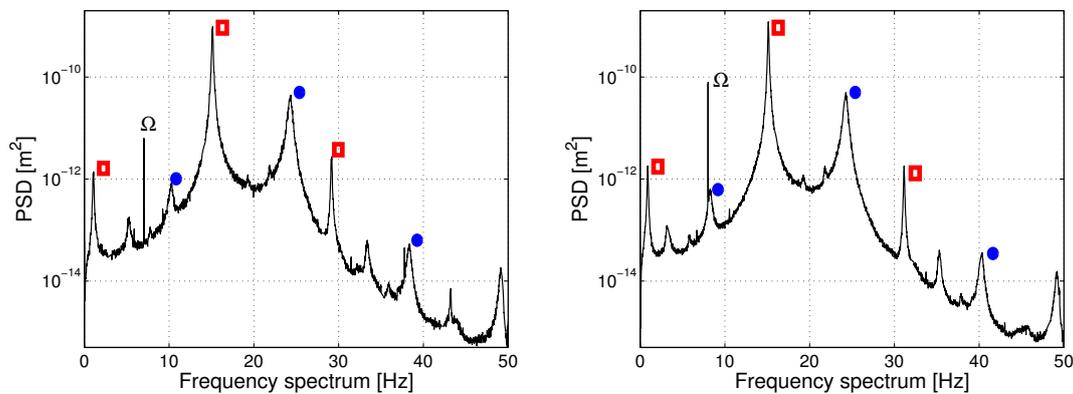
(b) DSP expérimentale à $\Omega = 7$ et 8 Hz

Figure 52 – Comparaison calculs-essais (configuration AA)

4.2.5 Intégration temporelle

Généralités : Les méthodes fréquentielles (modales, mono- et poly- harmoniques) exposées précédemment permettent d'obtenir la signature spectrale et la réponse forcée d'un système linéaire.

Des mouvements d'amplitudes finies aux niveaux des paliers (hydrodynamique, magnétiques ou amortisseurs de type *squeeze-film*) ou de potentiels contacts entre rotor et stator impliquent la prise en compte de non-linéarités dans le modèle.

Le moyen le plus "naturel" pour calculer une réponse de ce modèle consiste à réaliser une intégration temporelle du système. Cette méthode générale permet aussi de traiter le cas des transitoires (comme celui dû à un séisme par ex.). Les propriétés principales des deux grandes classes d'intégrateurs sont données tableau 1.

Implicite	Explicite
Relation implicite entre les 2 états	L'état $n + 1$ est directement fonction de l'état n
Système d'équations algébriques NL à résoudre	Seul \ddot{u}_{n+1} est déduit de F_{n+1}
Inconditionnellement stable (Δt grand)	Pas de temps de stabilité (Δt petit)
Phénomènes "lents" (séisme, vibrations basses fréquences)	Dynamique "rapide" (impact, explosion)

Table 1 – Propriétés des schémas d'intégration temporelle

Difficultés : Dans le papier [26] et la note reproduite en annexe B.2, on a montré que l'intégration temporelle appliquée aux systèmes tournants peut parfois amener quelques difficultés :

- L'imposition directe de la relation cinématique (45) entre rotor et stator par multiplicateur de Lagrange dans le schéma d'intégration temporelle inconditionnellement stable de l'accélération moyenne peut conduire à des instabilités numériques du même type que celles évoquées par [87]. Ce problème peut être résolu en utilisant un schéma avec dissipation numérique (HHT [81] ou α -généralisé [94]) mais au prix d'un "calage" de la dissipation numérique.
- L'utilisation d'un schéma explicite (différences centrées ou De Vogelaere) nécessite également des précautions, car l'opérateur classique utilisé pour calculer les accélérations est la matrice de masse M diagonalisée (*lumpée*) alors que l'opérateur à considérer est une combinaison de la masse et de l'amortissement ($[M + \frac{\Delta t}{2}C]$ pour les différences centrées).

Cependant, dans la plupart des cas, et en particulier lorsque le modèle du support est simple, on ne rencontre pas de problème à utiliser une méthode d'intégration temporelle pour obtenir la réponse d'un rotor comportant des non-linéarités comme on va l'illustrer ci-après avec les résultats de l'exemple tiré de la note en annexe B.2.

Exemple : On considère le cas d'un rotor rigide amorti par squeeze-film proposé par [100] et représenté figure 53a. Pour un jeu de paramètres donnés ($B = 0.015$, $W = 0.05$ et $S = 0.3$)³, l'auteur montre qu'en fonction de l'amplitude de la sollicitation de balourd (notée U), des régimes 1, 2, 4 - T -périodiques, quasi-périodiques et chaotiques peuvent être observés. On montre figure 53 qu'on arrive à retrouver ces régimes avec l'opérateur DYNE de Cast3M basé sur une intégration temporelle explicite.

3. $B = \frac{\mu RL^3}{m\Omega c^3}$, $W = \frac{mg}{mc\omega^2}$, $S = \frac{\omega}{\Omega}$ et $U = \frac{F_{\text{bal}}}{mc\Omega^2}$ sont les paramètres adimensionnés caractérisant respectivement les efforts du palier, de la gravité, du ressort de centrage et le balourd.

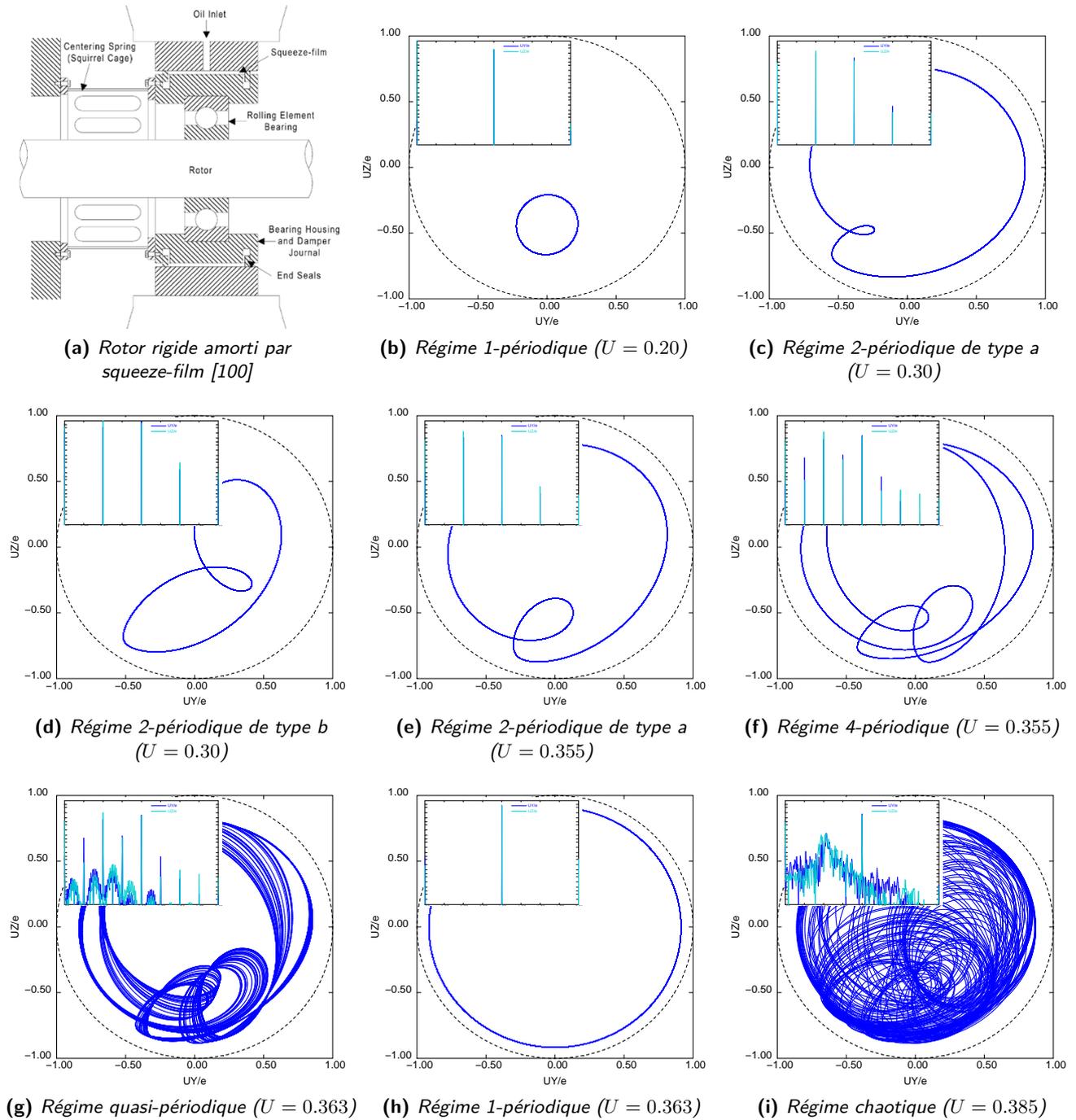


Figure 53 – Réponse d'un rotor rigide sur squeeze-film : orbites stationnaires obtenues par intégration temporelle dans Cast3M et DSP associées en encadrée

4.3 Analyse "classique" des vibrations des tubes de générateur de vapeur

4.3.1 Problématique industrielle

Les tubes de générateur de vapeur (GV) sont les composants permettant d'échanger la chaleur entre les circuits primaire et secondaire d'une centrale nucléaire REP (cf. figure 54).



Figure 54 – Les tubes de générateurs de vapeur dans une centrale REP (images Framatome)

Ces structures élancées sont soumises à de forts écoulements fluides, et la problématique de leurs vibrations en interaction avec les fluides et de leur usure est étudiée depuis longtemps (voir par exemple [123, 120, 128]), notamment dans mon laboratoire où est développé et maintenu le code GERBOISE initié par Delangre *et al.* [88, 93, 116].

Les enjeux sont d'importance en terme de sûreté et de rendement économique. En effet, si une inspection montre une usure du tube trop prononcée, celui-ci sera bouché de manière préventive, réduisant la capacité du GV. L'exemple récent de dégradation des tubes de GV ayant conduit à la fermeture de la centrale de San Onofre dont une analyse est donnée dans [117] montre l'actualité et l'importance du sujet.

4.3.2 Modèle numérique et réponse par intégration temporelle

Equations de la dynamique : On peut modéliser le comportement d'un tube de générateur de vapeur en interaction avec un écoulement fluide et avec d'éventuels contacts par l'équation suivante :

$$M_s \{\ddot{u}\} + C_s \{\dot{u}\} + K_s \{u\} = \{f_{\text{turb}}\} + M_f \{\ddot{u}\} + \{f_{\text{fe}}\} + \{f_{\text{impact}}\} \quad (54)$$

où les indices s et f renvoient respectivement à la structure et au fluide. f_{turb} représente les efforts aléatoires liés à la turbulence, f_{fe} les efforts dits "fluide-élastique" qui dépendent de couplage entre l'écoulement et

le mouvement de la structure, et f_{impact} les forces de choc du tube contre les supports comme les barres anti-vibratoires (BAV) ou les plaques entretoises (PE).

La démarche classique d'analyse vibratoire d'un tel système repose sur :

- Les analyses linéaires permettant de déterminer la vitesse d'écoulement critique liée au modèle de couplage fluide-élastique et les statistiques (écart-type) du déplacement lié à l'excitation aléatoire sans prise en compte des contacts.
- Des analyses non-linéaires réalisées par intégration temporelle des équations du mouvement permettant de prendre en compte aisément les diverses non-linéarités.

Nous n'aborderons ici que le deuxième point. Afin de réduire la taille du modèle, une réduction classique sur base modale est appliquée :

$$\{u(x, t)\} = [\Phi(x)] \cdot \{q(t)\} \quad (55)$$

permettant d'écrire l'équation de la dynamique projetée :

$$M_{s+f}^* \ddot{q} + C_s^* \dot{q} + K_s^* q = f_{\text{turb}}^* + f_{\text{fe}}^* + f_{\text{impact}}^* \quad (56)$$

Une astérisque est utilisée ci-dessus pour signaler que les quantités sont projetées sur base modale (i.e. $K_s^* = \Phi^T \cdot K_s \cdot \Phi$) mais on omettra par la suite cette indication lorsqu'elle est évidente. On omet aussi les notations $\{\cdot\}$ ou $[\cdot]$ indiquant qu'il s'agit de vecteurs et matrices issus de discrétisation éléments finis pour plus de légèreté dans l'écriture.

L'équation différentielle est intégrée par un schéma d'intégration temporel explicite qui a l'avantage de ne pas nécessiter de solveur non-linéaire de type Newton. Dans l'opérateur DYNE de Cast3M, sont à ce jour utilisés les schémas des différences centrées et de De Vogelaere pour lequel le détail des équations et la démonstration de stabilité sont donnés en annexe A.2.

Un modèle de couplage fluide-élastique : Les efforts de turbulence sont des excitations aléatoires dont le spectre est identifié expérimentalement. Numériquement, un signal temporel $f_{\text{turb}}^*(t)$ est généré à partir de la DSP des forces d'excitation par transformée de Fourier inverse et est appliqué à chaque mode avec une corrélation inter-mode dépendant des paramètres de l'écoulement et des déformées modales.

Le couplage fluide-élastique apparaît à travers f_{fe}^* . Plusieurs modèles existent dans la littérature (Connors, Paidoussis, etc.) et dans le code GERBOISE. Il s'agit là d'une thématique de recherche active que j'occulte complètement dans ce mémoire car hors de mon domaine d'activité. J'expose brièvement ci-après le "*quasi-unsteady model*" proposé par Granger et Paidoussis [96] que j'ai récemment implémenté dans Cast3M et GERBOISE et qui sera utilisé dans l'exemple de cette section. Celui-ci repose sur une formulation à effet mémoire avec laquelle l'expression locale de la force vaut :

$$df_{\text{fe}}(x, t) = \frac{1}{2} \rho_f V D \left(\frac{V^2}{D^2} \frac{\partial C_{\text{Lift}}}{\partial \bar{u}} (g * u)(t) - C_{\text{Drag}} \dot{u}(t) \right) dx \quad (57a)$$

où V , D , C_{Lift} et C_{Drag} sont respectivement la vitesse transverse du fluide, le diamètre du tube, les coefficients de portance et de trainée. Le produit de convolution est noté $*$:

$$(g * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \quad (\text{par causalité}) \quad (57b)$$

et la fonction g peut être identifiée avec les paramètres α_i et δ_i ($i = 1, 2$ suffit à identifier le comportement observé expérimentalement [112]) :

$$g(\tau) = \sum_{i=1,2} \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i \frac{V}{D} \tau} \mathcal{H}(\tau) + \frac{D}{V} \alpha_0 \delta(\tau) \quad (57c)$$

avec \mathcal{H} et δ sont les fonctions échelon et Dirac.

Après projection sur base modale et en supposant que l'évolution le long du cintre de la masse volumique, la vitesse ne modifie pas l'orthogonalité entre les modes, on aboutit à l'expression de la force modale :

$$f_{fe i} = -k_{fe i} \cdot (g * q_i)(t) - c_{fe i} \cdot \dot{q}_i(t) \quad (58)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} k_{fe i} &= -\frac{1}{2} \bar{\rho}_f \frac{V_{\max}^3}{D} \frac{\partial C_{\text{Lift}}}{\partial u} \int_{\text{tube}} r v^3 \phi_i^2 dx \\ c_{fe i} &= \frac{1}{2} \bar{\rho}_f V_{\max} D C_{\text{Drag}} \int_{\text{tube}} r v \phi_i^2 dx \end{cases}$$

Dans [32], on a montré que le calcul direct du produit de convolution sous la forme directe ("brute force") :

$$(g * q)(t) \simeq \int_0^t g(\tau) \cdot q(t - \tau) d\tau \simeq \Delta t \sum_{i=0..N} \theta_i g(t_i) \cdot q(t_{N-i}) \quad (59)$$

n'était pas performant (typiquement $O(10^5)$ produits par pas de temps) et qu'une reformulation sous la forme d'une formule de récurrence :

$$(g * q)(t) = \sum_{i=1,2} \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i \frac{V}{D} \Delta t} S'_i(t) + \frac{D}{V} \alpha_0 \cdot q(t) \quad (60)$$

$$\text{avec } S'_i(t) = \int_0^t e^{\delta_i \frac{V}{D} (\tau - t + \Delta t)} \cdot q(\tau) d\tau = e^{-\delta_i \frac{V}{D} \Delta t} S'_i(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \left(e^{\delta_i \frac{V}{D} \Delta t} \cdot q(t) + q(t - \Delta t) \right)$$

abaisse le cout numérique à seulement 7 produits par pas de temps.

Modèle de contact-frottant : La modélisation des efforts de contacts normaux utilise une raideur de contact K_n identifiée comme la raideur des éléments négligés dans le modèle (ovalisation du tube non prise en compte par les éléments de poutre, modes supérieurs négligés et flexibilité des BAV par exemple).

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n - g \leq 0 \\ -K_n(u_n - g) & \text{si } u_n - g > 0 \end{cases} \quad (61)$$

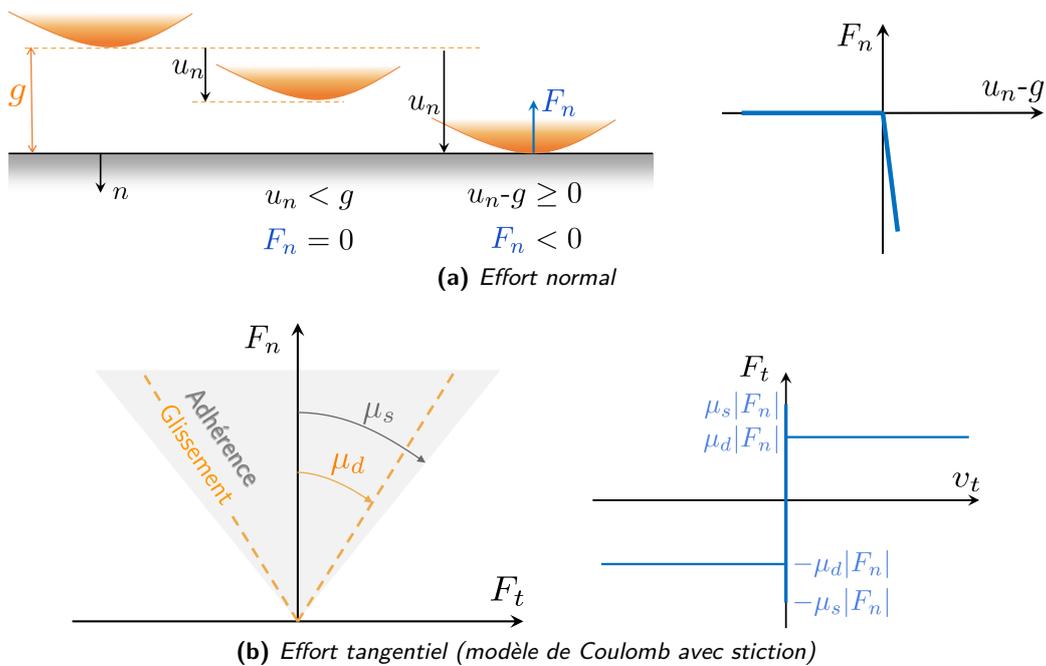


Figure 55 – Modélisation des efforts de contact

Un modèle de Coulomb avec *stiction* (càd avec un coefficient de frottement statique μ_s et dynamique μ_d différents) tel que représenté figure 55b est utilisé. Afin d'éviter une indétermination de l'effort d'adhérence

dans un contexte d'intégration explicite, un oscillateur d'adhérence (de paramètres K_t et C_t) proposé par Antunes *et al.* [89] est utilisé. L'algorithme général de calcul des efforts de contact tangentiel est reproduit algorithme 5. Les efforts de contact étant déterminés à des points "physiques", une recombinaison modale du déplacement est utilisée avant leur calcul et une projection modale des efforts est effectuée après.

Algorithme 5 : Calcul de la force tangentielle

si *sliding* at $t^{i-\frac{1}{2}}$ alors

Compute $P = \underline{v}_t^i \cdot \underline{v}_t^{i-\frac{1}{2}}$

si $P \geq 0$ alors

sliding :

$$\underline{F}_t^i = -\mu_d \cdot |F_n^i| \cdot \frac{\underline{v}_t}{|\underline{v}_t|} \quad (62)$$

retourner

sinon

go to *sticking*

fin

sinon

sticking :

$$\underline{F}_t^i = \underline{F}_t^{sl} - K_t \cdot (\underline{u}_t^i - \underline{u}_t^{ad}) - C_t \cdot \underline{v}_t^i \quad (63)$$

verification of the sticking hypothesis :

si $|\underline{F}_t^i| > \mu_s \cdot F_n^i$ alors

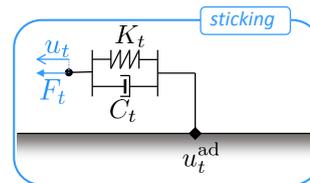
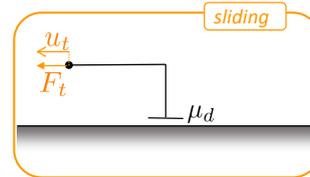
go to *sliding*

sinon

retourner

fin

fin



4.3.3 Exemple d'étude

Etude d'un tube de GV réaliste soumis au couplage fluide-élastique : On redonne ci-après les principaux résultats déjà publiés dans [32] de l'étude d'un tube de GV réaliste soumis à un couplage fluide-élastique via le modèle de Granger-Paidoussis avec prise en compte des contacts au niveau des BAV. Le schéma ainsi que quelques modes sont donnés figure 56. Afin d'étudier la dynamique du système,

- les forces de turbulence sont considérées comme des perturbations de faible amplitude et sont donc négligées dans cette étude,
- on fait varier le nombre de modes de 1 à 100 avec un amortissement modal forfaitaire de $\xi = 2\%$.

L'instabilité liée au couplage fluide-élastique met en mouvement le tube : il s'agit bien d'un système dynamique autonome. On considère que l'état stationnaire est atteint après 20 s et que 10 s supplémentaire permettent d'avoir des statistiques convenables. Evidemment, en présence de turbulence, ces chiffres seraient autrement plus grands. Les portraits de phase et DSP enregistrés pour l'ensemble des points de contact sont tracés figure 57 pour $m = 1, 3$ et 100 modes.

L'examen des ces résultats montre qu'avec un nombre de modes croissants pris en compte, la réponse dynamique devient de plus en plus complexe : périodique pour 1 mode, périodique ou quasi-périodique pour 3 modes, etc. Cependant, la dynamique globale du système semble rester au premier ordre pilotée ses premiers modes. Cela s'explique par le fait que l'énergie alimentant le système est introduite par le comportement instable du ou des premiers modes. Une redistribution vers les modes plus élevés via les impacts est

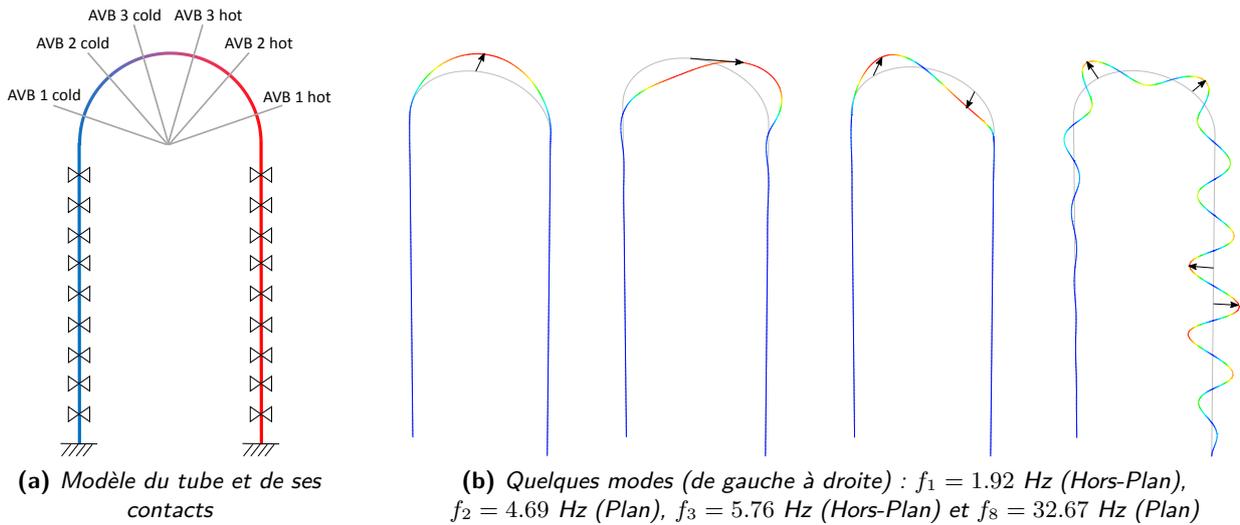


Figure 56 – Modèle de tube de GV et quelques modes

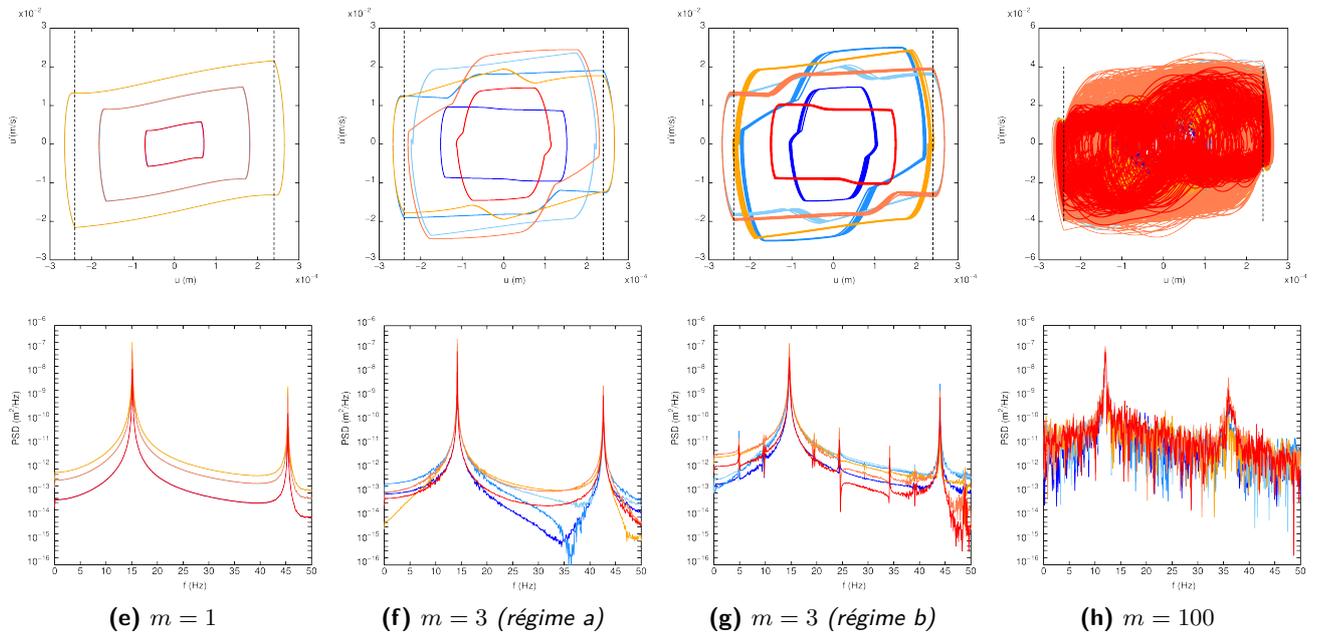


Figure 57 – Portraits de phase et DSP (– AVB 1 cold, – AVB 2 cold, – AVB 3 cold, – AVB 3 hot, – AVB 2 hot, – AVB 1 hot)

observée et une étude seulement sur les premiers modes ne pourraient prédire les forces d'impact ni l'usure des tubes. Néanmoins, la prépondérance des premiers modes dans la réponse du système ne peut être niée et justifie les analyses préliminaires ne considérant que les premiers modes pour inventorier les régimes possibles du système. En effet, détecter si plusieurs régimes co-existent dans la zone de fonctionnement du modèle peut avoir de lourdes conséquences sur la durée de vie du composant étudié, comme on l'illustre au paragraphe suivant.

Exemple d'un tube appuyé-appuyé linéairement instable : On considère ici l'exemple d'un tube appuyé-appuyé dans un espace circulaire excentré représentatif d'un tronçon de tube de GV dans un plaque entretoise. L'instabilité fluide-élastique agit sur son premier mode et le met en mouvement. Après intégration temporelle, on observe (ou pas !) la coexistence de deux régimes :

- (a) Un régime de translation avec des impacts normaux courts et peu de glissement, donc à faible taux d'usure (figure 58c).

(b) Un régime de rotation en contact quasi-permanent avec une usure élevée (figure 58d).

La figure 58b montre les résultats obtenus sur le même cas mais en utilisant 2 compilations différentes du même programme. Les arrondis numériques et optimisations du compilateur ont permis ou pas d'observer les 2 régimes. Cet exemple simple motive le besoin d'un outil permettant de décrire de manière plus exhaustive l'ensemble des régimes possibles.

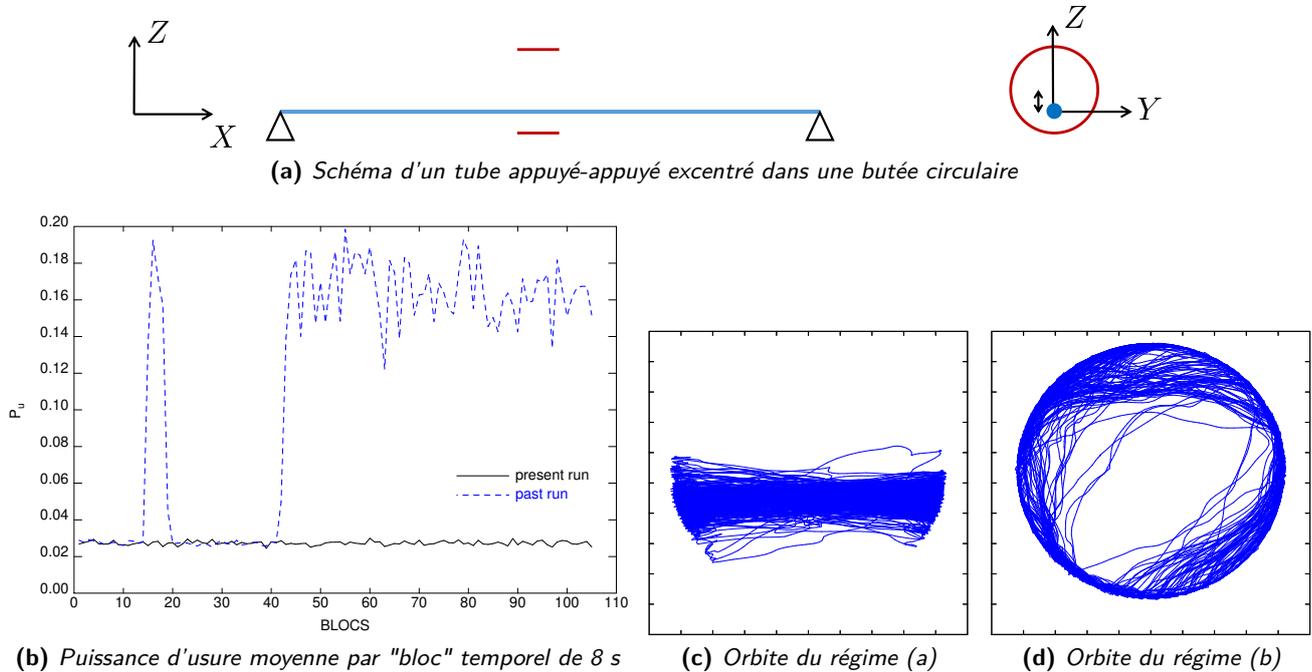


Figure 58 – Exemple d'un tube excentré dans un contact circulaire

Bilan des § 4.2 et 4.3

Les deux thématiques présentées ci-dessus montrent les limites actuelles d'analyse des codes BRASERO et GERBOISE.

Pour le premier, les analyses industrielles sont essentiellement réalisées en linéarisant le comportement. Cela est très souvent suffisant. Cependant, les non-linéarités dues à des composants spécifiques (paliers, butées hydrodynamiques, roulements, etc.) et les possibles contacts avec des composants non-tournants dans des cas accidentels demandent parfois à être étudiés. Un schéma d'intégration temporel peut alors être utilisé, mais il nécessite certaines précautions évoquées dans [26] pour être robuste, et un grand nombre pas de temps au regard des différents temps caractéristiques du problème : période de rotation, temps de choc, temps nécessaire pour atteindre une solution stationnaire lorsque celle-ci est recherchée.

Dans le cas des tubes de générateurs de vapeur, les nombreuses non-linéarités de choc et de frottement présentes ont conduit depuis longtemps à adopter une démarche d'analyse par intégration temporelle. Avec une excitation par le fluide, de surcroît aléatoire, la convergence dans les statistiques demande de longues périodes d'intégration. Malgré ces précautions, il arrive dans les études de "rater" certains régimes dynamiques si les conditions initiales restent dans le bassin d'un unique régime et que les perturbations des excitations aléatoires ne sont pas suffisamment puissantes. L'exemple de la figure 58 est symptomatique de ce scénario. Il existe ainsi un danger pour la conception et l'analyse des systèmes dynamiques non-linéaires si l'on se contente d'étudier ce système autour d'un seul point de fonctionnement. Il est évidemment encore possible de recourir à des analyses probabilistes, implémentées dans le code GERBOISE, en faisant varier les paramètres dont les conditions initiales font partie, mais le coût en temps de calcul font que ce type d'approche n'est que très rarement adopté en pratique dans les bureaux d'études et centre de R&D.

Bien que l'intégration temporelle soit une méthode robuste qui reproduise numériquement une véritable expérience en cherchant à décrire l'évolution d'un système avec le temps, elle n'est pas performante pour

la recherche d'un état stationnaire et ne garantit pas l'exhaustivité des régimes obtenus. Cette conclusion motive l'orientation de mes travaux de recherche vers des méthodes numériques permettant d'obtenir directement un ensemble de solutions stationnaires. La démarche proposée ci-après constitue ainsi un premier pas vers une recherche plus rigoureuse et systématique des régimes existants pour ces systèmes dynamiques complexes.

4.4 Méthodes d'équilibrage harmonique et de continuation

4.4.1 Discrétisation fréquentielle

La méthode d'équilibrage harmonique (ou *Harmonic Balance Method*) est une méthode aujourd'hui bien établie ([129, 124]) qui a fait ses preuves pour de nombreux problèmes de dynamique non-linéaire comme les systèmes frottants [86, 99], des non-linéarités cubiques [90], l'interaction rotor/stator [98] ou les rotors fissurés [102].

Le principe de base consiste à chercher une solution périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ au problème dynamique :

$$r(t) = M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) - f^{\text{ext}}(t) - f^{\text{nl}}(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (64)$$

où le lecteur attentif aura remarqué que les vecteurs temporels des efforts extérieurs et non-linéaires sont désormais repérés par un f minuscule. L'évolution temporelle du vecteur inconnu $q(t)$ de taille n est discrétisé sur une base de Fourier tronquée à l'ordre H :

$$q(t) = Q_0 + \sum_{j=1..H} \cos j\omega t Q_{c j} + \sin j\omega t Q_{s j} \quad (65)$$

On peut regrouper les inconnues fréquentielles dans le vecteur Q de dimension $n(2H + 1)$:

$$Q = \left(Q_0 \quad \dots \quad Q_{c j} \quad Q_{s j} \quad \dots \right)^T \quad (66)$$

En introduisant $\mathcal{T}(\omega t) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \cos j\omega t & \sin j\omega t & \dots \end{bmatrix}$ matrice des fonctions trigonométriques, I matrice identité de dimension $n \times n$ et \otimes produit de Kronecker tel que :

$$[\mathcal{T}(\omega t) \otimes I] = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \dots & & & \\ & & \cos j\omega t \cdot I & & \\ & & & \sin j\omega t \cdot I & \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (67)$$

on peut exprimer sur cette base toutes les grandeurs temporelles (en minuscule) en fonction des coefficients de Fourier (en majuscule) :

$$\begin{aligned} q(t) &= [\mathcal{T}(\omega t) \otimes I] \cdot Q \\ \dot{q}(t) &= \omega [\mathcal{T}(\omega t) \nabla \otimes I] \cdot Q \\ \ddot{q}(t) &= \omega^2 [\mathcal{T}(\omega t) \nabla^2 \otimes I] \cdot Q \\ f^{\text{ext}}(t) &= [\mathcal{T}(\omega t) \otimes I] \cdot F^{\text{ext}} \\ f^{\text{nl}}(t) &= [\mathcal{T}(\omega t) \otimes I] \cdot F^{\text{nl}} \end{aligned} \quad (68)$$

où l'opérateur de dérivation est défini par :

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 0 & j & & \\ & & -j & 0 & & \\ & & & & \dots & \end{bmatrix} \quad (69)$$

Utilisant cette approximation pour résoudre le problème (64), par une procédure de Galerkin qui minimise le résidu pondéré :

$$\frac{2}{T} \int_0^T p(t)^* \cdot r(t) dt \quad (70)$$

on transforme l'équation différentielle de taille n en système algébrique non-linéaire de taille $n(2H + 1)$:

$$R(Q) = ZQ - F^{nl} - F^{ext} = 0 \quad (71)$$

où apparaît la rigidité dynamique :

$$Z = \omega^2 \nabla^2 \otimes M + \omega \nabla \otimes C + I \otimes K \quad (72)$$

Une procédure classique de Newton Raphson permet d'obtenir la solution du problème à partir d'une valeur initiale $Q^{(0)}$ en appliquant, jusqu'à obtenir la convergence, des corrections itératives du type :

$$Q^{(i+1)} = Q^{(i)} - R_Q^{-1} \cdot R^{(i)} \quad (73)$$

où la Jacobienne vaut :

$$R_Q \equiv \frac{\partial R}{\partial Q} = Z - \frac{\partial F^{nl}}{\partial Q} \quad (74)$$

Lorsque le calcul de la Jacobienne est coûteux, des méthodes de quasi-Newton combinées à des accélération de convergence peuvent aussi être utilisées.

4.4.2 Bascule temps-fréquence

Afin d'exprimer les efforts non-linéaires et la Jacobienne dans le domaine fréquentiel, une méthode de bascule temps-fréquence (*Alternating Frequency Time method*) est utilisée. Il aurait aussi été possible de reformuler chaque force non-linéaire en adoptant un formalisme quadratique [118], mais l'AFT nous a semblé plus naturel et plus facile à généraliser lors de nos travaux.

Comme illustrée figure 59, la méthode consiste simplement à passer du domaine fréquentiel vers le domaine temporel les inconnues primales (i.e. $Q(j\omega) \rightarrow q(t)$), éventuellement recombinaison le déplacement si la non-linéarité s'exprime sur des degrés de liberté physiques, appliquer la fonction non-linéaire, retourner le cas échéant à la base modale, et, finalement, par transformée de Fourier inverse, calculer les coefficients fréquentiels de la force non-linéaire.

4.4.3 Méthode de continuation

Il est courant de chercher à établir l'évolution de la réponse du système avec un paramètre comme la fréquence ou l'amplitude de forçage.

Une approche incrémentale bouclerait sur les valeurs de ce paramètre et chercherait à calculer une solution en équilibre à partir de la solution au pas précédent. Cependant, ce type d'approche échoue en présence de *snap-back* qui sont fréquemment rencontrés dans les systèmes fortement non-linéaires.

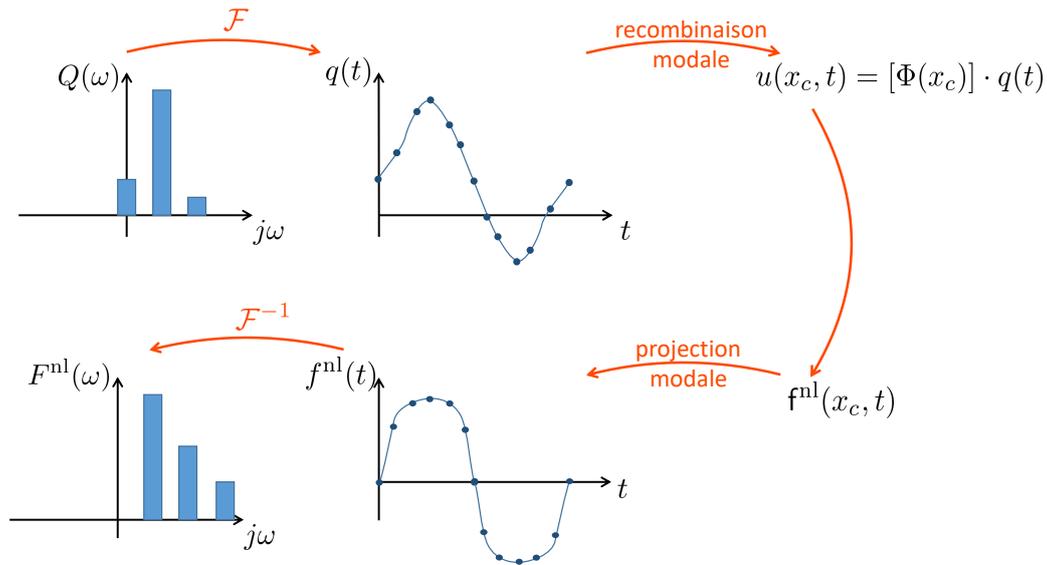


Figure 59 – Alternating Frequency Time method

Ainsi, pour obtenir une courbe de réponse, une méthode efficace consiste à introduire explicitement la dépendance du résidu (71) avec le paramètre (on considère ici qu'il s'agit de ω) : $R(Q, \omega)$. En conséquence, il devient possible d'adopter une approche de continuation de la solution (cf. [84, 119], § 6.6 de [129] ou § 4 de [130]) permettant de parcourir la courbe de réponse continument tant que la "fonction" résidu est elle-même continue. Sur la figure 60 est illustrée la méthode de continuation avec des étapes de prédiction-corrections.

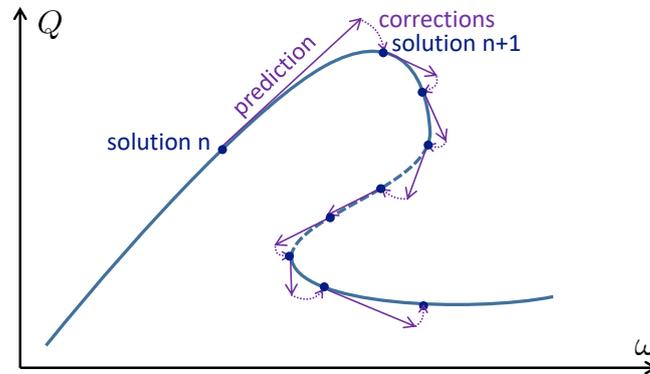


Figure 60 – Principe de la méthode de continuation

On détaille plus précisément ces deux étapes ci-dessous :

1. Prédiction :

A partir d'une position (Q_n, ω_n) en équilibre, le problème est linéarisé et résolu avec un $\delta\omega_p$ fixé arbitrairement :

$$-\frac{\partial R}{\partial Q} \delta Q_p = \frac{\partial R}{\partial \omega} \delta \omega_p \quad (75)$$

La prédiction $(Q^{(0)}, \omega^{(0)})$ est obtenue via :

$$\begin{pmatrix} \delta Q^{(0)} \\ \delta \omega^{(0)} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \delta Q_p \\ \delta \omega_p \end{pmatrix} \quad (76)$$

où α est la valeur permettant d'assurer que la longueur de l'incrément égale Δs :

$$\delta Q^{(0)T} \delta Q^{(0)} + \delta \omega^{(0)2} = \Delta s^2 \quad (77)$$

2. Corrections :

A partir de la position prédite $(Q^{(0)}, \omega^{(0)})$, des corrections successives sont réalisées dans le plan orthogonal à la prédiction jusqu'à rendre le résidu inférieur à une tolérance donnée.

$$\begin{bmatrix} -R_Q & -R_\omega \\ \delta Q^{(0)T} & \delta \omega^{(0)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q^{(i)} \\ \delta \omega^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(i-1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

La relation de longueur d'arc n'est applicable en pratique que pour un problème adimensionné, et la norme mesurant cette longueur doit être adaptée dans le cas contraire.

Cet algorithme permet d'avoir un pas adaptatif. Il suffit de modifier la valeur de Δs en fonction de la difficulté de convergence du pas précédent.

4.4.4 Stabilité

Contrairement aux solutions calculées par intégration temporelle directe, les solutions obtenues lors d'une analyse fréquentielle ne sont pas nécessairement stables. Ainsi, il est nécessaire d'évaluer leur stabilité. Ceci est réalisé en perturbant la solution et en linéarisant l'équation dynamique. La théorie de Floquet associée à cette étude n'est pas rappelée ici.

Deux choix s'offrent à nous :

- Construire par intégration temporelle directe la **matrice de monodromie** $\Phi = \hat{Q}(T)$ obtenue en intégrant le système dynamique sur une période à partir des $2n$ conditions initiales possible : $\hat{Q}(t=0) = I$ (où $\hat{Q} = (\dot{Q} Q)^T$). Les valeurs propres de Φ notées ρ_i sont les multiplicateurs de Floquet.
- Construire dans le domaine fréquentiel le **déterminant de Hill** dont une sélection des valeurs propres λ_i sont les exposants de Floquet.

La relation (79) lie multiplicateurs et exposants de Floquet.

$$\rho_i = e^{\lambda_i T} \quad (79)$$

Le système est dit stable si : $|\rho_i| \leq 1 \quad \forall i \quad (80a)$

ou de manière équivalente si : $\Re\{\lambda_i\} \leq 0 \quad \forall i \quad (80b)$

En pratique, le nombre de pas de temps nécessaires à l'obtention d'une matrice de monodromie Φ précise conduit à des temps de calcul légèrement supérieur à ceux de l'approche (b). On choisit donc pour l'instant de se limiter à la méthode purement fréquentielle de Hill.

On considère une petite perturbation \tilde{q} de la solution q^{eq} :

$$q(t) = q^{eq}(t) + \tilde{q}(t) \quad (81)$$

Le système linéarisé autour de la position d'équilibre s'écrit :

$$M\ddot{\tilde{q}} + C^{\text{tot}}\dot{\tilde{q}} + K^{\text{tot}}\tilde{q} = 0 \quad (82a)$$

où

$$K^{\text{tot}} = K - \frac{\partial f^{nl}}{\partial q} \quad C^{\text{tot}} = C - \frac{\partial f^{nl}}{\partial \dot{q}} \quad (82b)$$

On choisit également de développer la perturbation en série de Fourier :

$$\begin{aligned}\tilde{q}(t) &= e^{\lambda t} \cdot [\mathcal{T} \otimes I] \cdot \tilde{Q} \\ \dot{\tilde{q}}(t) &= e^{\lambda t} \cdot [[\mathcal{T}\nabla \otimes I] + \lambda \cdot [\mathcal{T} \otimes I]] \cdot \tilde{Q} \\ \ddot{\tilde{q}}(t) &= e^{\lambda t} \cdot [[\mathcal{T}\nabla^2 \otimes I] \cdot \tilde{Q} + 2\lambda \cdot [\mathcal{T}\nabla \otimes I] + \lambda^2 \cdot [\mathcal{T} \otimes I]] \cdot \tilde{Q}\end{aligned}\quad (83)$$

Après calcul des dérivées et identification des termes, on aboutit au système aux valeurs propres quadratique :

$$\left[\Delta_0 + \lambda \Delta_1 + \lambda^2 \Delta_2 \right] \phi = 0 \quad (84a)$$

où

$$\Delta_0 = R_Q \quad \Delta_1 = 2\omega \nabla \otimes M + I \otimes C^{\text{tot}} \quad \Delta_2 = I \otimes M \quad (84b)$$

qui fournit $2n(2H + 1)$ valeurs propres dont seulement $2n$ correspondent aux exposants de Floquet. Ce tri est classiquement réalisé en retenant les $2n$ valeurs propres dont les valeurs absolues des parties imaginaires sont les plus petites, mais il a été montré dans [106] qu'un tri retenant les vecteurs propres les plus "centrés" sur les harmoniques fondamentales était plus pertinent. Ces exposants de Floquet sont à la base de la détection des bifurcations

4.5 Détection et suivi de bifurcations

4.5.1 Détection de bifurcations

Une bifurcation est un point singulier de la courbe de réponse pour lequel la partie réelle de λ vaut 0, ce qui signifie que $\det(R_Q) = 0$. Elle s'associe à un changement de stabilité et la naissance d'une nouvelle branche de solutions. La théorie des bifurcations décrite dans de nombreux ouvrages [125, 130] est donc d'une grande importance pratique pour la détermination des régimes dynamiques possibles. La figure 61 montre qu'en fonction de la manière dont s'annule $\Re(\lambda)$ on rencontre différents types de bifurcation.

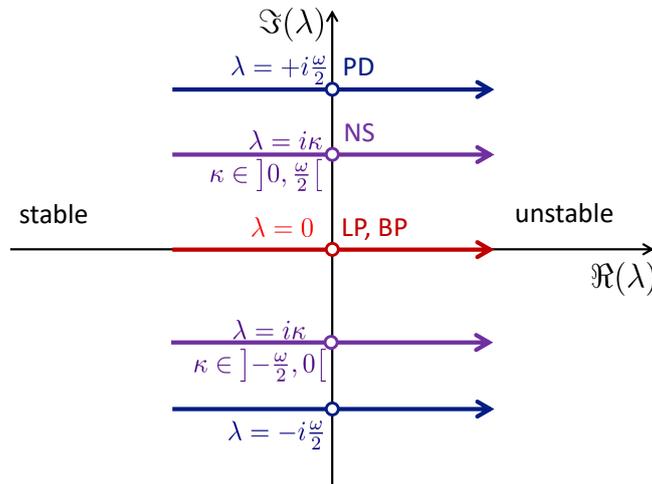


Figure 61 – La traversée de l'axe imaginaire par un coefficient de Floquet indique une bifurcation

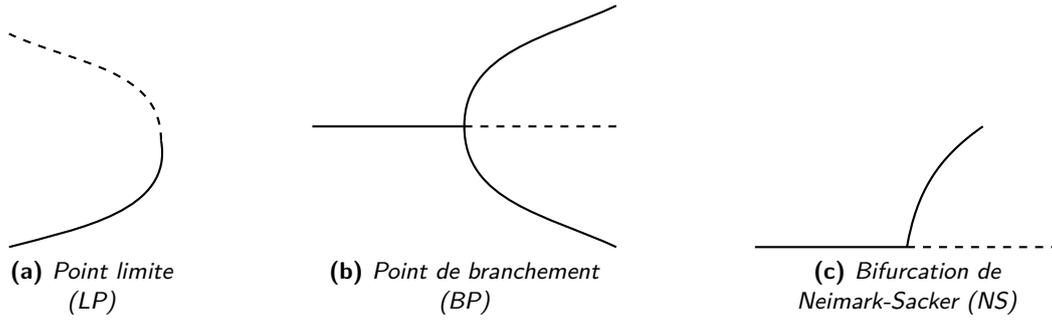


Figure 62 – Différents types de bifurcation dans le plan (Q, ω)

Leur détection est réalisée par le changement de signe d'une fonction test φ entre deux pas consécutifs.

$$\varphi_{LP} = \det(R_Q) \quad (85a)$$

$$\varphi_{BP} = R_w^T \phi \quad (\text{à vérifier en plus de } \varphi_{LP}) \quad (85b)$$

$$\varphi_{NS} = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} \lambda_i + \lambda_j \quad (85c)$$

$$\varphi_{PD} = \text{sign}(\Re(\rho_{\max})) |\rho_{\max}| + 1 \quad \text{où } \rho_{\max} = \max_j \left| e^{\frac{2\pi\lambda_j}{\omega}} \right| \quad (85d)$$

Ensuite, on procède à leur localisation précise en cherchant à annuler le vecteur augmenté Y de l'équation (86) associé au type de bifurcation recherchée. Ce type d'approche a été développé notamment par [83, 85] pour les points limites et les bifurcations de Hopf et utilisé par [6, 33] dans un contexte HBM.

$$Y_{LP}(Q, \omega, \phi) = \begin{pmatrix} R \\ R_Q \cdot \phi \\ \phi^T \cdot \phi - 1 \end{pmatrix} \quad (86a)$$

$$Y_{BP}(Q, \omega, \phi, \gamma) = \begin{pmatrix} R \\ R_Q \cdot \phi \\ R_w \cdot \phi \\ \phi^T \cdot \phi - 1 \end{pmatrix} \quad (86b)$$

$$Y_{NS}(Q, \phi_R, \phi_I, \omega, \kappa, \gamma) = \begin{pmatrix} R \\ [\Delta_0 - \kappa^2 \Delta_2] \cdot \phi_R - \kappa \Delta_1 \cdot \phi_I \\ [\Delta_0 - \kappa^2 \Delta_2] \cdot \phi_I + \kappa \Delta_1 \cdot \phi_R \\ q^T \cdot \phi_I - 1 \\ q^T \cdot \phi_R \end{pmatrix} \quad (86c)$$

$$Y_{PD}(Q, \phi_R, \phi_I, \omega) = \begin{pmatrix} R \\ \left[\Delta_0 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \Delta_2 \right] \cdot \phi_R - \frac{\omega}{2} \Delta_1 \cdot \phi_I \\ \left[\Delta_0 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \Delta_2 \right] \cdot \phi_I + \frac{\omega}{2} \Delta_1 \cdot \phi_R \\ q^T \cdot \phi_I - 1 \end{pmatrix} \quad (86d)$$

Selon le type de bifurcation, la taille du vecteur Y change : elle vaut respectivement $2n(2H + 1) + 1$, $2n(2H + 1) + 1$, $2n(2H + 1) + 2$ et $3n(2H + 1) + 1$ pour les bifurcations de type LP, BP, NS et PD. On note la présence d'une (ou deux pour NS) équation de normalisation permettant de lever la connaissance des vecteurs propres à une constante multiplicative près (et un angle près pour NS).

Une résolution non-linéaire par méthode de Newton est une nouvelle fois employée pour annuler Y et permet de localiser ces points de bifurcation.

4.5.2 Branchement depuis une bifurcation

Une fois qu'une bifurcation a été détectée, il est possible de démarrer une nouvelle branche de solution, en démarrant depuis le point de bifurcation et en forçant la direction prédite avec le mode propre ϕ associé à la bifurcation avec une procédure de branchement. Il faut également veiller à ce que l'espace d'approximation permette d'exprimer cette nouvelle solution.

Dans [33], on montre, pour des bifurcations de type doublement de périodes, que l'enrichissement de la base \mathcal{T} avec les sous-harmoniques permet de construire la base :

$$\mathcal{T}_{PD}(\omega t) = \left[1 \quad \cos j\frac{\omega}{2}t \quad \sin j\frac{\omega}{2}t \quad \dots \quad \cos j\omega t \quad \sin j\omega t \quad \dots \right] = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\frac{1}{2}} \quad (87)$$

et que le vecteur prédicteur tangent à utiliser prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta Q \\ \delta \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi + \beta \delta Q \\ \beta \end{pmatrix} \quad (88)$$

où β est déterminé pas une condition de type longueur d'arc.

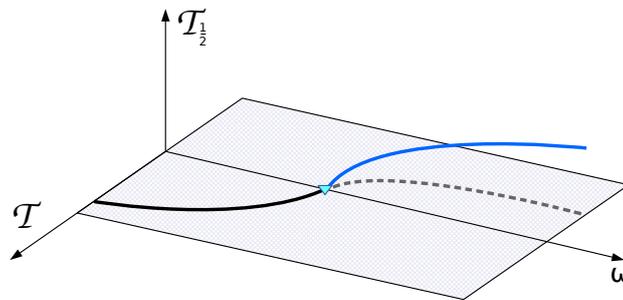


Figure 63 – Branchement depuis un point de DP ▼

4.5.3 Suivi de bifurcations

De manière analogue au calcul de la courbe d'équilibre, chacun des systèmes présentés précédemment peut être augmenté en ajoutant l'un des paramètre du système dans le vecteur inconnu et une équation de type longueur d'arc. On parvient ainsi à suivre la bifurcation dans un espace de dimension supérieur.

On ne reproduit pas les équations ici afin de ne pas alourdir le texte. Le lecteur intéressé peut se référer à [6, 33]. Dans ces articles, est montrée l'application de cette démarche au suivi de points limites, de bifurcations de Neimark-Sacker et de doublement de période.

Une courbe de suivi de ces bifurcations dans l'espace (Q, ω, γ) peut elle-même présenter des points singuliers. En particulier, sur la figure 64 est représenté un point limite (♦) de codimension 2. Il matérialise la frontière d'existence de la bifurcation suivie dans l'espace des paramètres et permet une "cartographie" des régimes possibles.

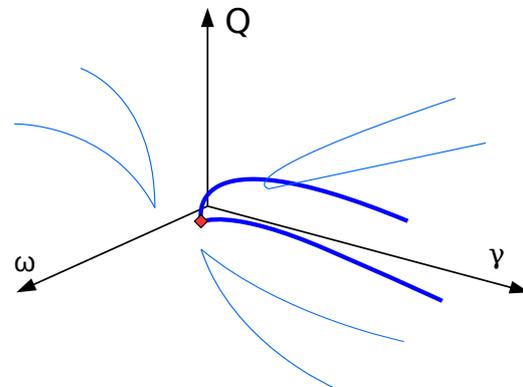


Figure 64 – Représentation d'une bifurcation de codimension 2 dans l'espace (Q, ω, γ) .

4.6 Applications

4.6.1 Contact rotor/stator

Présentation de l'exemple : Le cas d'un rotor de Jeffcott en interaction avec un stator traité par [105] puis dans [107, 109, 114, 5, 25] est repris ici pour illustration.

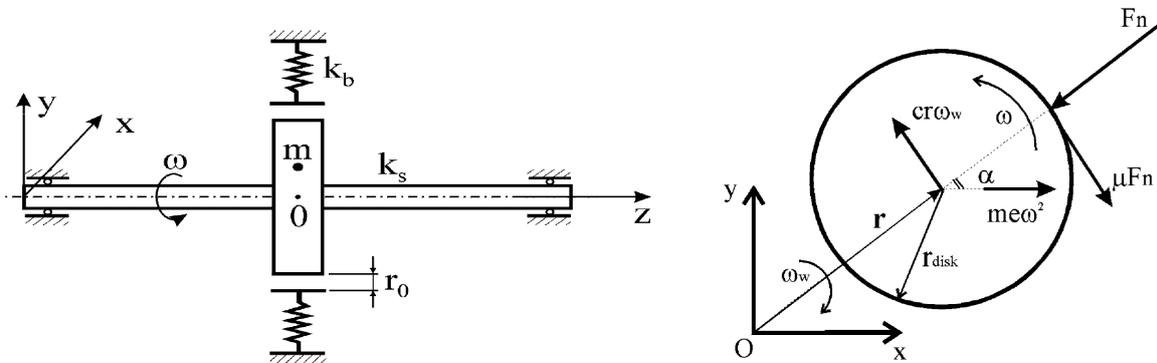


Figure 65 – Rotor de type Jeffcott en interaction avec le stator [105]

Les mouvements selon x et selon y ne sont couplés que par les forces de frottement entre rotor et stator (absence de couplage gyroscopique) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_s x + k_b \left(1 - \frac{h}{r}\right) (x - \mu y \operatorname{sign}(v_{rel})) &= me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + k_s y + k_b \left(1 - \frac{h}{r}\right) (\mu x \operatorname{sign}(v_{rel}) + y) &= me\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (89)$$

Analyse par intégration temporelle : Les réponses obtenues par intégration temporelle dans Cast3M pour différentes valeurs de vitesse de rotation sont données figure 66.

On constate qu'une fois en contact (après $\Omega/\omega_c > 0.154$), la courbe de réponse non-linéaire se raidit à cause de la raideur de contact très élevée. Vers $\Omega/\omega_c \simeq 0.29$, le régime devient quasi-périodique et le contact permanent peut devenir intermittent (comme à $\Omega/\omega_c = 0.33$ par ex.). L'amplitude vibratoire et le contenu fréquentiel sont évidemment très différent du modèle linéaire (i.e. sans contact).

Analyse par continuation fréquentielle : On applique maintenant à cet exemple les méthodes numériques décrites dans les sections précédentes (HBM, continuation, suivi de bifurcations). Les résultats présentés sont issus de la thèse de Lihan Xie [114].

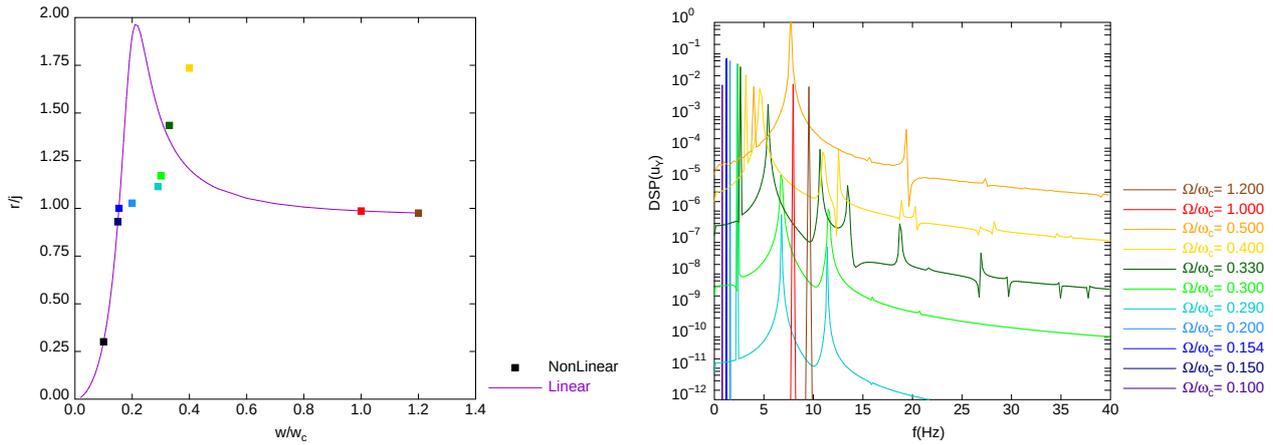
En premier lieu, on calcule la courbe de réponse (amplitude en fonction de la vitesse de rotation) pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ (cf. figure 67).

Pour $\mu = 0.2$, on vérifie qu'après la mise en contact, le régime périodique devient instable pour $\bar{\omega} > 0.289$ avec une bifurcation de Neimark-Sacker, laissant ainsi place à un régime quasi-périodique qui a été observé par l'intégration temporelle (figure 66).

Pour $\mu = 0.11$, l'instabilité (et donc la plage où le mouvement serait quasi-périodique) est réduite à $\bar{\omega} \in [0.847, 0.963]$, et elle a disparu pour $\mu = 0.05$.

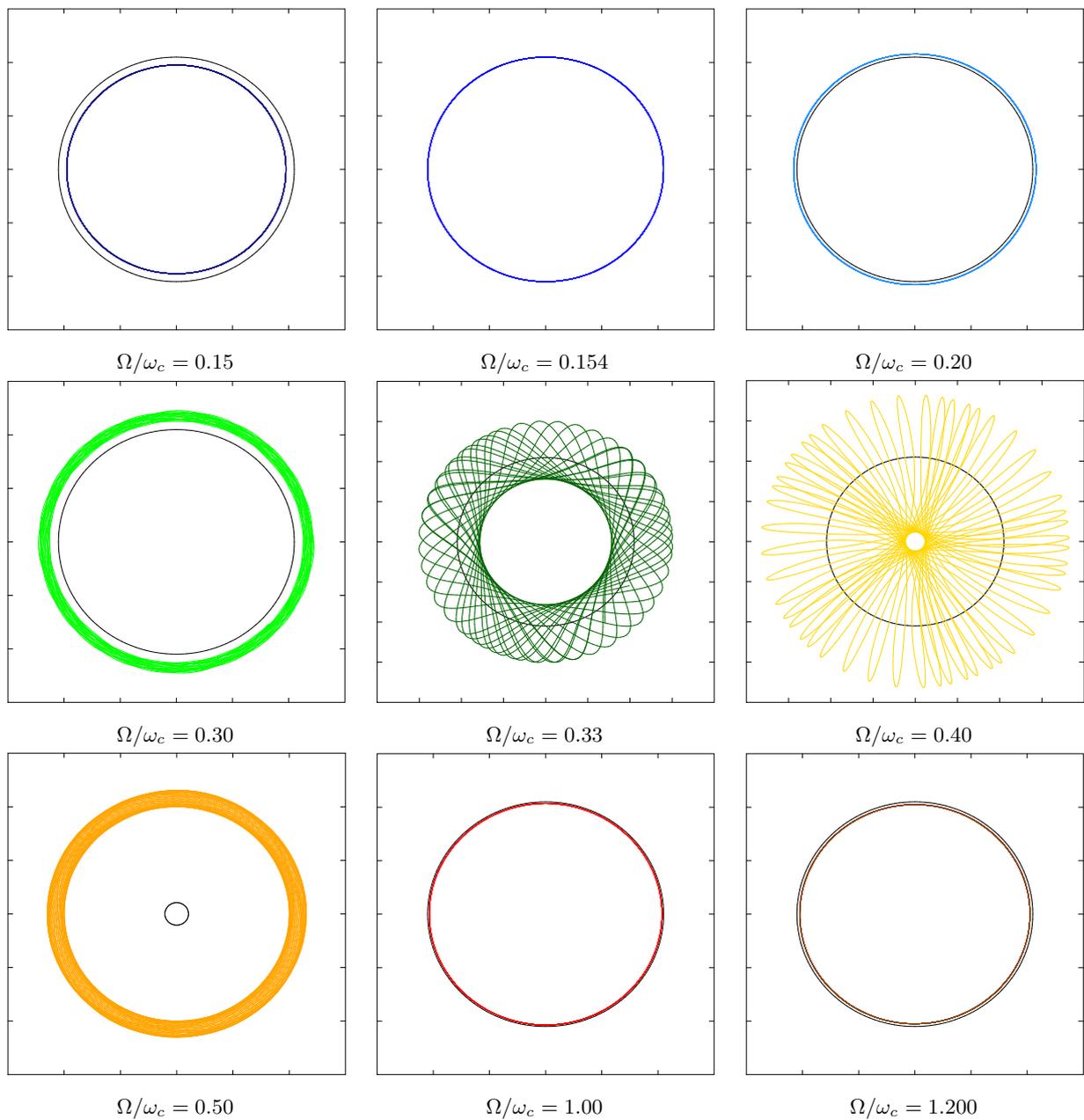
Ainsi, la dépendance de la réponse avec μ mérite d'être étudiée. Le suivi des points NS et LP dans l'espace $(r/h, \bar{\omega}, \mu)$ est entrepris grâce aux méthodes développées. La figure 68 fournit les résultats obtenus.

Ce premier exemple montre la pertinence de l'approche présentée pour "cartographier" les régimes périodiques possibles et leur transition vers d'autres comportements. En particulier, la frontière entre le régime périodique *full annular rub* et quasi-périodique est détectée et conforme aux précédents résultats de [105] obtenus analytiquement.



(a) Amplitude de la réponse en fonction de Ω

(b) DSP de la réponse pour plusieurs Ω



(c) Orbites pour plusieurs vitesse de rotation Ω/ω_c

Figure 66 – Réponse d'un rotor de type Jeffcott en interaction avec le stator

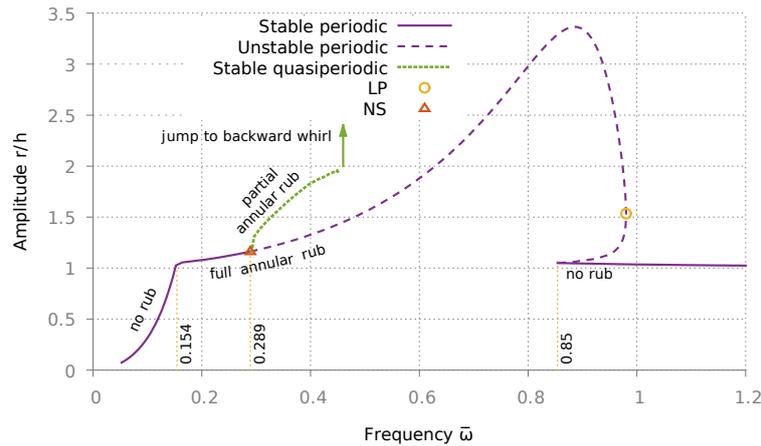
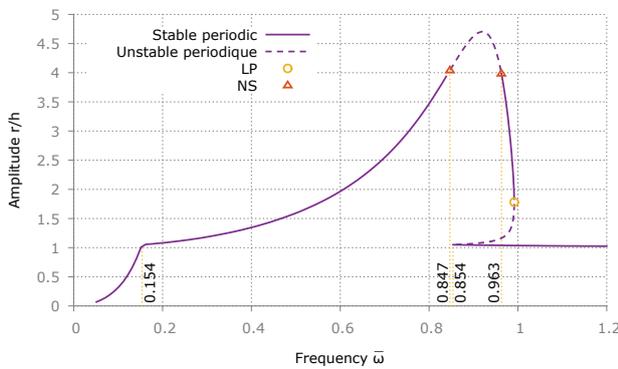
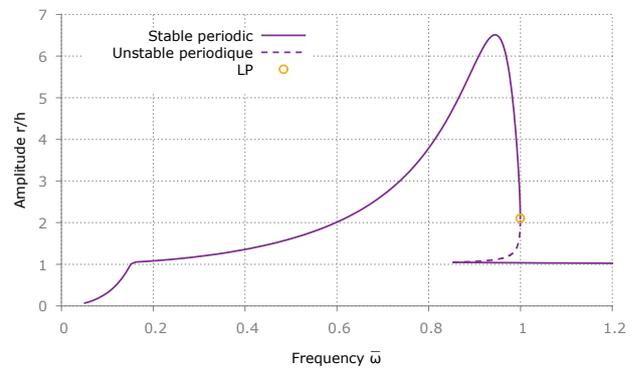
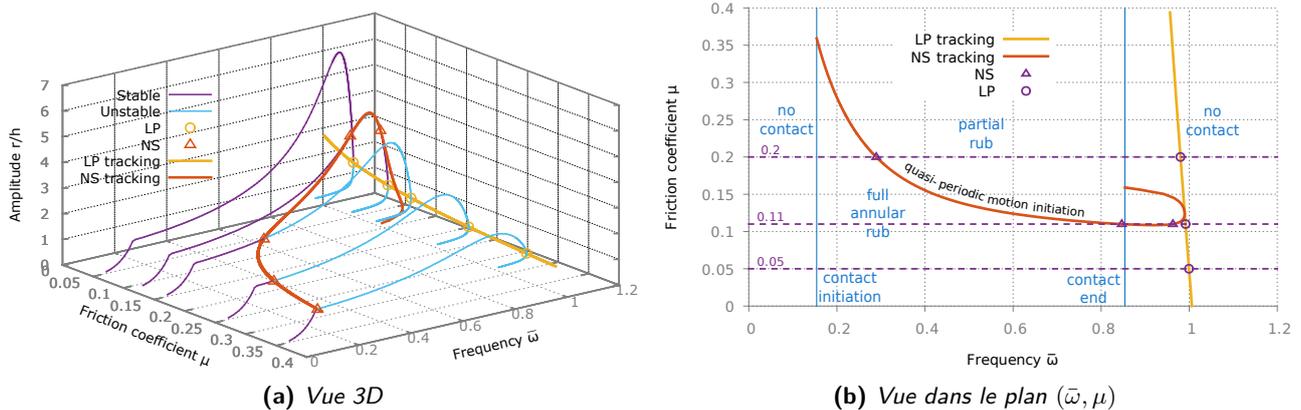
(a) $\mu = 0.2$ (b) $\mu = 0.11$ (c) $\mu = 0.05$

Figure 67 – Réponse du rotor de Jeffcott en fonction de la fréquence adimensionnée



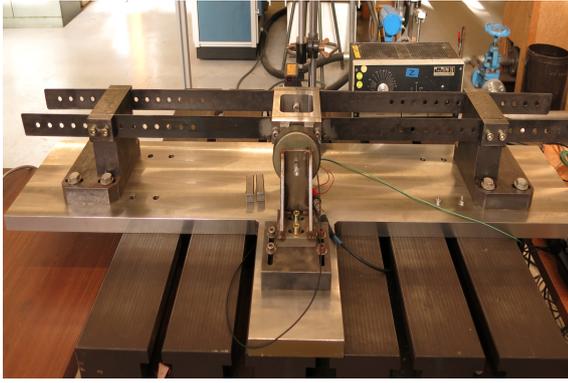
(a) Vue 3D

(b) Vue dans le plan $(\bar{\omega}, \mu)$ Figure 68 – Courbes de réponse et courbes de suivi des points limites (LP) et de bifurcation de Neimark-Sacker (NS) dans l'espace (r, ω, μ) .

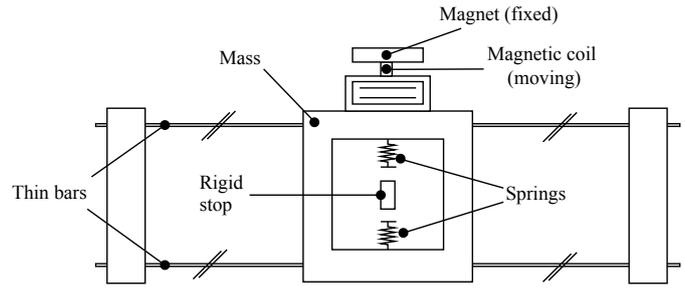
4.6.2 Oscillateur à choc non-linéaire (Koala)

Présentation de Koala : Les résultats de cette sous-section et de la suivante proviennent du travail de la thèse en cours de Roberto Alcorta [131] et ont fait l'objet de la publication [33].

L'expérience Koala trouve son origine au laboratoire DYN du CEA. Ce système représenté figure 69 est composé de deux lames souples (dimensionnées pour que la tension lors de la flexion produisent une raideur cubique), et d'une masse centrale m sur laquelle sont fixés deux ressorts de choc k_c . L'excitation harmonique est réalisée par une bobine électro-magnétique.



(a) Photo du montage expérimental



(b) Schéma du montage expérimental

Figure 69 – Expérience Koala

Il s'agit d'un oscillateur non-linéaire à 1 ddl obéissant à l'équation :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \alpha x^3 + k_c \{x + j_1\}^- + k_c \{x - j_2\}^+ = p \cos \omega t \quad (90)$$

où $\{\cdot\}^-$ et $\{\cdot\}^+$ désignent les parties négatives et positives d'un nombre, et $j_1 > 0$ et $j_2 > 0$ sont les jeux des cotés des x négatifs et positifs.

L'exploitation d'origine de cette expérience a été réalisée en 1996 par Delangre *et al.* [95]. Dans ce papier, des comparaisons essais-calculs ont été menées en faisant varier la fréquence et l'amplitude de sollicitation, la raideur de choc, et surtout la symétrie des jeux de contact. Des régimes périodiques et chaotiques ont alors été observés et reproduits par intégration temporelle avec Cast3M.

La remise en service de l'expérience et son exploitation a permis de confronter aux résultats expérimentaux les prédictions numériques obtenues par les méthodes fréquentielles présentées.

Route vers le chaos par doublement de période : Afin de faciliter l'analyse du système et d'améliorer la robustesse des outils numériques, on adimensionne les quantités :

$$\begin{aligned} x(t) &= j_1 \bar{x}(t) & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} & \tau &= \omega_0 t & (91) \\ c &= 2\omega_0 m \zeta & \omega &= \bar{\omega} \omega_0 & p &= k j_1 \bar{p} \\ j_2 &= j_1 \bar{j} & \alpha &= \bar{\alpha} \frac{k}{j_1^2} & k_c &= \bar{k}_c k \end{aligned}$$

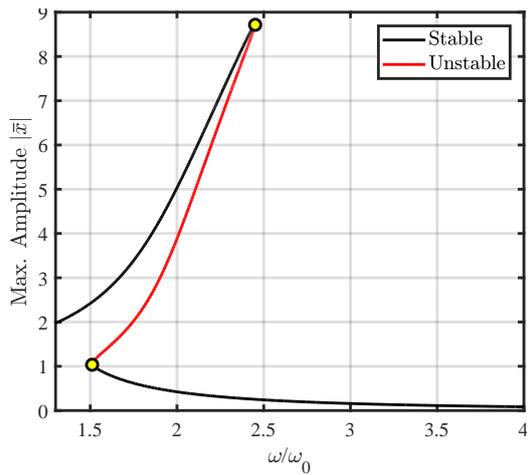
Cela permet d'écrire l'équation de la dynamique sous la forme :

$$\bar{x}''(\tau) + 2\zeta \bar{x}'(\tau) + \bar{x}(\tau) + \bar{\alpha} \bar{x}^3(\tau) + \bar{k}_c \{\bar{x} + 1\}^- + \bar{k}_c \{\bar{x} - \bar{j}\}^+ = \bar{p} \cos(\bar{\omega} \tau) \quad (92)$$

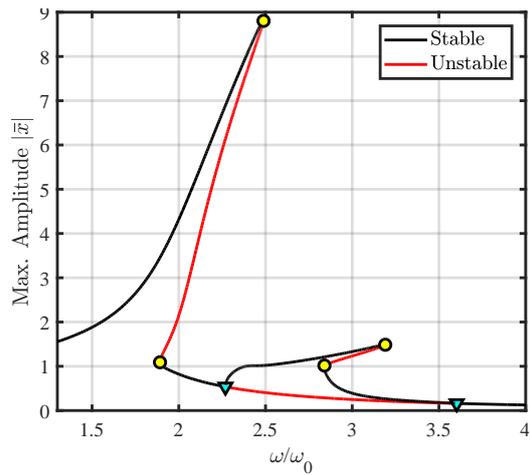
Les courbes de réponses obtenues pour plusieurs configurations de jeu relatif \bar{j} et d'amplitude de forçage \bar{p} sont tracées figures 70. La discrétisation fréquentielle utilise $H = 15$ harmoniques et 256 points sont utilisés pour l'AFT.

On observe que l'asymétrie du système provoque l'apparition d'une paire de points de doublement de période (PD) correspondant au début et la fin d'une branche solution $2T$ -périodique. Pour des faibles forçages (figure 70b), cette branche $2T$ -périodique a été construite et elle s'avère être stable. Pour une valeur de forçage élevée (figure 70d), cette branche devient instable lorsqu'un second doublement de période apparaît et permet la naissance d'une nouvelle branche $4T$ -périodique. Bien que non représenté ici, ce phénomène se reproduit en cascade et constitue une des routes vers le chaos.

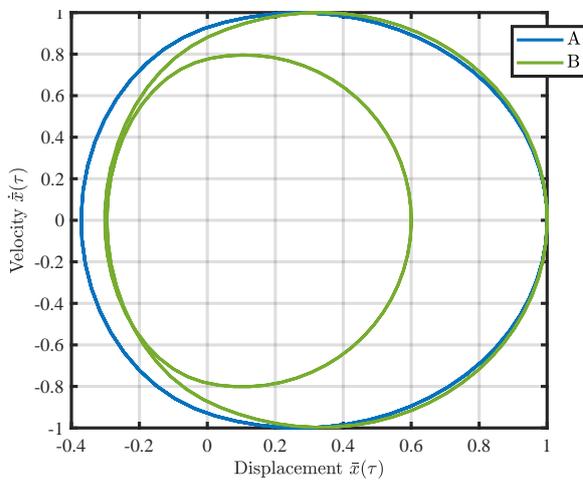
Avec les outils mis en place, les points de PD sont suivis dans l'espace $(\bar{x}, \bar{\omega}, \bar{p})$ figure 71. La même analyse a été réalisée dans le plan $(\bar{x}, \bar{\omega}, \bar{k}_c)$ mais n'est pas présentée dans ce mémoire (voir [33]).



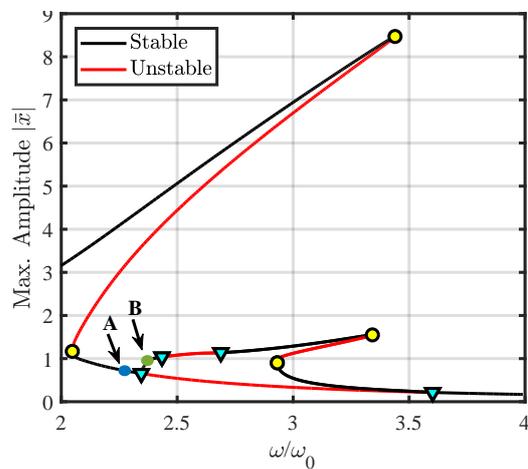
(a) Cas symétrique et faible chargement ($\bar{j} = 1, \bar{p} = 0.55$)



(b) Cas asymétrique et faible chargement ($\bar{j} = 0, \bar{p} = 0.55$)

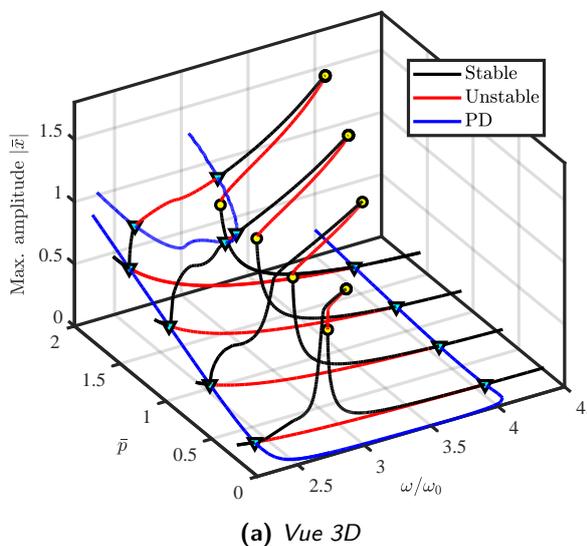


(c) Portrait de phase des solution A et B de la figure 70d

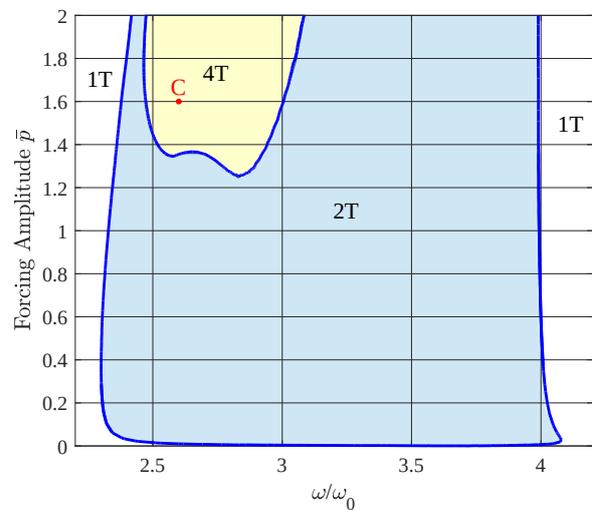


(d) Cas asymétrique et chargement élevé ($\bar{j} = 0, \bar{p} = 1.7$)

Figure 70 – Courbes de réponses de Koala (○ : point limite, ▽ : point de doublement de période)



(a) Vue 3D



(b) Vue dans le plan ($\bar{\omega}, \bar{p}$)

Figure 71 – Suivi des points de doublement de période (PD)

Les frontières des régions T , $2T$ et $4T$ -périodiques sont bien visibles et permettent de déterminer une zone à l'intérieur de laquelle une transition chaotique peut être observée. En fixant $\bar{p} = 1.6$ et $\bar{k}_c = 4.2$, on calcule par intégration temporelle la réponse "stationnaire" (après 1000 périodes) du système et on trace l'amplitude des sections de Poincaré sur les 100 dernières périodes. On obtient ainsi la diagramme de bifurcation figure 72a. Il montre que la branche $4T$ -périodique est très mince

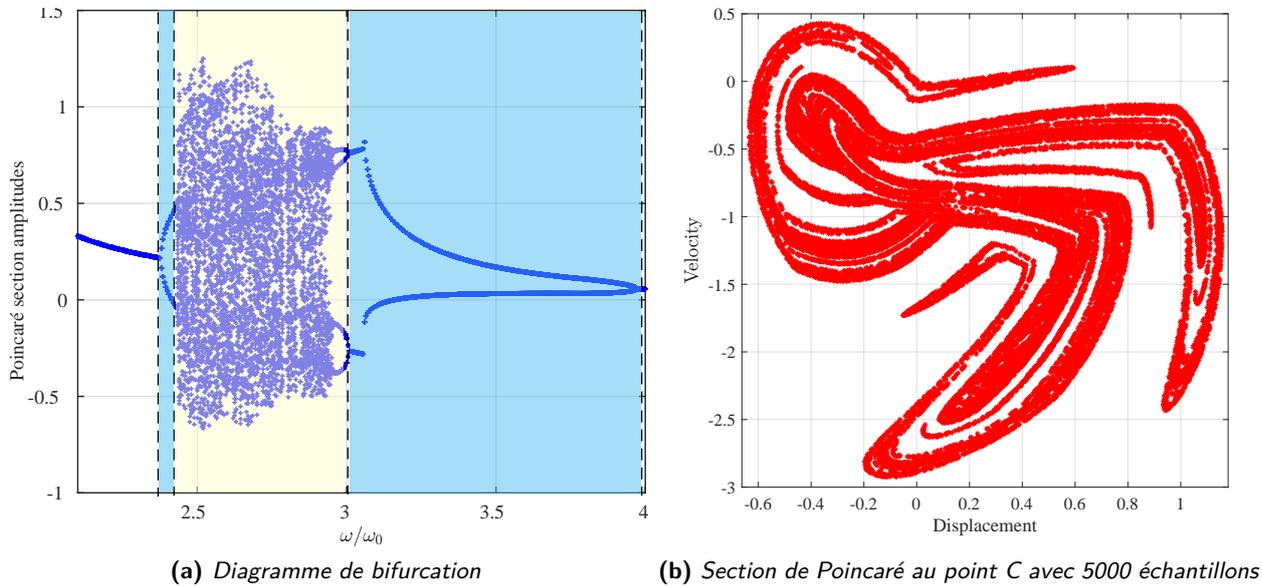


Figure 72 – Observation du régime chaotique

et que la transition vers le chaos est abrupte. La section de Poincaré obtenu pour $\bar{\omega} = 2.6$ (point C de la figure 71b) est reproduite figure 72b. Ces résultats sont à comparer aux comparaisons essais-calculs obtenues précédemment par [95] et reproduites figure 73. Une très bonne corrélation est observée.

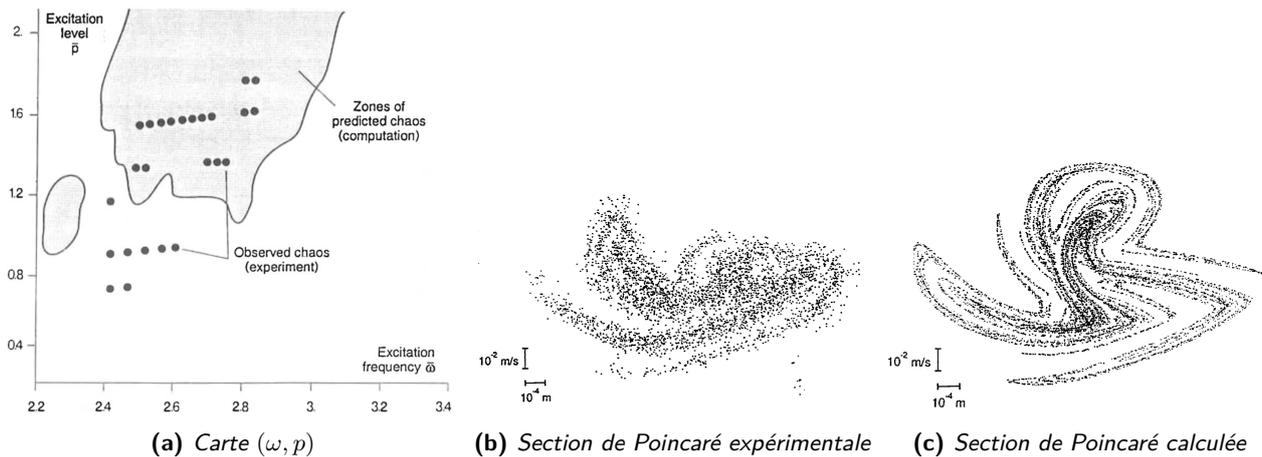


Figure 73 – Résultats numériques et expérimentaux obtenus par [95]

Détection d'isola : L'asymétrie du système (i.e. \bar{j}) est déterminante pour l'apparition de la branche $2T$ -périodique. Ainsi, un suivi des points DP et LP en fonction du paramètre \bar{j} est judicieux. La figure 74 montre que cette branche de solution existe jusqu'à une valeur \bar{j}_{det} de détachement. Ensuite, elle existe de manière isolée du reste de la courbe jusqu'à \bar{j}_{max} . Cette isola n'est pas détectable par le simple calcul de courbes de réponse par continuation du paramètre $\bar{\omega}$. C'est bien le suivi des points singuliers qui a permis sa mise en évidence. Partant d'un des deux points

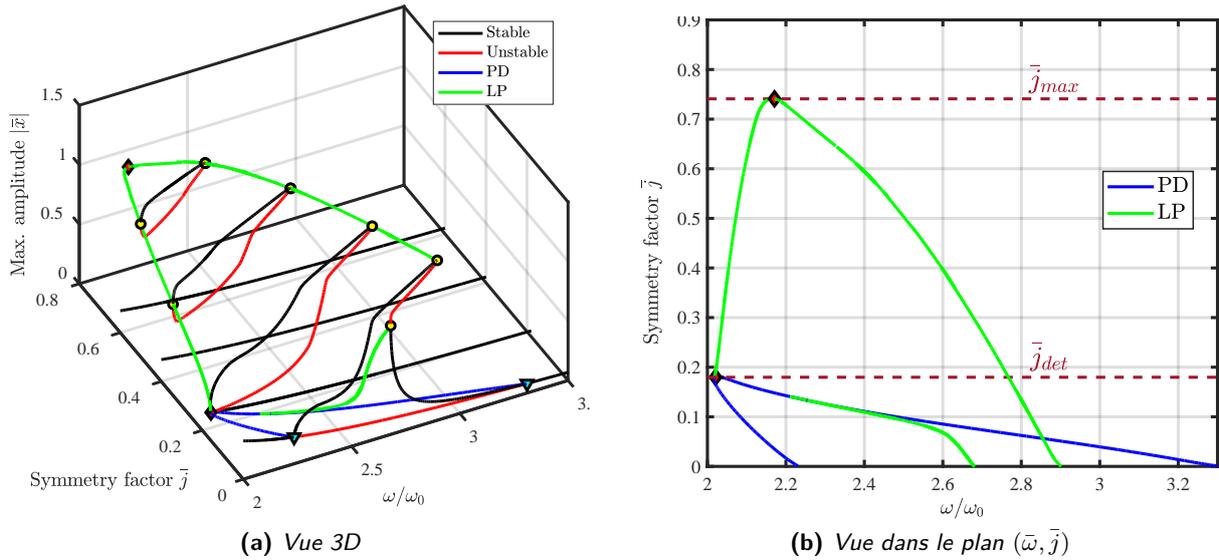


Figure 74 – Suivi des points de doublement de période (PD)

limites de l'isola $2T$ -périodique, il devient alors possible de calculer l'isola pour une valeur de \bar{j} fixe comme on le voit figure 75a.

L'existence de cette isola a été observée expérimentalement sur la plage $\bar{\omega} \in [2.03, 2.51]$. La figure 75b montre les deux régimes de basses amplitudes $1T$ et $2T$ -périodiques expérimentaux.

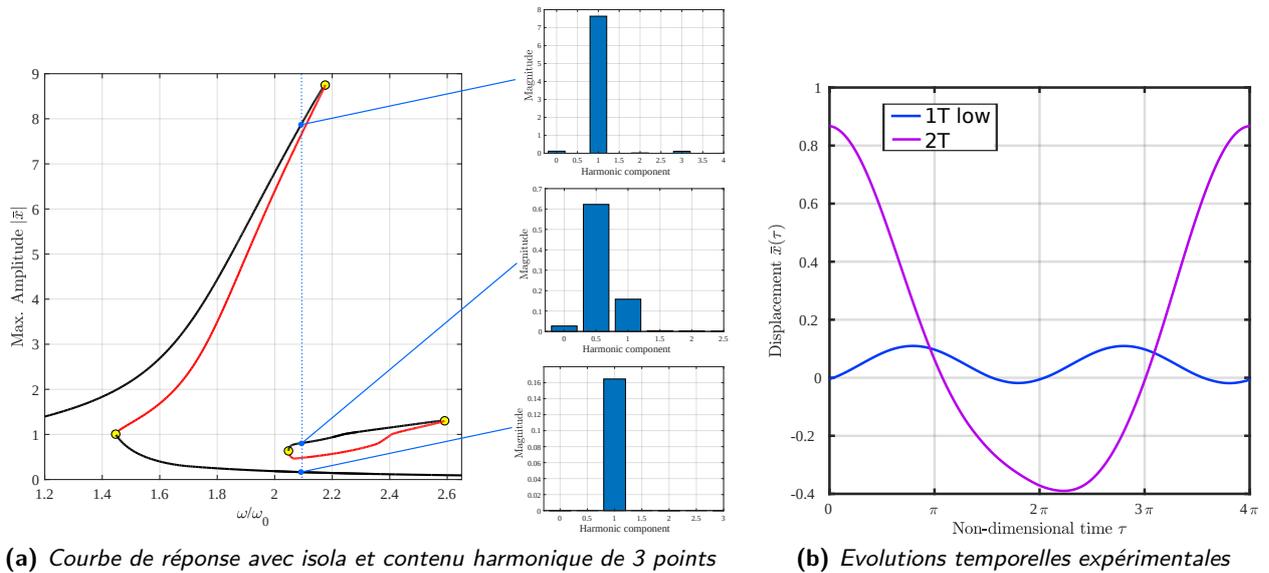


Figure 75 – Réponse isolée $2T$ -périodique

4.6.3 Couplage fluide-élastique (TGV-ICE)

Modèle : Le couplage fluide-élastique est une autre composante essentielle à l'analyse d'un modèle non-linéaire de tube de GV. A cette fin, on utilise ici le modèle de Granger-Paidoussis présenté au § 4.3.2.

A partir des expressions (59) et (57c), et en supposant les variations de ρ_f et V négligeables dans le calcul des intégrales de (59), on peut identifier directement des termes de raideur et amortissement constants à ajouter à ceux de la structure :

$$K_{s+f} = K_s - \frac{1}{2} \rho_f V^2 \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \tilde{u}} \alpha_0 \Lambda \quad C_{s+f} = C_s + \frac{1}{2} \rho_f V D C_{Drag} \Lambda \quad (93)$$

où $\Lambda = \text{diag}(\int_{\text{tube}} \phi(x)^2 dx)$. Le reste de l'expression de la force fluide-élastiques étant un produit de convolution dans le domaine temporel, il devient un simple produit dans le domaine fréquentiel. Finalement, la matrice de raideur dynamique contient les forces linéaires et de couplage fluide-élastique :

$$Z_{s+f}(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes M_{s+f} + \omega \nabla \otimes C_{s+f} + I_{(2H+1)} \otimes K_{s+f} + \sum_{k=1,N} \alpha_k \delta_k (D_k(\omega) \otimes \Lambda) \left[\delta_k \frac{V}{D} I_L - \omega \nabla \otimes I_n \right] \quad (94)$$

où la matrice diagonale $D_k(\omega)$ vaut :

$$D_k^j(\omega) = \frac{1}{(\delta_k \frac{V}{D})^2 + (j\omega)^2} I_2 \quad (95)$$

On remarque que Z n'est pas une fonction quadratique de ω mais présente aussi des termes de fraction rationnelle via D_k . Afin d'éviter cela, il est également possible de reformuler les efforts fluide-élastiques à la façon de [101] en ajoutant comme variables auxiliaires $s_k(t) = \int_0^t e^{-\delta_k \frac{V}{D}(t-\tau)} \cdot q(\tau) d\tau$ et les équations différentielles associées : $\dot{s}_k(t) = -\delta_k \frac{V}{D} s_k(t) + q(t)$. Nous ne présenterons pas cette approche ici.

Le système étant autonome par nature, une équation de fermeture doit être ajoutée au système. Souvent, une équation de phase est utilisée à cette fin en imposant par exemple une vitesse nulle à $t = 0$. Cependant, nous avons fait le choix dans ce travail d'imposer la conservation de l'énergie au cours d'un cycle :

$$e_{\text{cycle}} = \int_0^T \dot{q}^*(\tau) \cdot f_{nc}(\tau) d\tau = 0 \quad (96)$$

où f_{nc} désigne les forces non-conservatives. Cette contrainte globale a un sens physique qui rejoint la définition d'un cycle limite auto-entretenu.

Expérience TGV-ICE : L'expérience TGV-ICE (représentée figure 76) réalisée au laboratoire DYN du CEA sur la boucle d'essai DIVA est constituée d'un faisceau de tubes courts à pas carré.

Le tube central (en vert sur la figure 76) est supporté par une lame mince le rendant flexible dans le sens de la portance, c'est-à-dire dans la direction orthogonale à l'écoulement (représenté par des flèches bleu).

La présence de butée (en rouge sur la figure 76) limite l'amplitude du déplacement, permettant de tendre à un système proche de celui des tubes de GV eux-même contraints par la présence de barres anti-vibratoires.

Résultats obtenus par intégration temporelle : Cette configuration élémentaire a été largement étudiée dans le domaine temporel par [108, 112, 28].

En particulier, l'existence de deux régimes : mono- et bi-impact, a été mise en évidence.

Des calculs pour $n = 1$ mode par intégration temporelle dans GERBOISE en "balayant" de manière croissante puis décroissante sur les paramètres de vitesse d'écoulement V et d'amortissement ξ ont tous deux permis de visualiser l'hystérésis limitant la coexistence des deux régimes (figure 77 pour le balayage en vitesse). On note également que pour un jeu de paramètres fixés (V, ξ), la fréquence centrale de Rice est la même pour les deux régimes.

Pour $n = 3$ modes, les régimes obtenus par intégration temporelle sont plus variés et non-nécessairement périodiques, comme illustré figure 78.

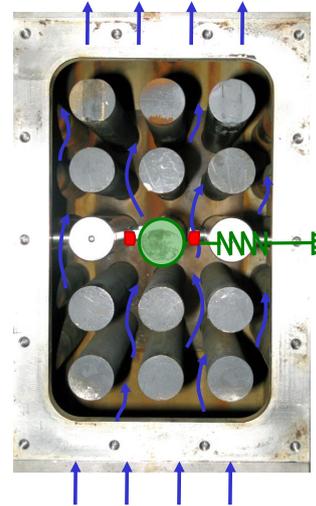


Figure 76 – Expérience TGV-ICE

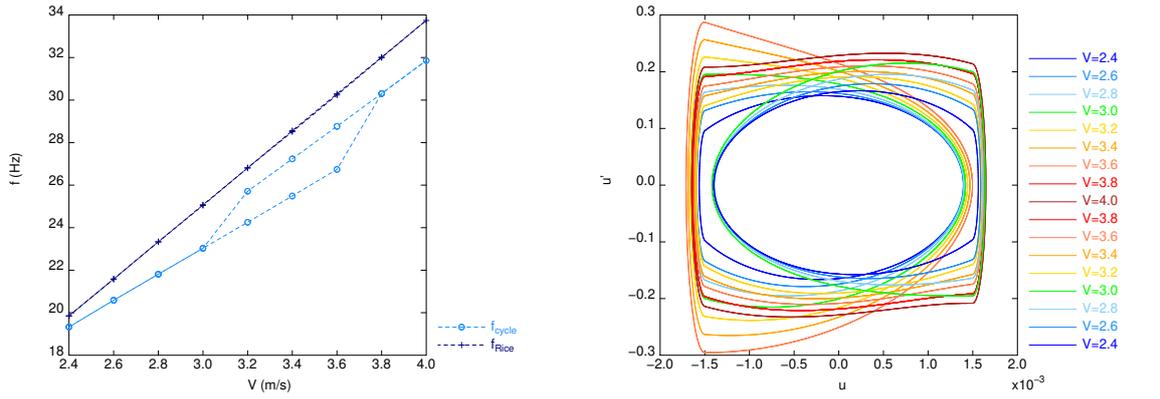
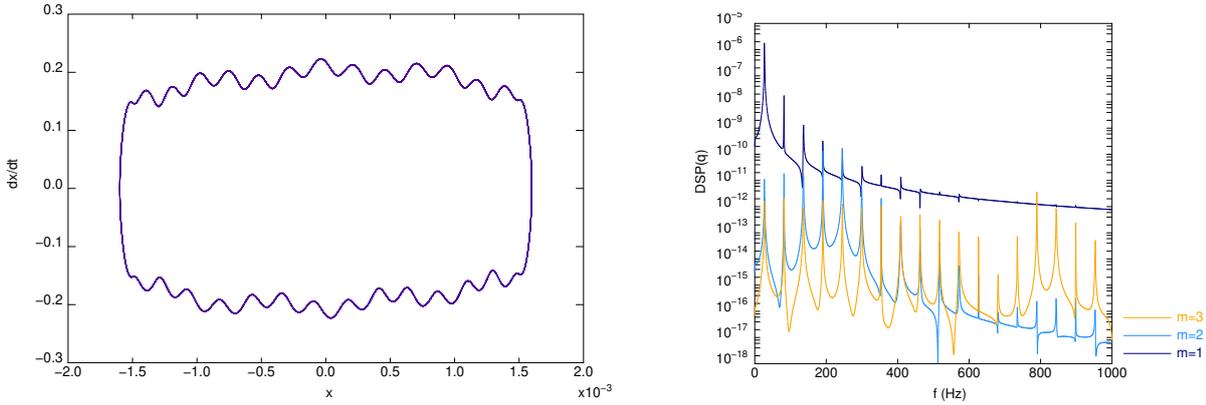
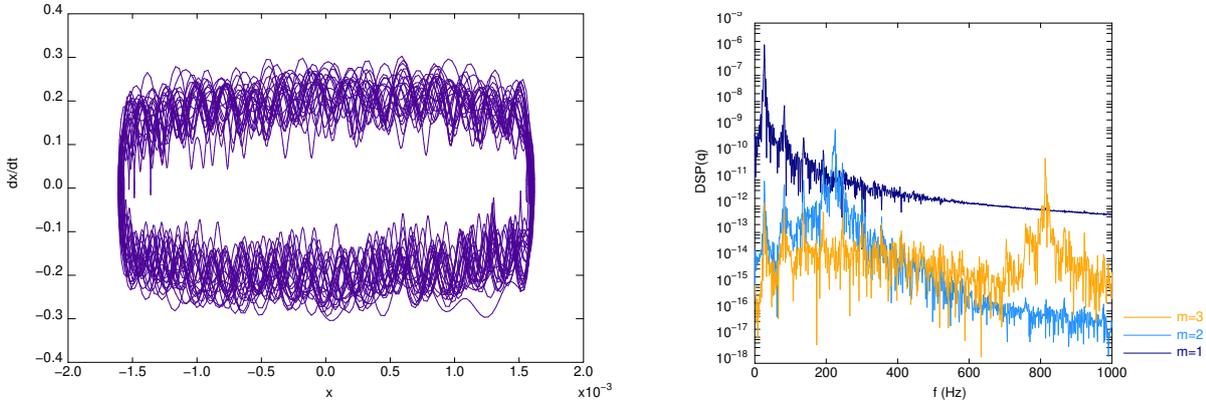


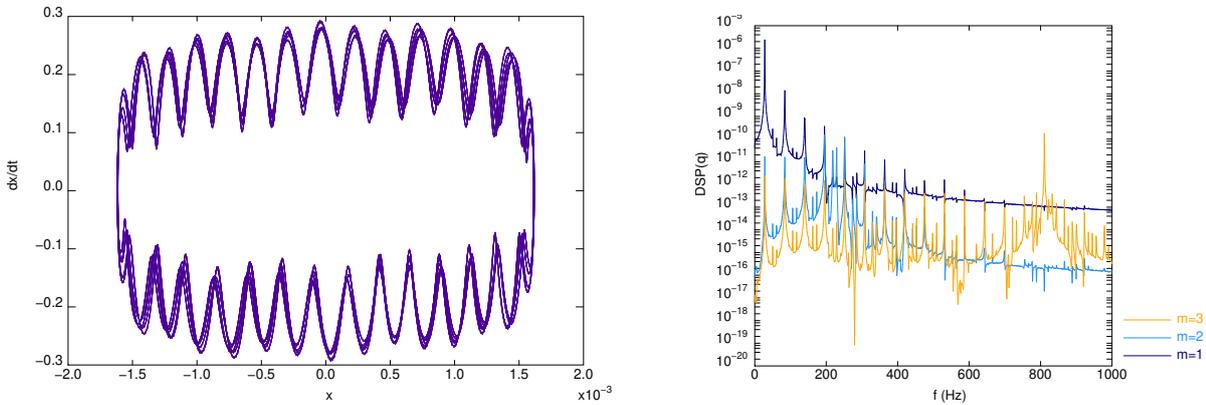
Figure 77 – Evolution avec V des fréquences et portraits de phase par intégration temporelle pour $n = 1$ mode



(a) $V = 3.4$ m/s (V croissant)



(b) $V = 3.5$ m/s (V croissant)



(c) $V = 3.9$ m/s (V croissant)

Figure 78 – Portraits de phase et DSP sur $t \in [31.95, 32.77]$ s obtenus par intégration temporelle pour $n = 3$ modes

La fréquence principale du premier mode en fonction de la vitesse d'écoulement est néanmoins représentée figure 79. Des paliers caractéristiques des résonances internes sont observés. Une analyse fréquentielle devrait retrouver ce phénomène.

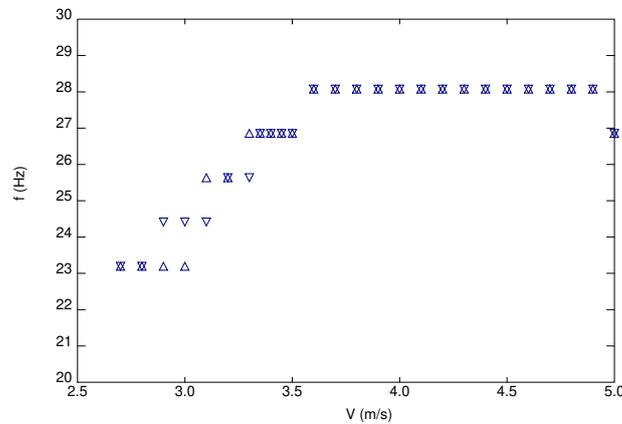
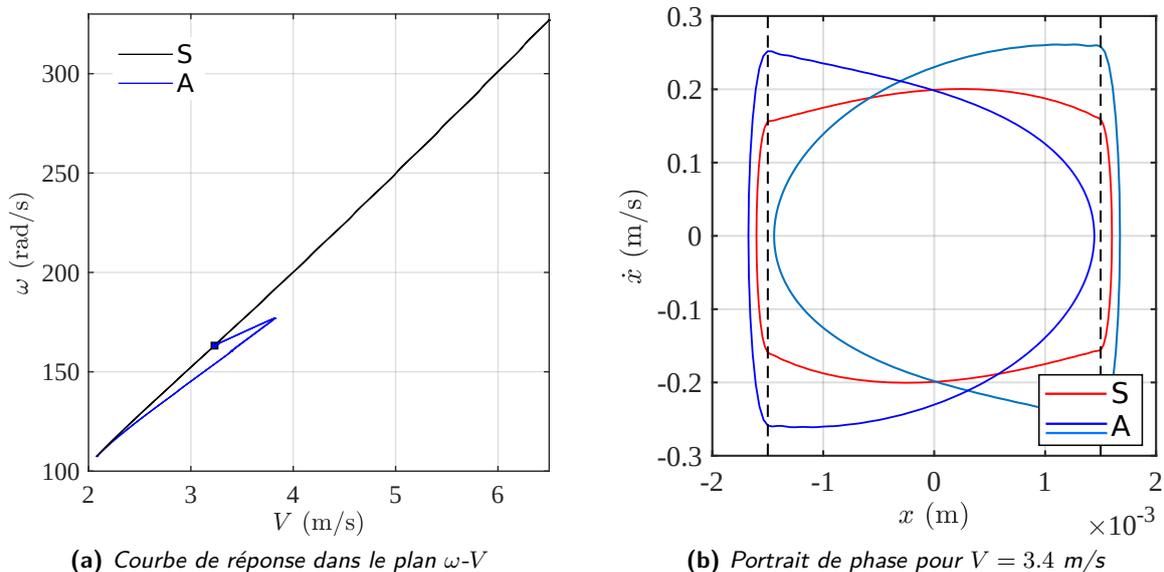


Figure 79 – Fréquence du plus grand pic de la DSP du mode 1 en fonction de la vitesse d'écoulement V (Δ : montée en vitesse, ∇ : descente en vitesse)

Résultats obtenus par HBM pour 1 mode : Conformément aux observations expérimentales, le modèle prédit une vitesse critique de $V_{\text{crit}} = 2.05$ m/s. L'analyse linéaire de stabilité montre une bifurcation de Hopf et donc le passage d'un point fixe (tube immobile) vers une solution périodique. A partir de ce point, la continuation avec V de la branche périodique est réalisée avec un équilibrage harmonique comptant $H = 30$ harmoniques.

Les courbes de réponse figure 80 montrent la coexistence de deux régimes pour les vitesses comprise entre V_{crit} et 3.65 m/s. Le portrait de phase tracé pour $V = 3.4$ m/s montre qu'il s'agit bien des régimes mono- et bi-impact déjà observés lors des précédentes études, qu'on note respectivement A^{\pm} et S en référence à la (non-)symétrie du portrait de phase. S'agissant de travaux en cours, l'analyse de stabilité n'a pas été complètement validée et n'est donc pas représentée sur ces figures. On peut toutefois affirmer sans grand risque que la branche S est instable jusqu'à la bifurcation (■) où elle rejoint la branche A^{\pm} , puis devient stable. La branche A^{\pm} quant à elle est très vraisemblablement stable jusqu'au point limite. Ainsi, ces deux régimes coexistent et sont stables seulement sur la plage $V \in [3.15, 3.65]$ m/s.



(a) Courbe de réponse dans le plan ω - V

(b) Portrait de phase pour $V = 3.4$ m/s

Figure 80 – Réponse du système TGV-ICE pour $n = 1$ mode

Résultats obtenus par HBM pour 2 et 3 modes : Comme remarqué précédemment au § 4.3.3, les résultats peuvent se complexifier rapidement avec le nombre de modes retenus dans le modèle. Les figures 81 et 82 présentent respectivement les courbes de réponse et portraits de phase obtenus pour $n = 2$ et $n = 3$ modes.

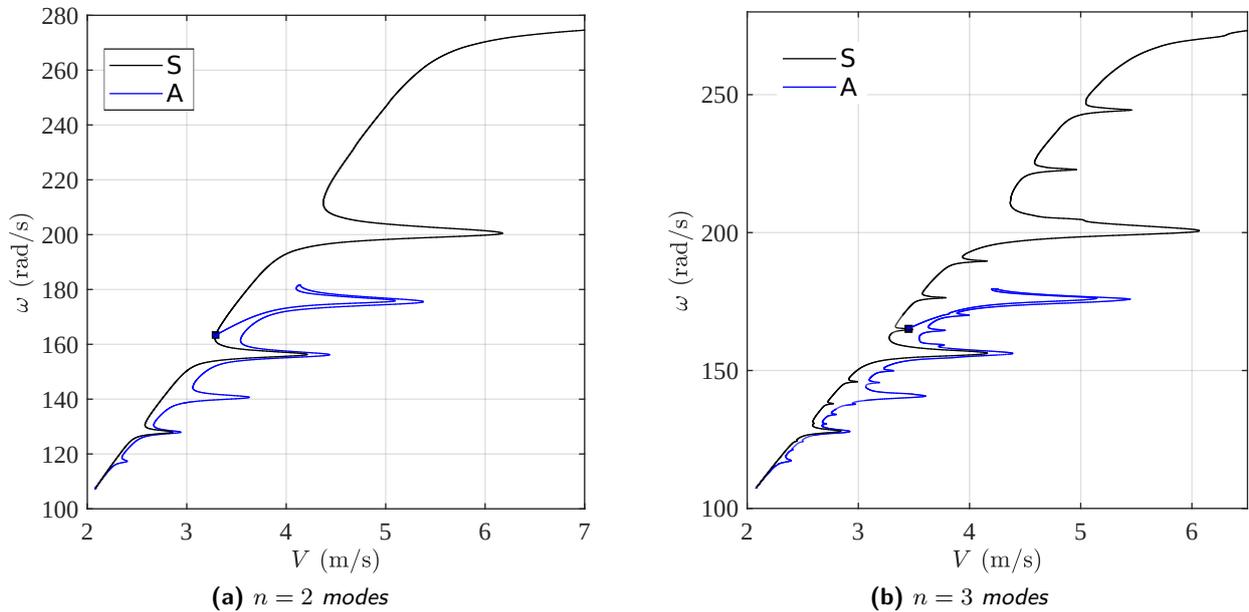


Figure 81 – Courbe de réponse dans le plan ω - V

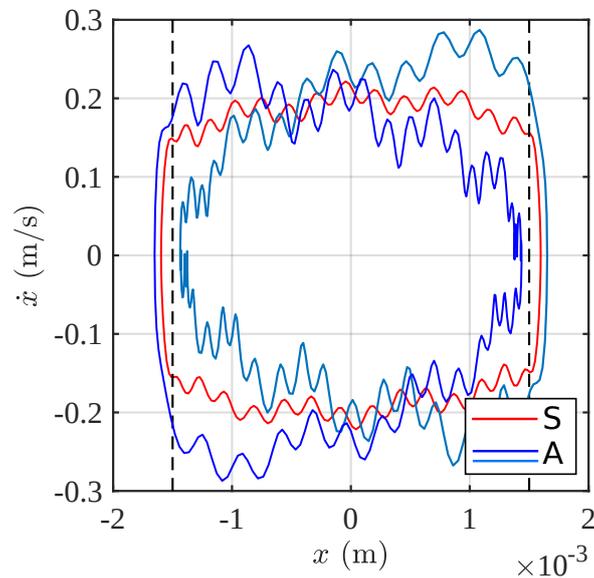


Figure 82 – Portrait de phase pour $V = 3.4$ m/s et $n = 3$ modes

La tendance globale du système reste une augmentation de la fréquence avec la vitesse d'écoulement. Par rapport au cas $n = 1$, la présence de plusieurs modes conduit à des phénomènes d'interaction modales et de résonances locales ("pics" horizontaux de la figure 81) dont le nombre augmente et l'amplitude diminue avec le nombre de modes.

On note que le portrait de phase "S" de la figure 82 est proche de celui présenté figure 78a par intégration temporelle. Aucun régime "A" n'a été obtenu par intégration temporelle. Une analyse de stabilité est donc impérative afin de compléter l'analyse fréquentielle réalisée. Sa mise en oeuvre fait l'objet de travaux en cours.

4.7 Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, ont été présentés succinctement les méthodes d'analyses vibratoires utilisées dans les codes BRASERO et GERBOISE fonctionnant sur base Cast3M. Dans la pratique, les analyses de machines tournantes sont souvent limitées à des hypothèse linéaires, et les cas non-linéaires traités par intégration temporelle. De la même façon, la problématique des vibrations des tubes de GV est traitée principalement par intégration temporelle. Une modélisation sur base modale est souvent adoptée et permet une discrétisation spatiale réduite et efficace.

Cependant, la compréhension des systèmes dynamiques non-linéaires demande d'analyser l'ensemble des régimes observables et l'intégration temporelle ne permet d'en n'apercevoir souvent qu'une partie. Des approches probabilistes ou en balayant l'intervalle d'un paramètre peuvent permettre d'explorer un espace plus large du système, mais le cout de calcul associé reste élevé.

Nos recherches se sont ainsi logiquement orientées vers la mise en place d'outils d'analyse de systèmes non-linéaires par continuation dans le domaine fréquentiel. Ils permettent d'obtenir directement l'évolution de solutions périodiques sous la forme de courbes de réponses. Dans un deuxième temps, la détection et le suivi des bifurcations permet de cartographier les limites des régimes identifiés. Des applications variées ont montré l'intérêt de la méthode.

Une prochaine étape dans ces activités de recherche consisterait à permettre à notre code de traiter le cas des solutions quasi-périodiques pour lesquelles il faudra utiliser une base de la forme : $\mathcal{T}(\omega_1 t) \otimes \mathcal{T}(\omega_2 t)$ où ω_1 et ω_2 sont deux fréquences incommensurables. Cette méthode spectrale bien connue (cf. § 4.3.2 de [129] par ex.) permettrait d'approfondir certains cas comme ceux présentés ici et dans [97, 111, 115] par exemple.

Une autre fonctionnalité à intégrer dans Cast3M est la possibilité d'utiliser une discrétisation de type "éléments finis" du temps (appelée méthode de collocation), afin d'évaluer quelle discrétisation est la plus adaptée en présence de choc. Ce type d'étude a déjà été entreprise par [110] mais sans raffinement de la discrétisation. Pour des problèmes raides, le raffinement permis par une méthode de collocation semble *a priori* plus approprié car il localise dans le temps la non-linéarité et, contrairement à la décomposition de Fourier, ne souffre pas du phénomène de Gibbs.

Finalement, si la recherche de solutions périodiques se trouve vite limitée lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, la connaissance des frontières des régimes dynamiques du système réduit sur ses premiers modes apporte une connaissance fondamentale qui permet de cibler les simulations par intégration temporelle qui peuvent être menées pour un nombre arbitraire de modes. La consolidation et l'amélioration de ces schémas constitue également un axe de progrès envisagé.

4.8 Bibliographie du chapitre

- [78] W. A. Lester. De Vogelaere's method for the numerical integration of second-order differential equations without explicit first derivatives : Application to coupled equations arising from the schro" dinger equation. *Journal of Computational Physics*, 3(2) :322–326, 1968.
- [79] C. Fu. On the stability of explicit methods for the numerical integration of the equations of motion in finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4(1) :95–107, 1972.
- [80] R.-H. Wu and E. Witmer. Stability of the De Vogelaere method for timewise numerical integration. *AIAA Journal*, 11(10) :1432–1436, 1973.
- [81] H. M. Hilber, T. J. Hughes, and R. L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) :283–292, 1977.
- [82] J. P. Coleman and J. Mohamed. On de Vogelaere's method for $y''=f(x,y)$. *Mathematics of Computation*, 32(143) :751–762, 1978.
- [83] G. Moore and A. Spence. The calculation of turning points of nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(4) :567–576, 1980.
- [84] M. Crisfield. An arc-length method including line searches and accelerations. *International journal for numerical methods in engineering*, 19(9) :1269–1289, 1983.
- [85] A. Griewank and G. Reddien. The calculation of hopf points by a direct method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 3(3) :295–303, 1983.
- [86] C. Pierre, A. Ferri, and E. Dowell. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Journal of applied mechanics*, 52 :958–964, 1985.
- [87] A. Cardona and M. Géradin. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis. *Computers & structures*, 33(3) :801–820, 1989.
- [88] E. De Langre, B. Beaufils, and H. Paurobally. Code GERBOISE. Description de la version 1. Note Technique DMT/89.335, CEA, 1989.
- [89] J. Antunes, F. Axisa, B. Beaufils, and D. Guilbaud. Coulomb friction modelling in numerical simulations of vibration and wear work rate of multispan tube bundles. *Journal of Fluids and Structures*, 4 :287–304, 1990.
- [90] Y. Cheung, S. Chen, and S. Lau. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2) :273–286, 1990.
- [91] L. Vivan, L. De Langre, and D. Brochard. Calcul non-linéaire dynamique : Description de l'opérateur DYNE de CASTEM 2000. Technical Report DMT/90.218, CEA, 1990.
- [92] F. Axisa, E. De Langre, H. Bung, J. Antunes, and F. Doveil. Méthodes d'analyse en dynamique non-linéaire des structures. Journées IPSI DMT/91.575, CEA, 1991.
- [93] E. De Langre, L. Vivan, and T. Lena. Code GERBOISE. Description de la version 2. Note Technique DMT/91.188, CEA, 1991.
- [94] J. Chung and G. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- α method. *Journal of applied mechanics*, 60(2) :371–375, 1993.
- [95] E. de Langre and G. Lebreton. An experimental and numerical analysis of chaotic motion in vibration with impact. In *Flow-Induced Vibration*, volume 328, pages 317–325. ASME, 1996.
- [96] S. Granger and M. Paidoussis. An improvement to the quasi-steady model with application to cross-flow-induced vibration of tube arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, 320 :163–184, 1996.
- [97] Y.-B. Kim and S. Noah. Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2) :239–253, 1996.

- [98] G. Von Groll and D. J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of sound and vibration*, 241(2) :223–233, 2001.
- [99] J.-J. Sinou. *Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [100] J. Inayat-Hussain, H. Kanki, and N. Mureithi. On the bifurcations of a rigid rotor response in squeeze-film dampers. *Journal of Fluids and Structures*, 17(3) :433–459, Mar 2003.
- [101] N. Wagner and S. Adhikari. Symmetric state-space method for a class of nonviscously damped systems. *AIAA journal*, 41(5) :951–956, 2003.
- [102] J.-J. Sinou and A. Lees. The influence of cracks in rotating shafts. *Journal of Sound and Vibration*, 285(4-5) :1015–1037, 2005.
- [103] D. Combescure and A. Lazarus. Refined finite element modelling for the vibration analysis of large rotating machines : Application to the gas turbine modular helium reactor power conversion unit. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4) :1262–1280, 2008.
- [104] A. Lazarus. *Influence des défauts sur le comportement vibratoire des systèmes tournants*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2008.
- [105] J. Jiang. Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*, 57(3) :351–361, 2009.
- [106] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510–517, 2010.
- [107] L. Peletan. *Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2012.
- [108] P. Piteau, X. Delaune, J. Antunes, and L. Borsoi. Experiments and computations of a loosely supported tube in a rigid bundle subjected to single-phase flow. *Journal of fluids and structures*, 28 :56–71, 2012.
- [109] G. Jacquet-Richardet, M. Torkhani, P. Cartraud, F. Thouverez, T. N. Baranger], M. Herran, C. Gibert, S. Bague, P. Almeida, and L. Peletan. Rotor to stator contacts in turbomachines. review and application. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 40(2) :401 – 420, 2013.
- [110] S. Karkar, B. Cochelin, and C. Vergez. A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2554–2567, Jun 2014.
- [111] L. Peletan, S. Bague, M. Torkhani, and G. Jacquet-Richardet. Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 78(4) :2501–2515, 2014.
- [112] P. Piteau, L. Borsoi, X. Delaune, I. Politopoulos, and J. Antunes. Computation of a loosely supported tube under cross-flow by a hybrid time–frequency method. In *Pressure Vessels and Piping Conference*. ASME, 2015.
- [113] B. Prabel. Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M. Note Technique SEMT/DYN/NT/15-012/A, CEA, 2015.
- [114] L. Xie. *Suivi numérique des bifurcations pour l’analyse paramétrique de la dynamique non-linéaire des rotors*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2016.
- [115] L. Guillot, P. Vigué, C. Vergez, and B. Cochelin. Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 394 :434–450, 2017.
- [116] B. Prabel and P. Piteau. Dossier de Développement GERBOISE 4.11. Note Technique DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/17-014/A, CEA, 2017.
- [117] R. Blevins. Nonproprietary flow-induced vibration analysis of san onofre nuclear generating station replacement steam generators to asme code section iii appendix n. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 140(3), 2018.

-
- [118] L. Guillot, B. Cochelin, and C. Vergez. A generic and efficient taylor series-based continuation method using a quadratic recast of smooth nonlinear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 119(4) :261–280, 2019.
- [119] E. L. Allgower and K. Georg. *Numerical continuation methods : an introduction*. Springer Science & Business Media, 1990.
- [120] F. Axisa and J. Antunes. *Modelling of mechanical systems : Fluid-structure interaction*, volume 3. Elsevier, 2006.
- [121] F. R. Gantmacher and J. L. Brenner. *Applications of the Theory of Matrices*. Interscience, 1959.
- [122] G. Genta. *Dynamics of rotating systems*. Springer, New York, 2005.
- [123] J. Gibert, René. *Vibrations des structures. Interactions avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*. CEA-EDF-INRIA, 1988.
- [124] M. Krack and J. Gross. *Harmonic balance for nonlinear vibration problems*. Springer, 2019.
- [125] Y. A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer, 2004.
- [126] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Wiley, 1998.
- [127] J. Mathews and R. Howell. *Complex analysis for mathematics and engineering*. Jones & Bartlett Publishers, 2006.
- [128] E. d. L. Michael Paidoussis, Stuart Price. *Fluid-Structure Interactions : Cross-Flow-Induced Instabilities*. Cambridge University Press, 1 edition, 2010.
- [129] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [130] R. Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer, 2010.
- [131] R. Alcorta. *à paraître*. PhD thesis, INSA de Lyon, soutenance prévue fin 2020.
- [132] A. Vollan and L. Komzsik. *Computational techniques of rotor dynamics with the finite element method*. CRC Press, 2012.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Le CEA fournit à l'industrie énergétique son expertise sur l'analyse des structures et de leur intégrité. La modélisation occupe une place essentielle pour répondre à ces analyses. Elle implique le choix du modèle mathématique pertinent, d'une discrétisation adaptée et des méthodes numériques efficaces pour résoudre le problème discrétisé posé.

Dans ce mémoire, j'ai essayé à travers l'exemple de la modélisation de propagation de fissure et des vibrations non-linéaires de montrer comment une activité de recherche en collaboration avec le monde académique permet de proposer des discrétisations judicieuses pour le problème traité et ainsi améliorer les outils de modélisation et d'analyse utilisés à des fins industrielles par le CEA et ses partenaires.

Une dernière étape à ne pas négliger, consiste à effectivement intégrer ces modèles et méthodes dans l'outil de capitalisation du CEA en mécanique des structures : Cast3M. Généralité, robustesse, performance et documentation sont alors exigés. L'évolution et la rénovation de ce code constitue un enjeu majeur pour le CEA et je contribuerai aux actions stratégiques qui permettront son maintien au meilleur niveau scientifiques et techniques pour la prochaine décennie.

Je ne paraphraserai pas les conclusions et perspectives proposées à la fin des chapitres 3 et 4, mais j'y ajoute ici quelques orientations futures de mon activité de recherche.

Concernant la modélisation de la propagation de fissure, je prévois d'encadrer une nouvelle thèse à partir d'octobre 2020. Le travail consistera à mettre en place une approche couplant champs de phase et raffinement hiérarchique de maillage. L'objectif est de traiter des problèmes de multi-fissuration observées dans des expériences de fatigue thermique réalisées au CEA. En effet, modéliser par la méthode XFEM la naissance et la coalescence d'un réseau de fissure demanderait un trop grand effort de développement. C'est aussi l'opportunité de tester la méthode des champs de phase sur une nouvelle problématique, d'évaluer les verrous qu'elle peut lever et ses limitations. Cette méthode a déjà fait l'objet de deux thèses dans Europlexus sur la rupture du béton et de l'acier sous impact/explosion et une troisième thèse est actuellement en cours sur la fissuration des pastilles de combustibles dans Cast3M.

En dynamique, une autre thèse doit également voir le jour en octobre 2020 sur une problématique industrielle liée à l'usure des manchettes thermiques observée sur les réacteurs 1300 MW. L'objectif est d'étudier l'interaction entre dynamique des structures et cinétique d'usure par la modification des surfaces de contact.

A cette fin, un modèle à deux échelles devra être mis en place avec : d'une part, la modélisation dynamique non-linéaire sur base modale avec le contact manchette/adaptateur permettant d'obtenir le régime et donc le mouvement relatif des pièces; et d'autre part, la modélisation de l'usure abrasive nécessitant une description fine des champs mécaniques au cours d'un cycle permettant de déterminer l'évolution des surfaces de contact avec le temps.

Annexe A

Schéma d'intégration temporel de De Vogelaere

A.1 Equations du schéma d'intégration

Le schéma de De Vogelaere [78, 79, 82, 92] est d'ordre 4 et ne requiert que 2 évaluations du second membre. Il est basé sur un développement de Taylor à l'ordre 5 et 6 pour $q_{n+\frac{1}{2}}$ et q_{n+1} autour de t_n , et à l'ordre 3 et 4 pour $F_{n-\frac{1}{2}}$ et $F_{n+\frac{1}{2}}$ autour de t_n . L'utilisation respective des quadratures par les trapèzes et de Simpson permet d'exprimer les vitesses $\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}$ et \dot{q}_{n+1} .

On veut résoudre l'équilibre dynamique pour le pas de temps t_{n+1} :

$$M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} = F_{n+1}^{\text{ext}} + F_{n+1}^{\text{nl}} - Kq_{n+1} = F_{n+1} \quad (97)$$

connaissant q_n, \dot{q}_n, F_n et $F_{n+\frac{1}{2}}$. A cette fin, ainsi que détaillé dans [91, 113], on calcule :

$$q_{n+\frac{1}{2}} = q_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{24} \left(4\mathbb{F}_n - \mathbb{F}_{n-\frac{1}{2}} - \mathbb{C}(4\dot{q}_n - \dot{q}_{n-\frac{1}{2}}) \right) \quad (98a)$$

$$\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{4}{4 + \Delta t \mathbb{C}} \left(\dot{q}_n + \frac{\Delta t}{4} (\mathbb{F}_n + \mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{C}\dot{q}_n) \right) \quad (98b)$$

$$\ddot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{C}\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} \quad (98c)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{6} \left(\mathbb{F}_n + 2\mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{C}(\dot{q}_n + 2\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}) \right) \quad (98d)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{6}{6 + \Delta t \mathbb{C}} \left(\dot{q}_n + \frac{\Delta t}{6} \left(\mathbb{F}_{n+1} + 4\mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{F}_n - \mathbb{C}(4\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \dot{q}_n) \right) \right) \quad (98e)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \mathbb{F}_{n+1} - \mathbb{C}\dot{q}_{n+1} \quad (98f)$$

où les $\mathbb{F} = M^{-1} \cdot F$ et $\mathbb{C} = M^{-1} \cdot C$ sont aisément calculés puisque les matrices M et C sont supposées diagonales. L'étape (98c) est réalisée bien qu'a priori inutile. Il est par ailleurs nécessaires d'initialiser l'algorithme avec :

$$q_{-\frac{1}{2}} = q_0 - \frac{\Delta t}{2} \dot{q}_0 + \frac{\Delta t^2}{8} (\mathbb{F}_0 - \mathbb{C}\dot{q}_0) \quad (99)$$

$$\dot{q}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4 - \Delta t \mathbb{C}} \left((4 + \Delta t \mathbb{C}) \dot{q}_0 - \Delta t (\mathbb{F}_{-\frac{1}{2}} + \mathbb{F}_0) \right)$$

A.2 Stabilité

Wu et Witmer [80] ont établi la condition de stabilité de ce schéma pour des systèmes dynamiques non amortis. On propose d'étendre ce résultat au cas amorti. Il faut pour cela écrire la relation de récurrence du schéma sous la forme :

$$[P] \cdot \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+1} \\ \ddot{q}_{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = [Q] \cdot \begin{pmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \\ \ddot{q}_{n-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + (R) \quad (100)$$

et analyser les valeurs propres de la matrice d'amplification $A = P^{-1}Q$.

L'équation (100) est obtenue de la façon suivante :

- la première ligne est obtenue via l'équation (98f),
- la seconde en substituant dans (98d) les expressions de \mathbb{F}_n et $\mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}}$ obtenues par (98f) pris à t_n et par (98f),
- la troisième en substituant de la même manière dans (98e) les expressions de \mathbb{F}_n , $\mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}}$ et \mathbb{F}_{n+1} ,
- et la dernière ligne en développant l'équation (98c).

Les matrices P , Q et R ont pour expression générale :

$$P = \begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{C} & I & 0 \\ I & 0 & 0 & -\frac{\Delta t^2}{3} I \\ 0 & I & -\frac{\Delta t}{6} I & -\frac{2\Delta t}{3} I \\ 0 & 0 & 0 & I + \frac{\Delta t}{4} \mathbb{C} \end{bmatrix} \quad (101a)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & \Delta t I & \frac{\Delta t^2}{6} I & 0 \\ 0 & I & \frac{\Delta t}{6} I & 0 \\ -\mathbb{K} & -\frac{\Delta t}{2} \mathbb{K} - \mathbb{C} & -\frac{\Delta t^2}{6} \mathbb{K} - \frac{\Delta t}{4} \mathbb{C} & \frac{\Delta t^2}{24} \mathbb{K} \end{bmatrix} \quad (101b)$$

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{n+1}^{\text{ext}} + \mathbb{F}_{n+1}^{\text{nl}} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}}^{\text{ext}} + \mathbb{F}_{n+\frac{1}{2}}^{\text{nl}} \end{pmatrix} \quad (101c)$$

Supposant le système complètement découplé sur base modale considérant un mode quelconque de déformée ϕ et utilisant les notations $k \equiv \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi}$, $c \equiv \frac{\phi^T C \phi}{\phi^T M \phi}$ et $h \equiv \Delta t$, on obtient l'expression des matrices P et Q :

$$P = \begin{bmatrix} k & c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} h^2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} h & -\frac{2}{3} h \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{4} hc \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & \frac{1}{6} h^2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} h & 0 \\ -k & -\frac{1}{2} hk - c & -\frac{1}{6} h^2 k - \frac{1}{4} hc & \frac{1}{24} h^2 k \end{bmatrix} \quad (102)$$

et la matrice d'amplification A :

$$A = P^{-1} \cdot Q$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{4}{3} \frac{h^2 k}{hc+4} & h + \frac{4}{3} \frac{h^2(-\frac{1}{2}hk-c)}{hc+4} & & & \\ -\frac{hk}{hc+6} + \frac{4}{3} \frac{h(h^2k-12)k}{c^2h^2+10hc+24} & \frac{6-h^2k}{hc+6} - \frac{4}{3} \frac{h(h^2k-12)(-\frac{1}{2}hk-c)}{c^2h^2+10hc+24} & & & \\ -6 \frac{k}{hc+6} + 8 \frac{h(hk+2c)k}{c^2h^2+10hc+24} & -6 \frac{hk+c}{hc+6} - 8 \frac{h(hk+2c)(-\frac{1}{2}hk-c)}{c^2h^2+10hc+24} & & & \\ -4 \frac{k}{hc+4} & 4 \frac{-\frac{1}{2}hk-c}{hc+4} & & & \\ \frac{1}{6} h^2 + \frac{4}{3} \frac{h^2(-\frac{1}{6}h^2k-\frac{1}{4}hc)}{hc+4} & \frac{1}{18} \frac{h^4k}{hc+4} & & & \\ \frac{h-\frac{1}{6}h^3k}{hc+6} - \frac{4}{3} \frac{h(h^2k-12)(-\frac{1}{6}h^2k-\frac{1}{4}hc)}{c^2h^2+10hc+24} & -\frac{1}{18} \frac{h^3(h^2k-12)k}{c^2h^2+10hc+24} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{h^2k+hc}{hc+6} - 8 \frac{h(hk+2c)(-\frac{1}{6}h^2k-\frac{1}{4}hc)}{c^2h^2+10hc+24} & -\frac{1}{3} \frac{h^3(hk+2c)k}{c^2h^2+10hc+24} & & & \\ 4 \frac{-\frac{1}{6}h^2k-\frac{1}{4}hc}{hc+4} & \frac{1}{6} \frac{h^2k}{hc+4} & & & \end{bmatrix} \quad (103)$$

Le rayon spectral est la valeur propre de plus haut module de A . Il faut donc trouver les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \frac{\lambda}{b_0} (b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3) \quad (104)$$

$$\text{avec } b_0 = \psi^2 + 10\psi + 24$$

$$b_1 = -48 - 2\varphi^2 - \frac{17}{6}\varphi\psi - 4\psi + 23\varphi + 4\psi$$

$$b_2 = 24 - \varphi^2 + \frac{2}{3}\varphi\psi + 3\psi + 2\varphi - 14\psi$$

$$b_3 = \frac{1}{6}\varphi\psi - \varphi$$

où l'on a étendu les notations utilisées par Wu et Witmer [80] : $\varphi = h^2k$ et $\psi = hc$.
Suivant toujours [80], on utilise la transformation bilinéaire :

$$\lambda = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \quad (105)$$

et on aboutit à l'équivalence :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \delta)}{(1 - \delta)^4} (a_0 \delta^3 + a_1 \delta^2 + a_2 \delta + a_3) &= 0 \end{aligned} \quad (106)$$

$$\text{avec } a_0 = 8\psi^2 + \frac{10}{3}\varphi\psi - 8\psi + \varphi^2 - 20\varphi + 96$$

$$a_1 = 4\psi^2 + \frac{8}{3}\varphi\psi + 40\psi + 3\varphi^2 - 28\varphi + 96$$

$$a_2 = -(2\psi + \varphi - 24)(2\psi + \varphi)$$

$$a_3 = -\varphi(2\psi + 3\varphi - 24)$$

On montre facilement (cf. [127] par ex.) que $|\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow \Re(\delta) \geq 0$.

La solution évidente $\delta = -1$ vérifie ce critère.

Reste une équation du troisième degré pour laquelle on peut appliquer le théorème de Routh-Hurwitz [121].
Ce dernier stipule qu'un polynôme d'ordre n défini par $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ avec $a_0 > 0$ a

ses racines dans le demi-plan réel négatif si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\Delta_1 \equiv a_1 > 0 \quad \Delta_2 \equiv \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} > 0 \quad \dots \quad \Delta_n \equiv \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} > 0 \quad (107)$$

Afin de s'éviter le calcul du dernier déterminant (ici $n = 3$), on va utiliser le critère de stabilité de Liénard-Chipart [121] pour lequel on a à vérifier l'un des ensemble de conditions :

$$a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots \quad (108a)$$

$$a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots \quad (108b)$$

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots \quad (108c)$$

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots \quad (108d)$$

Dans notre cas $a_0 > 0$ (sauf sur une zone très restreinte proche de $(\psi \simeq 0, \phi \in [8 - 12])$) et on cherche donc les conditions qui vérifient :

$$a_3 > 0, a_1 > 0, \Delta_2 \equiv a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (109)$$

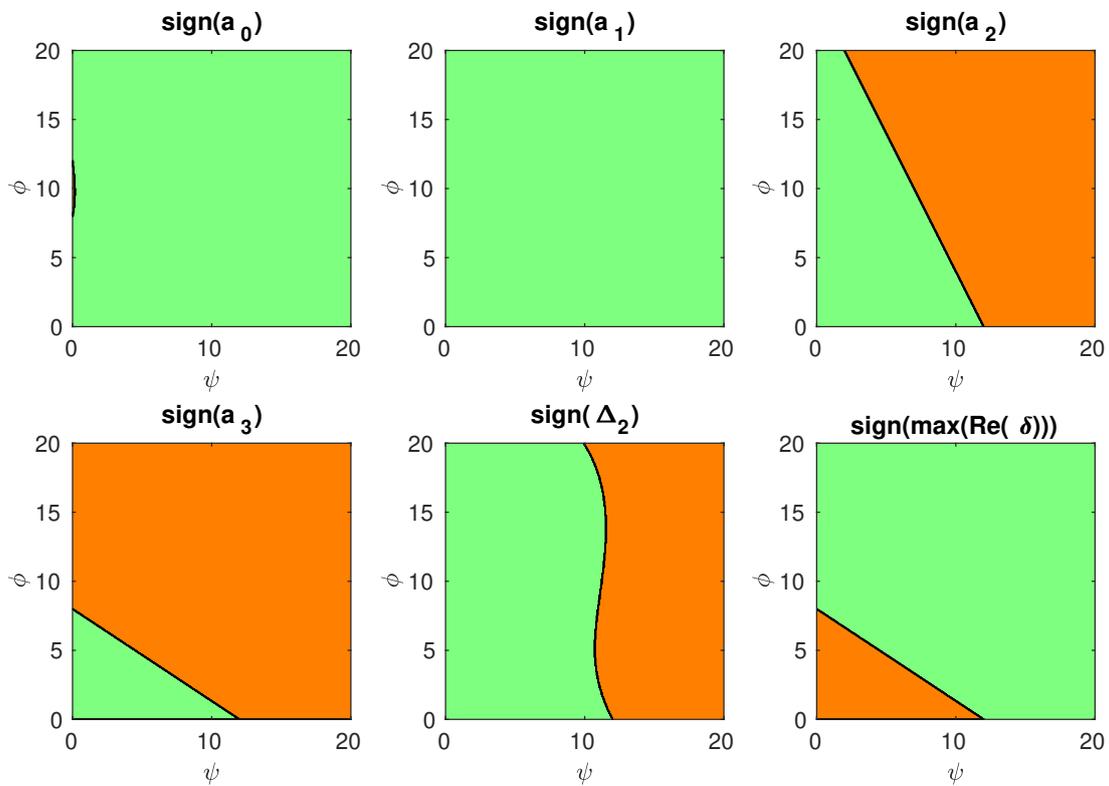


Figure 83 – *Signe des coefficients du polynôme caractéristique, du déterminant Δ_2 et de racine de plus grande valeur réelle*

Comme on peut le voir figure 83, l'inégalité la plus contraignante et celle sur a_2 et la condition nécessaire et suffisante de stabilité est :

$$a_3 \geq 0 \quad (110a)$$

$$\Leftrightarrow 24 - 3\phi - 2\psi \geq 0 \quad (110b)$$

$$\Leftrightarrow 0 < h \leq \frac{-c + \sqrt{c^2 + 72k}}{3k} \quad (110c)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \Delta t \leq \frac{2}{\omega} \left(\sqrt{\left(\frac{\xi}{3}\right)^2 + 2} - \frac{\xi}{3} \right) \quad (110d)$$

où l'on a introduit les notations classiques d'un oscillateur à 1 degré de liberté : $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$.

Annexe **B**

Sélection de notes techniques

Sommaire de l'annexe B

B.1 Synthèse sur la méthode $G-\theta$ et son implémentation dans Cast3M	102
B.2 Intégration temporelle des réponses des machines tournantes dans Cast3M	141
B.3 Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise	210

B.1 Synthèse sur la méthode $G-\theta$ et son implémentation dans Cast3M



NOTE TECHNIQUE DEN

Page 1/38

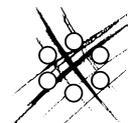
Direction de l'Energie Nucléaire
 Direction des Activités Nucléaires de Saclay
 Département de Modélisation des Systèmes et Structures
 Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques

Synthèse sur la méthode $G-\theta$ et son implémentation dans Cast3M

Benoit PRABEL

DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/2019-65797/A

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
 Centre de Saclay - SEMT/DYN - Bâtiment 607 - Point Courrier 116
 91191 Gif sur Yvette Cedex - FRANCE
 Tél. : +33 (0)1 69 08 23 60 - Mél. : dominique.heil@cea.fr
 Etablissement public à caractère industriel et commercial
 RCS PARIS B 775 685 019



Réf du formulaire : F1-DM2S/DIR/PR/003 classe L^AT_EX docDM2S version C

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

	Note Technique DEN	Page 2/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

NIVEAU DE CONFIDENTIALITE				
DO	DR	CCEA	CD	SD
X				

PARTENAIRES/CLIENTS	ACCORD	TYPE D'ACTION
CEA		

REFERENCES INTERNES CEA			
DIRECTION D'OBJECTIFS	DOMAINE	PROJET	EOTP
DISN	SIMU	-	A-MECAN-01-01
JALON	INTITULE DU JALON	DELAI CONTRACTUEL DE CONFIDENTIALITE	CAHIERS DE LABORATOIRE

SUIVI DES VERSIONS			
INDICE	DATE	NATURE DE L'EVOLUTION	PAGES ET CHAPITRES MODIFIES
A	03/12/2019	Document initial	

	NOM	FONCTION	VISA	DATE
RÉDACTEUR	Benoit PRABEL	Ingénieur-chercheur		
VERIFICATEUR	François DI PAOLA	Ingénieur-chercheur		
APPROBATEUR	Claire GAUTHIER	Chef de Laboratoire		
AUTRE VISA				
ÉMETTEUR	Valérie VANDENBERGHE	Chef de Service		

		Note Technique DEN	Page 3/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

MOTS CLEFS

G_THETA, mécanique de la rupture, taux de restitution d'énergie, XFEM, Cast3M

RÉSUMÉ/CONCLUSIONS de même niveau de confidentialité que le document

Cette Note Technique présente une synthèse sur la méthode G- θ utilisée lors de calculs éléments finis pour quantifier les grandeurs caractéristiques en mécanique de la rupture (taux de restitution d'énergie G , facteurs d'intensité des contraintes $K_{I,II,III}$, etc.).

Cette méthode date de 1983 et a été intégrée à Cast3M en 1987. Pendant 10 ans, elle a été étendue aux cas de la thermique, de la plasticité, des modes mixtes, de la dynamique, etc. A la fin des années 2000 a été ajoutée la possibilité d'utiliser des éléments XFEM.

La plupart des études réalisées en mécanique de la rupture s'appuie sur la méthode G- θ parce qu'elle est plus précise et plus robuste que les méthodes concurrentes. Cependant certaines problématiques restent ouvertes : cas d'un front débouchant, découplage pour un front courbe, traitement d'un calcul XFEM en 3D, etc.

Le but de cette note est d'offrir aux utilisateurs et aux développeurs de Cast3M une synthèse de l'existant en se basant en grande partie sur les notes passées écrites au CEA.

Ainsi, dans une première partie, les notions essentielles à la mécanique de la rupture sont brièvement rappelées. Une seconde partie détaille comment est obtenue l'expression de G . On montre que chaque cas spécifique (thermique, plasticité, gradient de propriétés, dynamique, etc.) conduit à ajouter à l'expression de G un terme supplémentaire qui est explicité ici. Le cas tridimensionnel est également discuté. Les quantités autres que G pouvant être déduites de la méthode sont aussi rappelées.

Une troisième partie donne un aperçu de la mise en oeuvre informatique de la procédure G_THETA, de la façon dont est construit le champ θ et les différents termes de l'intégrale.

Quelques exemples tirés des notes passées sont reproduits et les configurations des cas-tests disponibles dans Cast3M sont fournies.

Quelques problématiques ouvertes et perspectives de travaux sont citées en conclusion de ce rapport.

Enfin, une annexe décrit succinctement l'implémentation de la méthode XFEM dans Cast3M.

	Note Technique DEN	Page 4/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

DIFFUSION INITIALE

(Diffusion par email)

Diffusion interne CEA

B. Prabel	Auteur	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
F. Di Paola	Vérificateur	DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
C. Gauthier	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
O. Jamond		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
P. Bouda		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
D. Seyedi	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/LISN
C. Jacquemoud		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LISN
D. Clément		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LISN
T. Yuritzinn		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LISN
JC. Le Pallec	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
V. Vandenberghe	Chef de Service	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
Y. Kayser	Adjoint du Chef de Service	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
C. Santucci	Chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
D. Caruge	Adjoint du Chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
JL. Fayard	Chef de projet SIMEX	DEN/DANS/DM2S/DIR
T. Laporte	Chef de projet MECAN	DEN/DANS/DM2S/DIR
X. Raepsaet	Chef de programme SIMU	DEN/EC/DISN
S. Martin	Adjoint du Chef de programme SIMU	DEN/EC/DISN

Diffusion externe

Anthony Gravouil	INSA de Lyon
Thomas Elguedj	INSA de Lyon
Stéphane Chapuliot	Framatome
Stéphane Marie	Framatome
Olivier Ancelet	Framatome
Arnaud Blouin	Framatome
Matthieu Le Cren	EDF
Alexandre Martin	CNRS, IMSIA
Claude Stoltz	CNRS, IMSIA
Véronique Lazarus	ENSTA, IMSIA

Diffusion résumé

DEN/DANS/DM2S/DIR
DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
DEN/DANS/DM2S/SERMA/DIR
DEN/DANS/DM2S/STMF/DIR
DEN/DANS/DM2S/SEMT/Chefs de Laboratoire

	Note Technique DEN	Page 5/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

SOMMAIRE

Sommaire	6
Introduction	7
1 Rappels de mécanique linéaire élastique de la rupture	8
1.1 Position du problème	8
1.2 Champs asymptotiques	9
1.3 Taux de restitution d'énergie	10
2 La méthode G-θ	11
2.1 Principe de la méthode	11
2.2 Démonstration de l'expression "classique" de G- θ	11
2.3 Extensions de la méthode	13
2.3.1 Termes complémentaires liés aux forces extérieures	13
2.3.2 Cas thermoélastique	14
2.3.3 Cas des matériaux non-homogènes	14
2.3.4 Cas thermo-élasto-plastique	14
2.3.5 Cas d'une interface matériau non-parallèle à la fissure	16
2.3.6 Cas des éléments de type coque mince	16
2.3.7 Cas de grands déplacements	16
2.3.8 Cas de la dynamique	17
2.3.9 Déformations imposées	19
2.3.10 Frottement entre les lèvres de fissure	19
2.4 Cas 3D	19
2.4.1 Principe	19
2.4.2 Approximation de G constante par morceaux (" <i>pointwise</i> ")	19
2.4.3 Approximation de G par polynôme de Lagrange	20
2.4.4 Approximation par polynôme de Legendre	20
2.5 Méthode de découplage pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes	20
2.6 Dérivée seconde : intégrale dJ/da	21
2.7 Méthode de calcul de l'intégrale C^* pour le fluage	21
3 Mise en oeuvre informatique dans Cast3M	22
3.1 Données d'entrée et de sortie de la procédure	22
3.2 Structuration de la procédure	22
3.3 Construction du champ θ	23
3.3.1 Cas 2D standard ou coque mince	23
3.3.2 Cas 3D standard	23
3.3.3 Cas 2D XFEM	23
3.3.4 Cas 3D XFEM	23
3.4 Calcul de G	25
3.5 Calcul des champs auxiliaires dans le cas du découplage	26
3.5.1 Méthode mécanique	26
3.5.2 Méthode analytique	26
4 Exemples d'illustration	27
4.1 Calculs thermo-mécaniques plans [23, 26]	27
4.2 Calculs tridimensionnels élastiques [17]	27
4.3 Calculs tridimensionnels élastiques (rupt30.dgibi)	27

	Note Technique DEN		Page 6/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797		
	Date : 03/12/2019	Indice : A	
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

4.4	Calculs tridimensionnels élasto-plastiques [22]	27
4.5	Fonctionnalités testées par la base des cas-tests	30
Conclusions et perspectives		32
Annexes		33
A Rappel sur la méthode XFEM telle qu'elle est implémentée dans Cast3M		33
A.1	Description explicite/implicite de la fissure	33
A.2	Enrichissement	34
B Approximation par polynôme de Legendre		35
Références		38

		Note Technique DEN	Page 7/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

Introduction

Afin de garantir l'intégrité des structures, des analyses par éléments finis sont souvent conduites pour statuer sur la tenue mécanique des composants pour un défaut (i.e. une discontinuité) et un chargement donnés.

Depuis les travaux pionniers de Griffith [1] en 1920, il est admis qu'une fissure se propage lorsque l'énergie potentielle libérée par surface de fissure créée (i.e. le taux de restitution d'énergie G) dépasse un seuil lié au matériau (i.e. la ténacité G_c).

La méthode G- θ est une approche précise et robuste pour déterminer la valeur de G en post-traitement d'un calcul aux éléments finis. De nombreux articles, thèses et notes techniques (notamment émises par le CEA) traitent de ce sujet. Cependant, les utilisateurs de Cast3M ont exprimés le besoin de disposer d'un document de référence sur cette méthode. La présente note a donc pour objectif de combler ce manque bibliographique en s'appuyant principalement sur les travaux réalisés et en synthétisant les principaux résultats.

Après quelques rappels de mécanique linéaire de la rupture, la méthode G- θ est exposée, sa démonstration rappelée, et les termes complémentaires nécessaires à certaines modélisations spécifiques rappelées. La mise en oeuvre dans Cast3M fait l'objet d'une section, ainsi que des exemples d'application tirés de la bibliographie.

	Note Technique DEN	Page 8/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

1 Rappels de mécanique linéaire élastique de la rupture

1.1 Position du problème

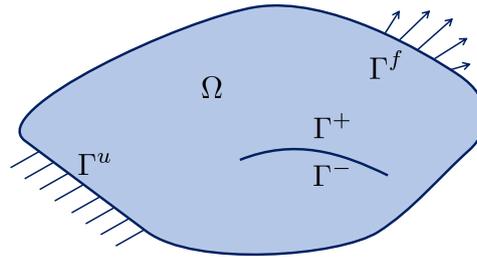


Figure 1 – Milieu présentant une fissure

On considère un solide Ω présentant une fissure dont les lèvres sont notées Γ^+ et Γ^- comme indiqué figure 1. La mécanique des milieux continus impose aux contraintes de vérifier l'équilibre pour tout point de Ω :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (1)$$

Sur sa frontière notée $\partial\Omega = \Gamma^u \cup \Gamma^f$, ce solide est classiquement soumis à des chargements en déplacement (conditions aux limites de Dirichlet) ou en efforts (conditions aux limites de Neumann), ces derniers pouvant être nuls :

$$\underline{u} = \underline{u}^{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma^u \quad (2a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{f}^{\text{imp}} \quad \text{sur } \Gamma^f \quad (2b)$$

On note que la fissure fait partie de la frontière (i.e. $\Gamma^+ \cup \Gamma^- \in \partial\Omega$).

On se place sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Ainsi, la configuration de référence, initiale et déformée sont suffisamment proches pour être confondues. D'autre part, cela nous permet d'utiliser uniquement la partie linéaire des déformations :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) \quad (3)$$

Le comportement du matériau est supposée linéaire élastique. La loi de Hooke relie contrainte et déformation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{I} \quad (4)$$

Les coefficients de Lamé peuvent être reliés au module d'Young et coefficient de Poisson par :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

En résumé, le problème d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{u}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u}^* d\Gamma & \forall \underline{u}^* \text{ C.A.O} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{D} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) \end{cases} \quad (6)$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})$ et \mathbb{D} sont respectivement définis par (3) et (4).

	Note Technique DEN	Page 9/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

1.2 Champs asymptotiques

L'analyse asymptotique du problème bidimensionnel d'une fissure droite (alignée selon l'axe 1) dans un milieu homogène chargé à l'infini [2, 4, 3, 37, 48] montre que la présence de la pointe de fissure conduit à une singularité dans la solution et que celle-ci s'exprime comme la somme de "modes" élémentaires de rupture :

$$\sigma_{11}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \right) + T + O(\sqrt{r}) \quad (7a)$$

$$\sigma_{22}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(\sqrt{r}) \quad (7b)$$

$$\sigma_{12}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \right) + O(\sqrt{r}) \quad (7c)$$

$$\sigma_{13}(r, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{III} \sin \frac{\theta}{2} + O(\sqrt{r}) \quad (7d)$$

$$\sigma_{23}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{III} \cos \frac{\theta}{2} + O(\sqrt{r}) \quad (7e)$$

$$\sigma_{33}(r, \theta) = \begin{cases} \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + T_3 & \text{en déformations planes} \\ 0 & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (7f)$$

où les termes T , T_3 sont d'ordre 0 en r et définis par :

$$T = \sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} \quad (8a)$$

$$T_3 = \sigma_{33}^{\infty} - \nu(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) \quad (8b)$$

et où k est la constante de Kolosov définie par :

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformations planes} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (9)$$

Bui [37] signale que les formules ne sont exactes qu'en déformations planes. Ces trois modes sont illustrés figure 2.

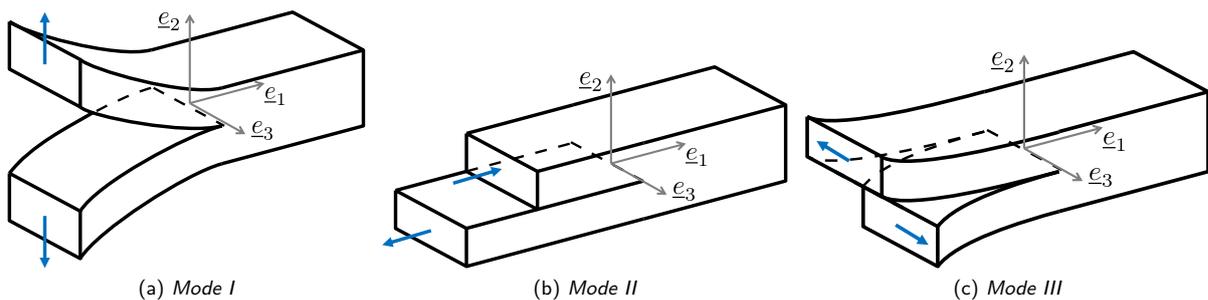


Figure 2 – Modes de rupture

Les déplacements, hors termes d'ordre 0 (translations rigides), s'expriment comme :

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta + 2) \right) + O(r) \quad (10a)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(K_I \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta - 2) \right) + O(r) \quad (10b)$$

$$u_3(r, \theta) = \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III} \sin \frac{\theta}{2} + O(r) \quad (10c)$$

	Note Technique DEN	Page 10/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

Cette solution reste valide tant que les chargements sont suffisamment loin, et s'applique au cas tridimensionnel tant que la courbure du front reste faible devant la zone d'analyse et que l'hypothèse de déformations planes est valide.

1.3 Taux de restitution d'énergie

La théorie de Griffith relie l'énergie potentielle $W = W^{def} + W^{ext}$ libérée par une propagation élémentaire de fissure de surface dA à l'énergie nécessaire à la séparation de la matière notée γ . Elle introduit ainsi le taux de restitution d'énergie G :

$$G = -\frac{dW}{dA} \quad (11)$$

qui, pour une propagation stable, égale l'énergie de surface :

$$\text{Propagation} \Leftrightarrow G \geq 2\gamma \quad (12)$$

On montre [37] qu'en l'absence de forces tangentielles sur les lèvres de fissure (i.e. pas de contact frottant), le taux de restitution d'énergie vaut :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^f} \underline{f} \cdot \frac{d\underline{u}}{dA} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma^u} \underline{u} \cdot \frac{d\underline{f}}{dA} d\Gamma \quad (13)$$

Le taux de restitution d'énergie peut aussi être relié aux facteurs d'intensité des contraintes par la formule d'Irwin [3] :

$$G = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (14)$$

où

$$E^* = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \\ E & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (15)$$

L'intégrale J définie sur un contour fermé C englobant le front de fissure comme illustré figure 3 est introduite par Rice [5] en 1968. Il démontre que celle-ci est indépendante du contour choisi et égale au taux de restitution d'énergie G .

$$J = \int_C \left(w^{def} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (16)$$

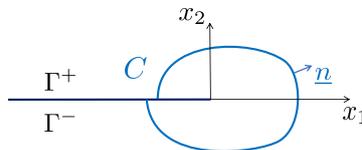


Figure 3 – Contour de l'intégrale J de Rice

	Note Technique DEN	Page 11/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

2 La méthode G- θ

La méthode G- θ est une méthode de perturbation introduite par Destuynder [7]. On reproduit ici un résumé de sa démonstration que l'on peut aussi trouver dans plusieurs notes du CEA (notamment [9, 19, 27, 34] par exemple).

2.1 Principe de la méthode

On cherche à évaluer comment varie l'énergie potentielle W avec une avancée de fissure infinitésimale η tel que représenté figure 4.

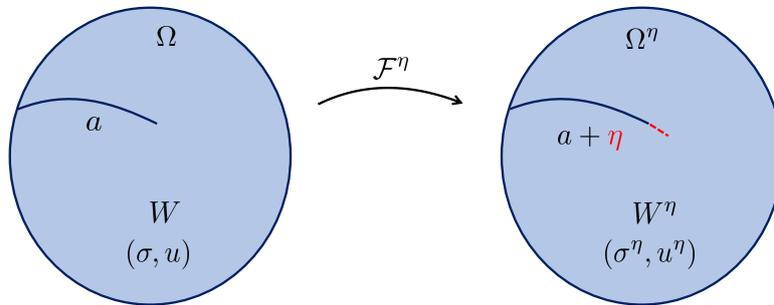


Figure 4 – Perturbation du problème mécanique avec l'avancée de fissure

On peut identifier G en réécrivant (11) sous la forme :

$$G = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W^\eta - W}{\eta} \quad (17)$$

Destuynder [7] propose d'utiliser la perturbation géométrique du domaine au voisinage du front de fissure suivante :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \Omega^\eta = \Omega \\ \underline{M} &\longmapsto \underline{M}^\eta = \mathcal{F}^\eta(\underline{M}) = \underline{M} + \eta \underline{\theta} \end{aligned} \quad (18)$$

Pour que l'état perturbé corresponde à une avancée virtuelle de la fissure et des champs mécaniques avoisinants selon le vecteur $\eta \underline{\theta}$, il est nécessaire d'imposer au champ $\underline{\theta}$ les propriétés suivantes :

- (i) $\underline{\theta}$ est parallèle au plan de fissure,
- (ii) $\underline{\theta}$ est constant et unitaire ($\text{div} \underline{\theta} = 1$) dans un voisinage du front de fissure,
- (iii) $\underline{\theta}$ est nul à partir d'un voisinage plus large.

$\underline{\theta}$ n'est pas nécessairement normale au front de fissure, car la contribution extra-normale de G- θ doit être nulle. Il est cependant conseillé de le choisir comme tel.

2.2 Démonstration de l'expression "classique" de G- θ

A partir de ce point, afin d'alléger l'écriture, on omettra d'indiquer si les quantités sont des vecteurs ou des tenseurs lorsque cela est évident. De plus, on utilise les notations suivantes pour les gradients par rapport aux configurations

	Note Technique DEN	Page 12/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

Ω et Ω^η :

$$\nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial M} = \text{grad}(\cdot)(I + \eta \nabla \theta) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{grad}(\cdot) &\equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial M^\eta} = \nabla(\cdot)(I - \eta \text{grad} \theta) \\ &= \nabla(\cdot)(I - \eta \nabla \theta (I - \eta \text{grad} \theta)) \\ &= \nabla(\cdot)(I - \eta \nabla \theta + O(\eta^2)) \end{aligned} \quad (20)$$

On montre aussi que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\eta} (\cdot) d\Omega^\eta &= \int_{\Omega} (\cdot) \det(\nabla M^\eta) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\cdot) \det(I + \eta \nabla \theta) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\cdot) (1 + \eta \text{div} \theta + O(\eta^2)) d\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

Le problème d'élasticité perturbé sur le domaine Ω^η se compose des équations d'équilibre et de comportement élastique suivantes :

$$\begin{cases} \int_{\Omega^\eta} \text{tr}(\sigma^\eta \cdot \text{grad} u^*) d\Omega^\eta = \int_{\partial\Omega} f \cdot u^* d\Gamma & \forall u^* \text{ C.A.0} \\ \sigma^\eta = \mathbb{D} \cdot \epsilon(u^\eta) \end{cases} \quad (22)$$

Utilisant les propriétés (20) et (21), il vient le problème écrit sur Ω :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^\eta \cdot \nabla u^* (I - \eta \nabla \theta + O(\eta^2))) (1 + \eta \text{div} \theta + O(\eta^2)) d\Omega = \int_{\partial\Omega} f \cdot u^* d\Gamma \\ \sigma^\eta = \mathbb{D} \cdot \frac{1}{2} \left((\nabla u^\eta (I - \eta \nabla \theta + O(\eta^2))) + (\nabla u^\eta (I - \eta \nabla \theta + O(\eta^2)))^T \right) \end{cases} \quad (23)$$

Destuynder [7] montre que les champs perturbés peuvent être développés en série :

$$\begin{cases} \sigma^\eta = \sigma + \eta \sigma^1 + O(\eta^2) \\ u^\eta = u + \eta u^1 + O(\eta^2) \end{cases} \quad (24)$$

Injectant cette expression dans (23), on peut identifier des problèmes en fonction de l'ordre de η . L'ordre 0 donne évidemment la solution du problème initial non perturbé :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \cdot \nabla u^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega} f \cdot u^* d\Gamma \\ \sigma = \mathbb{D} \cdot \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \end{cases} \quad (25)$$

L'ordre 1 donne :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^1 \cdot \nabla u^*) d\Omega = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \cdot \nabla u^* \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \cdot \nabla u^*) \text{div} \theta d\Omega \\ \sigma^1 = \mathbb{D} \cdot \frac{1}{2} \left((\nabla u^1 + \nabla u^{1T}) - (\nabla u \nabla \theta + \nabla \theta^T \nabla u^T) \right) \end{cases} \quad (26)$$

On peut calculer G en injectant les expressions des énergies potentielles :

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) d\Omega \quad W^\eta = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^\eta} \text{tr}(\sigma^\eta \text{grad} u^\eta) d\Omega^\eta \quad (27)$$

	Note Technique DEN	Page 13/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

dans (17) et en ne conservant que les termes finis après passage à la limite :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma(\nabla u^1 - \nabla u \nabla \theta)) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^1 \nabla u) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) \text{div} \theta d\Omega \quad (28)$$

Il reste à éliminer σ^1 et u^1 en utilisant les égalités (25) et (26).

La réciprocité de Maxwell-Betty permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma \epsilon^1 &= \sigma^1 \epsilon \\ \Leftrightarrow \sigma \left(\frac{1}{2}(\nabla u^1 + \nabla u^{1T}) - \frac{1}{2}(\nabla u \nabla \theta + \nabla \theta^T \nabla u^T) \right) &= \sigma^1 \left(\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

d'où, en utilisant la commutativité des termes de la trace d'un produit et la symétrie de σ :

$$\int_{\Omega} \text{tr}(\sigma(\nabla u^1 - \nabla u \nabla \theta)) d\Omega = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^1 \nabla u) d\Omega \quad (30)$$

Par ailleurs, si on utilise $u^* = u$ dans l'équilibre des termes d'ordre 1 (26), on obtient :

$$\int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^1 \nabla u) d\Omega = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) \text{div} \theta d\Omega \quad (31)$$

Les relations (30) et (31) permettent d'éliminer les termes d'ordre 1 dans G :

$$G = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) \text{div} \theta d\Omega \quad (32)$$

Cette expression de base est celle qui a été implémentée dans Cast3M dès 1987 par Suo [9] dans le cadre élastique bidimensionnel. Il a notamment vérifié que ce calcul était indépendant du contour choisi (même si l'utilisation des première couches d'éléments à proximité de la pointe de fissure introduit des erreurs un peu plus élevées).

2.3 Extensions de la méthode

2.3.1 Termes complémentaires liés aux forces extérieures

S'il existe dans le domaine perturbé un champs de force extérieur f , celui-ci ajoute aux équations d'équilibre perturbés le terme :

$$\int_{\Omega^n} f^\eta \cdot u^* d\Omega^n = \int_{\Omega} (f + \eta \nabla f \theta) \cdot u^* (1 + \eta \text{div} \theta) d\Omega \quad (33)$$

et donc in fine à G le terme :

$$\int_{\Omega} f u \text{div} \theta d\Omega + \int_{\Omega} \nabla f u \theta d\Omega = \int_{\partial\Omega} f u \theta d\Gamma - \int_{\Omega} f \nabla u \theta d\Omega \quad (34)$$

où l'on a utilisé le théorème de la divergence et pris en compte le fait que $\theta = 0$ sur $\partial\Omega$.

Le même terme (au domaine d'intégration près) doit être ajouté s'il s'agit d'une force surfacique ou ponctuelle.

En général, on dispose des efforts intégrés, c'est à dire de $F = \int_{\Gamma} f d\Gamma$. Cependant, afin d'assurer la précision du calcul de G , il faut conserver f sur son support de définition lorsque cela est possible, et multiplier par $\nabla u \theta$ avant d'intégrer, car l'intégrale du produit n'est en général pas égale au produit des intégrales :

$$- \int_{\Gamma} f \nabla u \theta d\Gamma \neq - \int_{\Gamma} f d\Gamma \cdot \int_{\Gamma} \nabla u \theta d\Gamma \quad (35)$$

L'exemple d'un chargement en pression appliquée sur les lèvres de la fissure suggéré par S. Chapuliot en 2016 montre qu'à la pointe de fissure, les contributions des efforts intégrés sur les lèvres supérieure et inférieure s'annulent : $F(x^{\text{tip}}) = 0$, alors que l'intégrale du produit de l'équation (34) n'est pas nulle sur ce dernier élément.

	Note Technique DEN	Page 14/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

2.3.2 Cas thermoélastique

En présence d'un champ de température, il faut prendre en compte les déformations d'origine thermique :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}} &= \mathbb{D}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} &= \alpha T \underline{\underline{I}} \end{cases} \quad (36)$$

Ainsi, les contraintes s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{D} \left(\frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) - \alpha T \underline{\underline{I}} \right) \quad (37a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^\eta = \mathbb{D} \left(\frac{1}{2} (\text{grad } u^\eta + \text{grad } u^{\eta T}) - \alpha^\eta T^\eta \underline{\underline{I}} \right) \quad (37b)$$

et les énergies potentielles :

$$W = - \int_{\Omega} \int_0^{\epsilon^{\text{el}}} \text{tr}(\sigma \cdot d\epsilon^{\text{el}}) d\Omega = - \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma) \alpha T d\Omega \quad (38a)$$

$$W^\eta = \dots = - \int_{\Omega^\eta} \text{tr}(\sigma^\eta \text{grad } u^\eta) d\Omega^\eta - \int_{\Omega^\eta} \text{tr}(\sigma^\eta) \alpha^\eta T^\eta d\Omega^\eta \quad (38b)$$

On décompose la température et le coefficient de dilatation thermique selon :

$$T^\eta = T + \eta \theta \nabla T \quad (39)$$

$$\alpha^\eta = \alpha + \eta \theta \nabla \alpha$$

Procédant la même façon que pour le cas élastique (§2.2), on trouve l'expression de G suivante :

$$G = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} w^{\text{def}} \text{div } \theta d\Omega + \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma) (\alpha \nabla T \theta + \theta \nabla \alpha T) d\Omega \quad (40)$$

où l'énergie de déformation élastique est notée : $w^{\text{def}} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma (\nabla u - \alpha T \underline{\underline{I}}))$.

2.3.3 Cas des matériaux non-homogènes

En 1991, Combescure et Suo [13, 15] donnent l'expression de G pour le cas thermo-élastique lorsque les propriétés d'élasticité dépendent de l'espace :

$$\mathbb{D}^\eta = \mathbb{D} + \eta \nabla \mathbb{D} \theta \quad (41)$$

Les auteurs montrent qu'il faut ajouter à l'expression de G fournie par (40) le terme :

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr}(\nabla \mathbb{D} \theta (\nabla u - \alpha T \underline{\underline{I}}) (\nabla u - \alpha T \underline{\underline{I}}) d\Omega) \quad (42)$$

2.3.4 Cas thermo-élasto-plastique

La déformation se décompose selon :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{pl}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} \\ &= \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{meca}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} \end{aligned} \quad (43a)$$

	Note Technique DEN	Page 15/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

avec :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}} = \mathbb{D}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \quad (43b)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{pl}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < 0 \\ \dot{p} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} & \text{si } \phi = 0 \end{cases} \quad (43c)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} = \alpha T \underline{\underline{I}} \quad (43d)$$

La loi d'écoulement fait apparaître la fonction seuil ϕ qui s'appuie généralement pour les aciers sur la contrainte équivalente de Von Mises et une fonction d'érouissage isotrope :

$$\phi(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma_{\text{VM}}(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_y(p) \quad (44)$$

$$\text{avec } \sigma_{\text{VM}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

ainsi que la déformation plastique équivalente :

$$p = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{pl}} : \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{pl}}} \quad (45)$$

L'énergie de déformation mécanique est calculée en ajoutant les contributions élastique et plastique, cette dernière étant évaluée de manière incrémentale :

$$\begin{aligned} w^{\text{def}} &= \int_0^{t_n} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{meca}}) \\ &= w^{\text{el}} + w^{\text{pl}} \\ &\simeq \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}}) + \sum_n \frac{\sigma_{\text{VM}n} + \sigma_{\text{VM}n-1}}{2} \cdot (p_n - p_{n-1}) \end{aligned} \quad (46)$$

où n et $n+1$ désignent les indices de deux pas de temps successifs. Tant que le chargement est monotone (pas de décharge) et radial (pas de modification dans la direction de chargement), on peut faire l'analogie du cas élasto-plastique avec celui de l'élasticité non-linéaire. Ainsi, l'expression de G ne varie pas et vaut (40) en utilisant l'énergie de déformation incrémentale proposée ci-dessus (46). Dans la procédure G_THETA, il est possible d'évaluer les éventuelles décharges par différents critères [28, 31] en renseignant l'indice 'CALCUL_CRITERE'.

Si un champ de température est présent et que les courbes de traction dépendent de la température, le matériau n'est plus homogène et on doit ajouter à G les termes (42) et :

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial w^{\text{pl}}}{\partial T} \nabla T \theta d\Omega \quad (47)$$

où :

$$\frac{\partial w^{\text{pl}}}{\partial T} \simeq \sum_n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{\text{VM}n}}{\partial T} + \frac{\partial \sigma_{\text{VM}n-1}}{\partial T} \right) \cdot (p_n - p_{n-1}) \quad (48)$$

En 2011, l'étude d'une fissure positionnée parallèlement à l'interface d'une liaison bi-métallique a montré que malgré un chargement globalement monotone croissant, l'hétérogénéité des matériaux peut conduire à des zones localement en décharge pour lesquelles $\sigma_{\text{VM}} \neq \sigma_y$.

Afin de minimiser la dépendance au contour alors observée, la variation de la contrainte équivalente avec la température est approximée à l'origine par :

$$\frac{\partial \sigma_{\text{VM}n}}{\partial T} = \frac{\sigma_y(T_n + 1, p_n) - \sigma_{\text{VM}}(\underline{\underline{\sigma}}_n)}{1} \quad (49)$$

	Note Technique DEN	Page 16/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

a été remplacée par :

$$\frac{\partial \sigma_{VMn}}{\partial T} = \frac{\sigma_y(T_n + 1, p_n) - \sigma_y(T_n, p_n)}{1} \quad (50)$$

2.3.5 Cas d'une interface matériau non-parallèle à la fissure

Une discontinuité de propriété sur l'interface Ω_ξ peut être vue comme le cas limite d'une bande aux propriétés variables dont la largeur ξ tend vers 0 comme proposé dans [15, § 6] et appliqué dans [20]. L'intégrale sur le volume se décompose ainsi en 3 intégrales :

$$\int_{\Omega} = \int_{\Omega_1} + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} + \int_{\Omega_2} \quad (51)$$

On montre que le passage à la limite conduit à l'intégrale de surface :

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} -(f \nabla u \theta) + (\text{tr}(\sigma) \nabla \alpha \theta T) - \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbb{D} \theta \epsilon^{\text{el}} \epsilon^{\text{el}})) \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_{1-2}} [w_1^{\text{def}} - w_2^{\text{def}}] \theta n \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{1-2}} \sigma n [\nabla u_1 - \nabla u_2] \theta n \, d\Gamma \end{aligned} \quad (52)$$

avec n normale à Γ_{1-2} orientée de 1 vers 2.

On constate que ces termes sont proches de (34) et (42).

2.3.6 Cas des éléments de type coque mince

En 1991, Suo et Brochard [14] étendent la méthode G- θ aux éléments de type DKT, COQ3 et COQ4. L'intégration dans l'épaisseur est réalisée en distinguant les composantes de membrane et de flexion. Le champ θ est supposé constant dans l'épaisseur. In fine, on obtient l'expression de G pour les coques minces :

$$\begin{aligned} G &= \int_S \left(\epsilon^m T(u) \cdot D \cdot \epsilon^m(u, \theta) - \frac{1}{2} \epsilon^m T(u) \cdot D \cdot \epsilon^m(u) \text{div} \theta \right) dS \\ &+ \frac{e^2}{12} \int_S \left(k^T(u) \cdot D \cdot k(u, \theta) - \frac{1}{2} k^T(u) \cdot D \cdot k^T(u) \text{div} \theta \right) dS \end{aligned} \quad (53)$$

où :

$$\begin{aligned} \epsilon^m(u) &= \frac{1}{2} (\nabla u^m + \nabla u^{mT}) & \epsilon^m(u, \theta) &= \frac{1}{2} (\nabla u^m \nabla \theta + \nabla \theta^T \nabla u^{mT}) \\ z \cdot k(u) &= \frac{1}{2} (\nabla u^f + \nabla u^{fT}) & z \cdot k(u, \theta) &= \frac{1}{2} (\nabla u^f \nabla \theta + \nabla \theta^T \nabla u^{fT}) \end{aligned} \quad (54)$$

Cette approche est validée par comparaison à celle proposée par De Lorenzi dans [16].

2.3.7 Cas de grands déplacements

Le cas des grands déplacements mais petites déformations a été étudié par Suo dans [30, 34]. La figure 5 illustre comment se positionnent les grandes transformations considérées U et U^η par rapport à la perturbation de la longueur de fissure.

Travailler sur la configuration de référence est plus aisé et les auteurs considèrent ainsi la relation hyperélastique entre contrainte de Piola-Kirchoff 2 (notée Π) et déformation de Green-Lagrange (notée e) :

$$\Pi = \frac{\partial w}{\partial e} \quad \Pi^\eta = \frac{\partial w^\eta}{\partial e^\eta} \quad (55)$$

	Note Technique DEN	Page 17/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

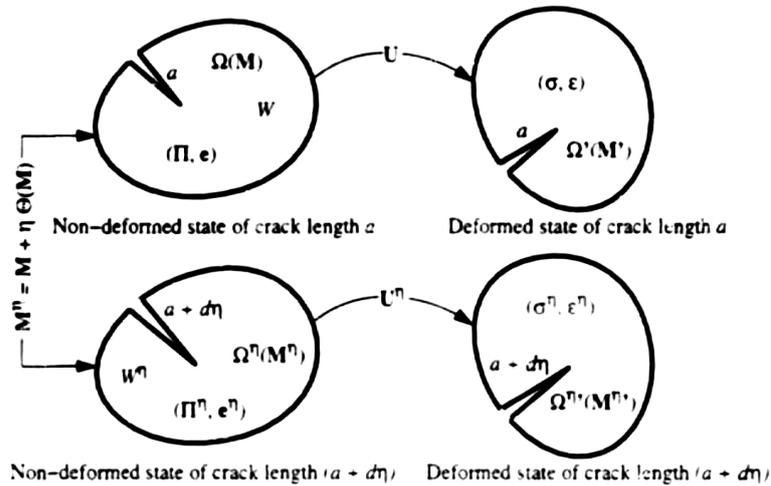


Figure 5 – Application de la méthode G- θ en grands déplacements [30, 34]

In fine, le terme supplémentaire :

$$\int_{\Omega} \text{tr} \left(\Pi^T \nabla U \nabla U \nabla \theta \right) d\Omega \quad (56)$$

doit être pris en compte pour assurer l'indépendance avec le contour choisi.

Le cas d'une pression suivieuse f est également traité. Si celle-ci n'est pas affectée par la perturbation d'avancée de fissure, alors on retrouve les terme de l'équation (34). Dans le cas contraire (cas d'une pression appliquée sur les lèvres par exemple), ces termes deviennent :

$$\int_{\Omega} (\det F^T F^{-1} f) U \text{div} \theta d\Omega + \int_{\Omega} \nabla (\det F^T F^{-1} f) \theta U d\Omega \quad (57)$$

2.3.8 Cas de la dynamique

On propose ici de suivre une démarche énergétique pour établir l'expression de J en dynamique.

De manière générale, la puissance dissipée dans un domaine Ω s'écrit comme :

$$P^{\text{diss}} = \frac{d}{dt} \left(- \int_{\Omega} (w^{\text{def}} + w^{\text{cin}}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} w^{\text{ext}} d\Gamma \right) \quad (58)$$

où :

$$\begin{cases} w^{\text{def}} &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{\underline{u}} \right) \\ w^{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{\underline{u}}}^2 \\ w^{\text{ext}} &= (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{u}} \end{cases} \quad (59)$$

Considérant à l'intérieur de Ω un contour Γ définissant le petit domaine Ω_{Γ} entourant la pointe de fissure et se déplaçant avec elle à la vitesse \dot{a} comme représenté figure 6a, on montre [38] que la puissance dissipée vaut :

$$P^{\text{diss}} = \underbrace{\int_{\Gamma} \left((w^{\text{def}} + w^{\text{cin}}) \dot{a} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\underline{u}}} \right) \cdot \underline{\underline{n}} d\Omega}_{F(\Gamma)} - \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_{\Gamma}} (w^{\text{def}} + w^{\text{cin}}) d\Omega \right) \quad (60)$$

	Note Technique DEN	Page 18/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

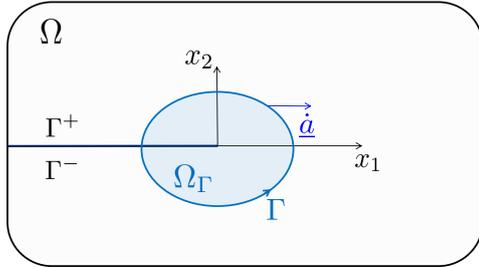
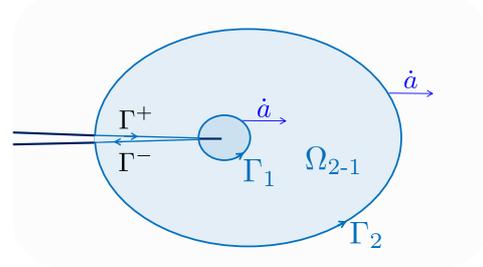
(a) Le contour Γ suit l'avancée de la fissure(b) Le contour Γ_1 tend vers 0

Figure 6 – Domaines et contours utilisés pour la démonstration

où apparaît l'intégrale de flux d'énergie introduite par Freund [6, 32]. Cette dernière n'est pas indépendante du contour choisi, sauf si les conditions de stationnarité :

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} + \dot{a}\nabla u = 0 \qquad \frac{d\dot{u}}{dt} = \ddot{u} + \dot{a}\nabla\dot{u} = 0 \quad (61)$$

sont vérifiées. Le taux de restitution en dynamique peut ainsi être défini par le passage à la limite :

$$G = \frac{P^{\text{diss}}}{\dot{a}} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{F(\Gamma)}{\dot{a}} \quad (62)$$

L'introduction du tenseur d'Eshelby $H_{kj} = (w^{\text{def}} + w^{\text{cin}})\delta_{kj} - \sigma_{ij}u_{i,k}$ (où l'on a utilisé l'hypothèse de stationnarité) et du vecteur $\theta_k = \frac{\dot{a}_k}{\dot{a}}$, accompagné de l'utilisation de 2 contours comme illustré figure 6b permet de ré-écrire G sous une forme plus pratique :

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} H_{kj}\theta_k n_j d\Gamma \quad (63) \\ &= \lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-} H_{kj}\theta_k n_j d\Gamma - \int_{\Omega_{2-1}} (H_{kj}\theta_k)_{,j} d\Omega \right) \\ &= - \int_{\Omega_2} (H_{kj}\theta_k)_{,j} + H_{kj,j}\theta_k d\Omega \\ &= \int_{\Omega_2} \sigma_{ij}u_{i,k}\theta_{k,j} - (w^{\text{def}} + w^{\text{cin}})\theta_{k,k} + (\rho\ddot{u}_i u_{i,k} - \rho\dot{u}_i \dot{u}_{i,k})\theta_k d\Omega \end{aligned}$$

L'utilisation de l'hypothèse de stationnarité à d'autres moments de la démonstration et le difficile passage à la limite d'un contour évanouissant expliquent pourquoi d'autres formulations existent dans la littérature pour l'intégrale J en dynamique (cf. [24, 36, 37, 38]). Dans Cast3M, nous avons retenu celle qui a semblé la plus stable numériquement sur quelques tests avec le schéma de l'accélération moyenne de Newmark :

$$G = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} (w^{\text{def}} + w^{\text{cin}}) \text{div} \theta d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \nabla u \theta d\Omega - \int_{\Omega} \rho \dot{u} \nabla \dot{u} \theta d\Omega \quad (64)$$

où l'énergie cinétique est calculée comme : $w^{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho\dot{u}^2$.

Initialement, d'autres termes étaient utilisés pour la dynamique [24], mais ils faisaient intervenir des quantités évaluées sur plusieurs pas de temps et donnaient des résultats moins stables.

	Note Technique DEN	Page 19/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

2.3.9 Déformations imposées

La prise en compte d'un chargement en déformations imposées a été introduit en 2012 (développement #7567). Par analogie avec le cas des déformations thermiques, on montre que le terme à ajouter est :

$$\int_{\Omega} \text{tr} \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{imp}} \theta \right) d\Omega \quad (65)$$

2.3.10 Frottement entre les lèvres de fissure

La prise en compte du frottement entre lèvres de fissure est nécessaire pour les cas de fissuration par fretting. Dans une formulation XFEM à trois champs, Trollé [47] montre qu'il faut ajouter le terme :

$$\int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \cdot \nabla^T [u] \cdot \theta d\Omega \quad (66)$$

2.4 Cas 3D

2.4.1 Principe

Le cas tridimensionnel est traité par [8] et rappelé dans [12, 17, 22, 19].

Considérant une avancée virtuelle du front $\delta l(s)$ comme illustré figure 7, qui n'est autre que la restriction de θ sur le front, on a par définition :

$$-\delta W = \int_0^L -\frac{\partial W}{\partial A} \delta l ds = \int_0^L G(s) \delta l(s) ds = \bar{G}(\delta A) \quad (67)$$

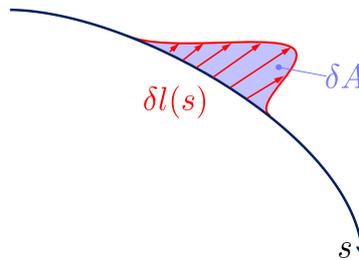


Figure 7 – Avancée virtuelle de fissure en 3D

On constate que le choix d'approximation de l'avancée $\delta l(s)$ et de $G(s)$ influenceront le résultat. Ce sujet est discuté dans [17]. Pour l'avancée, l'approximation élément fini est très majoritairement utilisée. Nous présentons ci-après divers choix d'approximation de $G(s)$.

2.4.2 Approximation de G constante par morceaux ("pointwise")

Lorsque l'on suppose que $G(s)$ est constant sur chaque segment d'intégration, (approximation qualifiée de "pointwise" dans [8]) cela conduit à l'évaluation directe en chaque point du front s_i :

$$G(s_i) = \frac{\bar{G}(\delta A_i)}{\delta A_i} = \int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma \nabla u \nabla \left(\frac{\theta_i}{\delta A_i} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} w^{\text{def}} \text{div} \left(\frac{\theta_i}{\delta A_i} \right) d\Omega \quad (68)$$

où $\delta A_i = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} N_i(s) \delta l(s) ds$. On remarque que l'avancée est évaluée en considérant une approximation linéaire du type : $\delta l(s) = \sum_i N_i(s) \delta l_i$.

	Note Technique DEN	Page 20/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

2.4.3 Approximation de G par polynôme de Lagrange

Comme proposé dans [8], une approximation s'appuyant sur les fonction de forme éléments finis est possible : $G(s) = \sum_i N_i(s)G_i$. Les valeurs nodales s'obtiennent alors en résolvant le système linéaire :

$$\sum_i \int_0^L N_j(s) \frac{\delta l_j}{\delta A_j} \cdot N_i(s) G_i ds = \bar{G}_j \quad \forall j \quad (69)$$

$$[M] \cdot \{G\} = \{\bar{G}\}$$

où apparait une pseudo-matrice de masse (consistante) de largeur de bande égale à 3 avec des fonctions de forme linéaires et à 5 pour des fonctions de forme quadratiques.

Par analogie, on peut associer l'approximation "pointwise" du §2.4.2 à une matrice de masse "lumpée".

2.4.4 Approximation par polynôme de Legendre

Des travaux récents menés à EDF (thèse de Le Cren [49]) montrent que d'autres approximations sont possibles pour $G(s)$ et pour $\delta l(s)$ comme l'utilisation des polynômes de Legendre noté $P(s)$. Les résultats obtenus dans Code_Aster avec ce choix d'approximation sont discutés en annexe B.

2.5 Méthode de découplage pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Considérant la somme des états réel et auxiliaire, le calcul de l'intégrale J vaut :

$$J(u + u^{\text{aux}}) = J(u) + J(u^{\text{aux}}) + I(u, u^{\text{aux}}) \quad (70)$$

L'intégrale d'interaction s'exprime comme étant (cf. [25]) :

$$I = \int_{\Omega} \left(w(u, u^{\text{aux}}) n_1 - \sigma u_{,1}^{\text{aux}} - \sigma^{\text{aux}} u_{,1} \right) \theta_{,1} d\Omega \quad (71)$$

On montre notamment que :

$$I(u, u) = 2J \quad (72a)$$

$$I(u, u^{\text{aux}}) = \frac{2}{E^*} (K_I K_I^{\text{aux}} + K_{II} K_{II}^{\text{aux}}) + \frac{1}{\mu} K_{III} K_{III}^{\text{aux}} \quad (72b)$$

$$I(u, \frac{\partial u}{\partial a}) = \frac{\partial J}{\partial a} \quad (72c)$$

L'équation (72b) permet de déduire directement les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} à partir des valeurs des 3 intégrales I calculées avec 3 champs auxiliaires u_I^{aux} , u_{II}^{aux} et u_{III}^{aux} pour lesquels $(K_I^{\text{aux}} K_{II}^{\text{aux}} K_{III}^{\text{aux}})$ vaut respectivement (100), (010) et (001).

La détermination des champs auxiliaires dans le cas général (d'une fissure à front courbe ou non-plane par ex.) pose des difficulté théoriques et numériques qui sont discutées au §3.5.

		Note Technique DEN	Page 21/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

2.6 Dérivée seconde : intégrale dJ/da

En 1988, Suo et Combescure [10, 11] calculent la dérivée seconde de l'énergie potentielle pour analyser la stabilité d'une propagation obéissant au critère de Griffith.

2.7 Méthode de calcul de l'intégrale C^* pour le fluage

Il est également possible de calculer l'intégrale C^* caractéristique d'un problème de fluage :

$$C^* = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \nabla \dot{u} \nabla \theta) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{w}^{\text{def}} \text{div} \theta d\Omega \quad (73)$$

Dans [18], il est montré sur un exemple plan qu'elle est indépendante du contour d'intégration en phase de fluage est stationnaire (ou fluage secondaire), c'est à dire lorsque le champ de contrainte est redistribué. Une démonstration plus complète peut être trouvée dans [21, 29]. Dans [29], la généralisation aux cas du fluage primaire et tertiaire est discuté et l'intégrale $C^*(h)$ introduite, afin de mieux prendre en compte les redistributions des contraintes.

	Note Technique DEN	Page 22/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

3 Mise en oeuvre informatique dans Cast3M

La structure et le fonctionnement de la procédure G_THETA ont peu évolué depuis leur création. Les documents de 1994 [22, 19] font encore référence. Depuis, quelques corrections mineures ont été apportées et le cas d'une modélisation XFEM (dont une courte explication est donnée en annexe A) a été intégrée.

3.1 Données d'entrée et de sortie de la procédure

Les fonctionnalités ainsi que les données d'entrée de la procédure G_THETA sont données par la notice disponible en ligne et avec chaque version téléchargée du code. Nous ne reproduisons donc ci-dessous qu'un exemple d'utilisation à but illustratif :

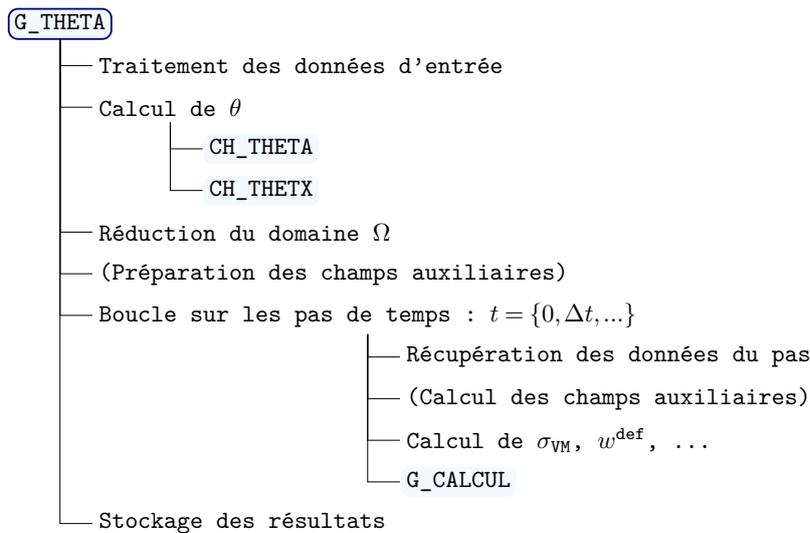
```

tg . 'OBJECTIF'           = MOT 'J' ;
tg . 'COUCHE'            = 3 ;
tg . 'FRONT_FISSURE'     = fron1;
tg . 'LEVRE_SUPERIEURE' = lev1sup;
tg . 'LEVRE_INFERIEURE' = lev1inf;
tg . 'SOLUTION_RESO'     = u1 ;
tg . 'MODELE'            = mod1 ;
tg . 'CARACTERISTIQUES' = mat1 ;
tg . 'CHARGEMENTS_MECA' = f1 ;
tg . 'BLOCAGES_MECA'    = blo1;
G_THETA tg ;
G1 = tg . 'RESULTATS' . 'GLOBAL' ;

```

3.2 Structuration de la procédure

On donne ci-dessous le schéma général de la procédure G_THETA :



	Note Technique DEN	Page 23/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

3.3 Construction du champ θ

3.3.1 Cas 2D standard ou coque mince

Actuellement, le dernier segment de la pointe de fissure donne l'orientation VECTEUR ($=\underline{V}$) tangente au plan de fissure et normale au front. Le maillage MBOUGER des éléments pour lesquels θ est unitaire sont déterminés de proche en proche depuis la pointe de fissure. Une couche supplémentaire d'éléments pour lesquels $\nabla\theta \neq 0$ est ajoutée pour constituer le maillage MAIL ($=\Omega$) support du calcul de G . Le champ TETA ($=\theta$) est obtenu par différence entre les coordonnées de MBOUGER initiales et après translation selon \underline{V} . Finalement, les vecteurs de la base locale définie sur le front de fissure VECTEUR1, VECTEUR2 et VECTEUR3 sont calculés et retournés dans une table.

3.3.2 Cas 3D standard

Seule le cas d'une fissure plane est traité.

La discrétisation du champ θ implique l'utilisation d'un maillage paramétrique et avec des "tranches" d'éléments \mathcal{T}_i normales au front de fissure comme représenté figure 8. Cela est nécessaire pour la construction par CH_THETA des tranches d'éléments TBOUGER . i pour lesquelles $|\theta_i| = 1$ et TMAIL . i qui est TBOUGER . $i + 1$ couche où $\nabla\theta \neq 0$.

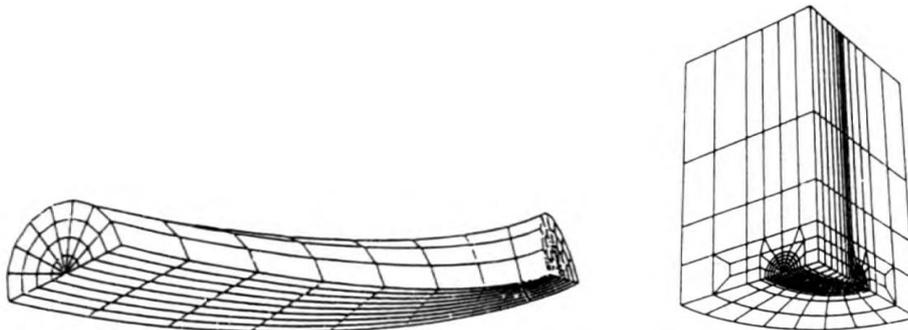


Figure 8 – Exemple de maillage 3D du front [22]

Le vecteur \underline{V} est calculé aux nœuds en moyennant les segments gauche et droite. Si le front est débouchant, on fait la moyenne avec le symétrique de manière à avoir un champ θ colinéaire à la surface libre.

3.3.3 Cas 2D XFEM

Le maillage MBOUGER est construit par itération sur le nombre de couche comme dans le cas standard, mais à partir de l'élément contenant la pointe de fissure ou du nœud confondu avec celle-ci.

L'orientation du champ θ n'est plus nécessairement constante. En effet, les fonctions de niveau (ou "Level Set") ϕ et ψ définissent un repère local qui épouse l'éventuelle courbure de la fissure. On définit aux points de Gauss le vecteur :

$$\underline{\theta}(x_{\text{Gauss}}) = \nabla\phi \times (\nabla\psi \times \nabla\phi) \quad (74)$$

qu'on ramène aux nœuds par extrapolation-moyennisation et qu'on normalise.

3.3.4 Cas 3D XFEM

La difficulté de ce cas réside dans le fait qu'on ne dispose pas d'un maillage réglé et conforme au front de fissure. Aussi, la méthode implémentée tente d'adapter ce qui existe pour les éléments standards.

	Note Technique DEN	Page 24/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

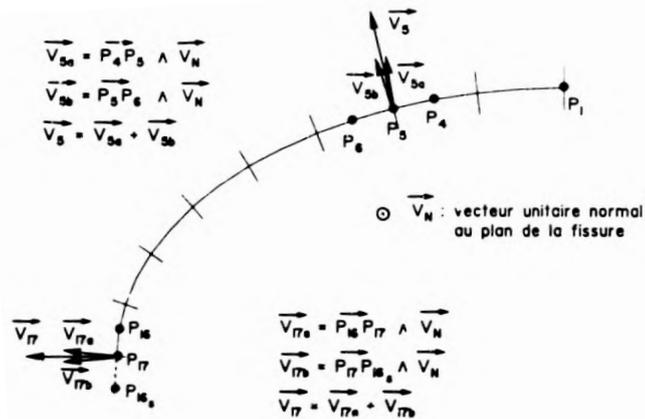


Figure 9 – Vecteur unitaire normal au front dans le cas d'une fissure débouchante [19]

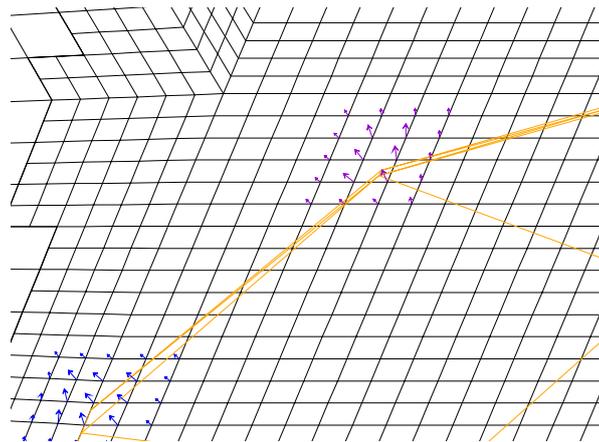


Figure 10 – Champs θ pour 2 points du front lors d'un calcul XFEM 3D [50]

On construit d'abord le maillage MBOUGER par itération sur le nombre de couches avec comme maillage initial les éléments contenant les nœuds du front.

Sur ce domaine, on construit $\underline{\theta}$ de la même façon qu'en 2D (cf. 74 pour le calcul aux points de Gauss et même démarche d'extrapolation-moyennisation-normalisation aux nœuds). On stocke les champs aux nœuds d'orientation locale : $V1=\underline{\theta}$, $V2=\nabla\phi$ et $V3=\nabla\psi \times \nabla\phi$ dans une table.

Puis, pour chaque point du front de fissure, on attribue les éléments de MBOUGER les plus proches de ce point du front.

On crée ensuite pour chacune de ces pseudo-tranches \mathcal{T}_i , le champ d'avancée locale : $\frac{\theta_i}{\delta A_i}$

Un exemple de champs θ pour un modèle XFEM 3D issu de la thèse [50] est donné figure 10.

Les discrétisations non-conformes de la fissure et de la structure conduisent à des imprécisions sur :

- la solution mécanique,
- le calcul de l'intégrale J .

Pour y remédier, une modification du champ θ et des solutions de lissage ont été testées dans [44]. Récemment, Le Cren [49] propose l'utilisation de polynôme de Legendre (cf. §B).

	Note Technique DEN	Page 25/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

3.4 Calcul de G

Dans Cast3M, la procédure G_CALCUL appelée par G_THETA calcule l'intégrale J , les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} , l'intégrale de fluage C^* ou le rapport dJ/da selon l'objectif fixé par l'utilisateur.

Comme nous l'avons vu précédemment, $G = J$ se décompose en une somme de termes décrits ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 G = & \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : (\nabla \underline{u} \nabla \theta)}_{S20} d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} w^{def} div \theta}_{S10} d\Omega \\
 & - \underbrace{\int_{\partial\Omega} f \nabla u \theta}_{S50} d\Gamma \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \alpha \nabla T \theta}_{S40} d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \alpha T \theta}_{S70} d\Omega \\
 & - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega} \nabla D \underline{\underline{\epsilon}}^{el} : \underline{\underline{\epsilon}}^{el} \theta}_{S60} d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\delta w^{pl}}{\delta T} \nabla T \theta}_{S120} d\Omega \\
 & + \underbrace{\int_{\Gamma_{1-2}} (w_1 - w_2) \theta n}_{S100} d\Gamma - \underbrace{\int_{\Gamma_{1-2}} \underline{\underline{\sigma}} n (\nabla u_1 - \nabla u_2) \theta}_{S110} d\Gamma \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 div \theta}_{S130} d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \nabla u \theta}_{S140} d\Gamma - \underbrace{\int_{\Omega} \rho \dot{u} \nabla \dot{u} \theta}_{S141} d\Gamma \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \nabla u^T \nabla u \nabla \theta}_{S150} d\Omega \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{\underline{\epsilon}}^{imp} \theta}_{S160} d\Omega
 \end{aligned} \tag{75}$$

où vecteurs et tenseurs sont repérés par un simple et double soulignement et où l'on note la trace du produit de tenseurs :

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} \equiv \text{tr}(\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}) \tag{76}$$

On retrouve dans cette équation les différents termes associés à :

- S10 et S20 : élasticité
- S50 : forces extérieures
- S40 : thermo-élasticité
- S70 : thermo-élasticité avec gradient de propriétés thermiques
- S60 : gradient de propriétés élastiques
- S120 : thermo-plasticité avec gradient thermique
- S100 et S110 : élasticité en présence d'une interface (discontinuité matériau)
- S130, S140 et S141 : dynamique
- S150 : grands déplacements
- S160 : déformations imposées

	Note Technique DEN	Page 26/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

3.5 Calcul des champs auxiliaires dans le cas du découplage

3.5.1 Méthode mécanique

La première méthode implémentée dans Cast3M pour générer des champs auxiliaires [25] repose sur une résolution mécanique d'un problème élastique où les lèvres de la fissure sont chargées en pression pour simuler un mode I pur, puis en cisaillement pour les modes II et III (cf. figure 11). Suo [25] note que le cas de fissures non-planes serait difficile à

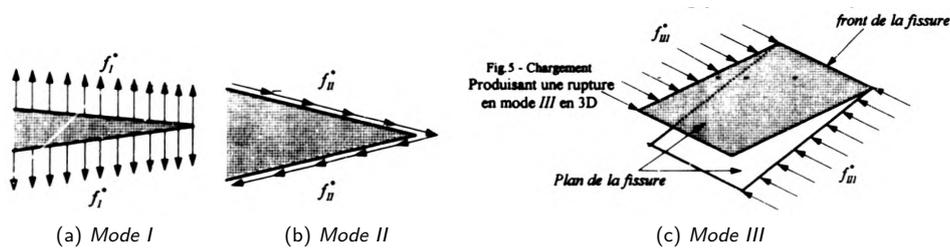


Figure 11 – Chargement pour la détermination des champs auxiliaires par une méthode mécanique [25]

traiter car le chargement et les conditions aux limites devraient alors être "locaux" et qu'il faudrait résoudre autant de problèmes que de points d'évaluation des intégrales d'interaction. On constate que le cas d'un front courbe pose des difficultés dans la définition d'un problème résoluble. Cette méthode pourrait être remplacée par une méthode analytique, déjà utilisée dans le cas de modélisation XFEM, s'il s'avère qu'elle donne de meilleurs résultats.

3.5.2 Méthode analytique

Cette approche consiste simplement à utiliser la solution de Westergaard établie dans le cas 2D (cf. §1.2). Elle nécessite la connaissance en tout point (nœuds et points de Gauss) des coordonnées locales au front de fissure. Cette information est fournie par les Level Set utilisés lors de modélisation XFEM.

Evidemment, en présence d'un front débouchant ou de courbure, la solution analytique de Westergaard n'est plus valide et quelques remèdes existent dans la littérature comme indiqué dans la bibliographie de [46]. Gosz *et al.* [33, 35] remarquent que la courbure et/ou la non-planéité de la fissure invalide l'équilibre de σ^{aux} et la compatibilité de ϵ^{aux} et que la prise en compte de termes supplémentaires est donc nécessaire. Ce type d'approche a été appliqué à la méthode XFEM par Gonzalez *et al.* [45]. Dans [49], un développement en série du champs asymptotique en fonction de la courbure locale est proposé. L'augmentation en ordre permet ainsi d'améliorer la convergence des résultats.

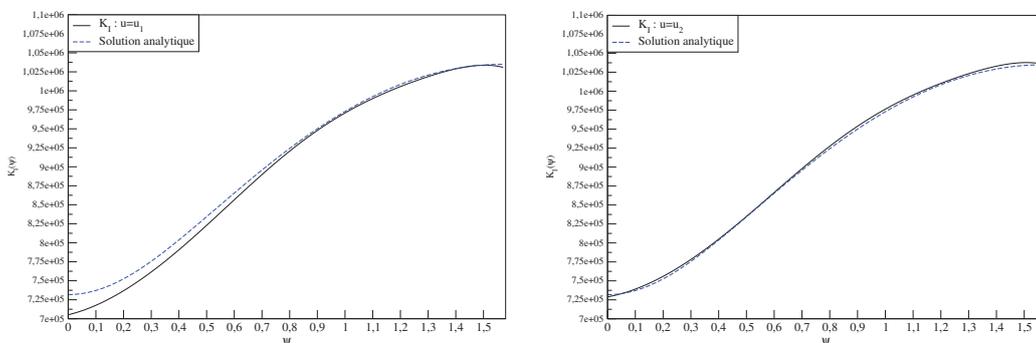


Figure 12 – K_I en fonction de l'angle pour une fissure plane à front elliptique [49] (à gauche utilisation de l'ordre 1; à droite, utilisation de l'ordre 2)

		Note Technique DEN	Page 27/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

4 Exemples d'illustration

4.1 Calculs thermo-mécaniques plans [23, 26]

Dans les notes [23, 26] de 1994 et 1996, on trouve 7 fiches de validation de la méthode G- θ pour des calculs thermo-élastique ou thermo-élasto-plastique plans.

Des configurations élémentaires y sont étudiés :

1. plaque avec fissure centrale soumise à un gradient thermique,
2. plaque avec $E(T)$ ou $\alpha(T)$ et fissure centrale soumise à un gradient thermique,
3. plaque élasto-plastique avec fissure centrale soumise à un gradient thermique,
4. plaque élasto-plastique avec fissure centrale soumise à un gradient thermique + chargement en traction,
5. section de tuyauterie élasto-plastique avec fissure radiale interne soumise à un chargement en pression interne puis à un gradient thermique dans l'épaisseur,
6. plaque élasto-plastique avec fissure latérale soumise à une évolution thermique puis à un chargement en traction.
7. plaque élasto-plastique avec fissure centrale soumise à une évolution thermique puis à un chargement en traction.

Des comparaisons avec les résultats d'autres codes montrent que l'implémentation de Cast3M est correcte et très stable dès la seconde couche d'éléments.

4.2 Calculs tridimensionnels élastiques [17]

Le choix de l'approximation de $G(s)$ discuté au §2.4 a fait l'objet de la note [17] pour les cas :

1. d'une fissure plane à front elliptique dans un cylindre en traction,
2. d'une fissure plane à front droit dans un pavé en traction.

Peu de différences ont été observées entre les 2 méthodes (cf. figures 13) et l'approximation *pointwise* a donc été préférée dans Cast3mM car plus simple.

4.3 Calculs tridimensionnels élastiques (rupt30.dgibi)

Afin de vérifier les capacités actuelles du code, on présente ici les résultats obtenus avec le cas-test rupt30.dgibi. Il s'agit d'une fissure plane à front circulaire dans un cylindre sollicité en traction. La modélisation utilise principalement des éléments CU20 (quadratiques). La figure 15 montre le maillage, les contraintes de Von Mises sur la déformée, les évolutions sur le front de K_I calculées par les options 'DECOUPLAGE' et 'J' de G_THETA, ainsi que la vérification de la stabilité de G avec le contour choisi.

En l'état actuel du code (version 2019 de Cast3M utilisée ici), on note :

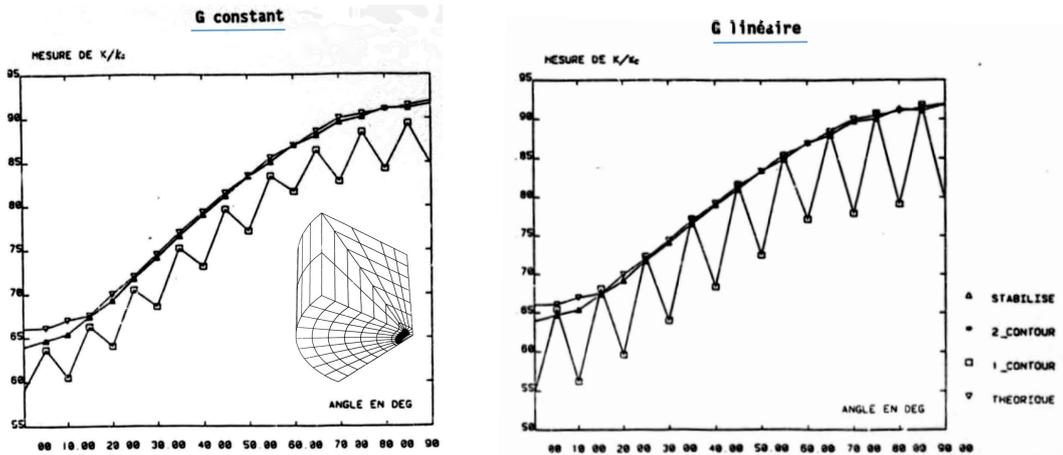
- un bon calcul de J (constant le long de front et avec les couches),
- une bonne valeur moyenne de K_I , mais une erreur importante sur les bords liées à l'absence des termes de surface, et une erreur à cœur dont la cause est probablement liée à la méthode "mécanique" de détermination des champs auxiliaires plutôt qu'à la courbure, car, si tel était le cas, elle aurait dû être constante.

4.4 Calculs tridimensionnels élasto-plastiques [22]

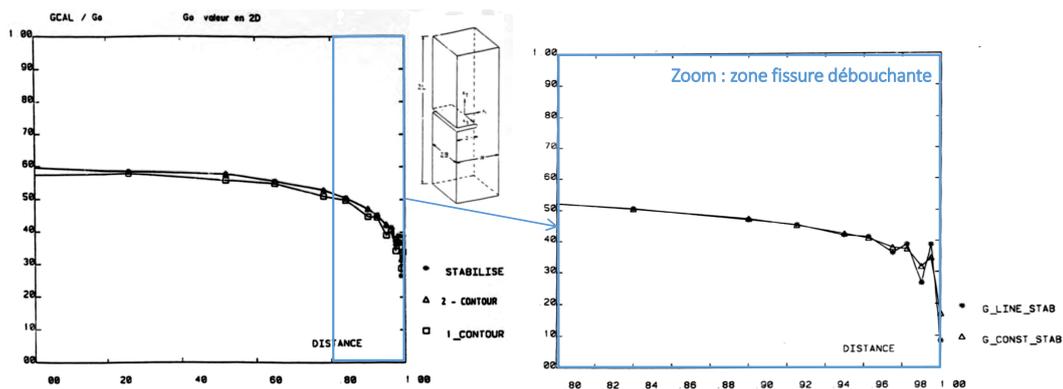
Le cas d'une fissure débouchante à front semi-elliptique dans un pavé élasto-plastique chargé en membrane et en flexion est étudié dans [22]. Seule la valeur de J en fond de fissure (point le plus chargé) est analysée.

Pour le chargement en membrane, deux courbes de traction sont considérées : avec un palier à 133 MPa, et sans palier mais avec une limite initiale d'élasticité à 50 MPa. Pour la première, les résultats obtenus sont éloignés de la

	Note Technique DEN Page 28/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797
	Date : 03/12/2019 Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M	

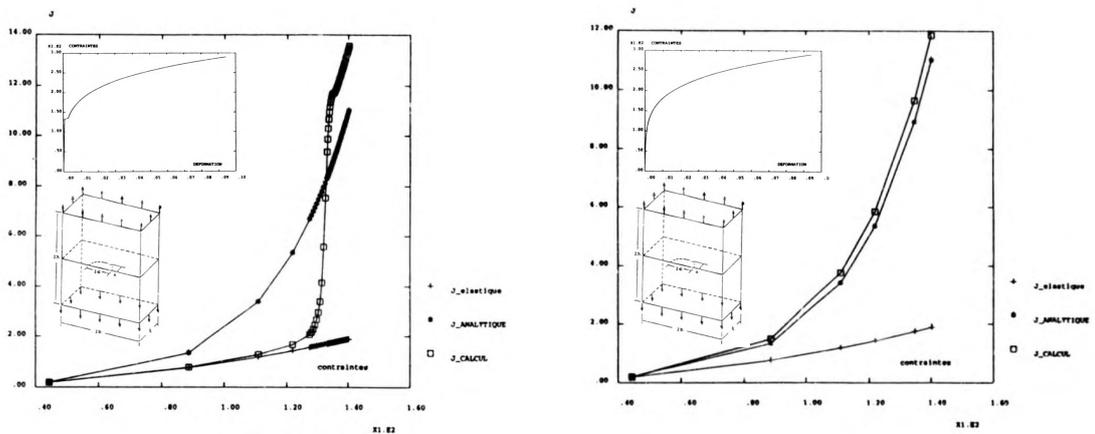


(a) Cas d'une fissure à front elliptique



(b) Cas d'une fissure à front droit

Figure 13 – Evolution de J le long du front [17]

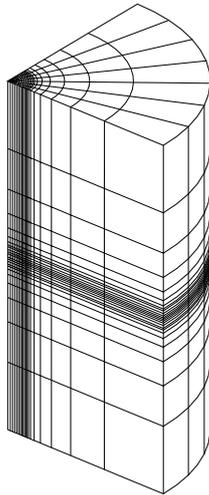


(a) Résultats pour la courbe de traction avec plateau

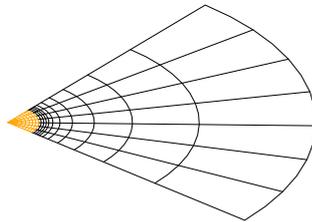
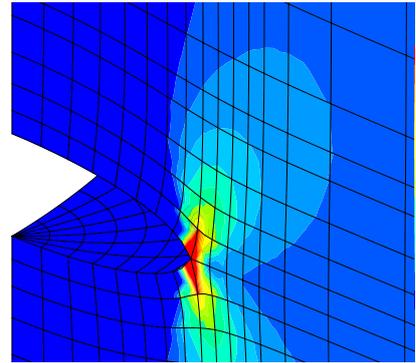
(b) Résultats pour la courbe de traction avec plateau

Figure 14 – Evolution de J avec t [22]

	Note Technique DEN	Page 29/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		



(a) Maillage du cylindre

(b) Maillage (vue du plan $z = 0$)

(c) Contraintes de Von Mises

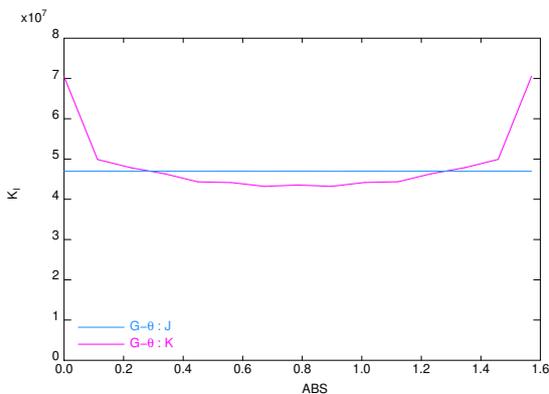
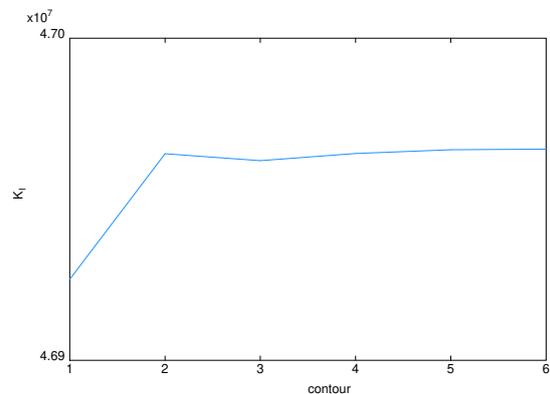
(d) Evolution $K_I(s)$ (e) Evolution K_I global avec le contour

Figure 15 – Résultats du cas-test rupt30.dgibi

solution analytique. Cela est attribué aux difficultés de convergence de l'algorithme non-linéaire utilisé. On constate en effet qu'avec la seconde courbe de traction, les résultats sont nettement meilleurs (figure 14).

Pour le chargement en flexion, un comportement élastique est utilisé et un bon accord avec la théorie est trouvé.

	Note Technique DEN	Page 30/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

4.5 Fonctionnalités testées par la base des cas-tests

La matrice des 34 cas-tests de Cast3M utilisant G_THETA est fournie ci-après :

Cas-test	Configuration	Mode de calcul	Élément	Objectif
rupt1	cylindre élastique avec fissure circonférentielle débouchante en traction	axisym.	quad.	J
rupt2	plaque élastique avec fissure latérale en thermo-élasticité	2D def. plane	quad.	J
rupt3	plaque élastique en traction avec fissure centrale	2D def. plane	quad.	J
rupt4	plaque élastique avec pression sur fissure centrale	2D def. plane	quad.	J
rupt5	tube en pression avec fissure interne	axisym.	quad.	J
rupt6	cylindre en traction avec fissure circulaire	3D	quad.	J
rupt7	plaque élastique en traction avec fissure inclinée	2D def. plane	quad.	découplage
rupt8	plaque élastique en traction avec fissure centrale	3D coque multicouche	DKT	J
rupt9	plaque élastique en traction avec fissure inclinée	2D def. plane	quad.	découplage
rupt11	plaque élastique avec fissure centrale en traction	2D def. plane	quad.	J et DJ/DA
rupt12	plaque élasto-dynamique en traction avec fissure centrale	2D def. plane	quad.	J_DYNA
rupt13	plaque élastique en flexion pure	3D coque multicouche	COQ4	J
rupt17	fissure proche interface bi-matériau élastoplastique en thermo-mécanique	2D def. plane	quad.	J
rupt18	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	axisym.	lin.	J
rupt19	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	axisym.	quad.	J
rupt20	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	3D	lin.	J
rupt21	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	3D	quad.	J
rupt22	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	axisym.	lin.	J
rupt23	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	axisym.	quad.	J
rupt24	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	3D	lin.	J
rupt25	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres et thermique	3D	quad.	J

Tableau 1 – Matrices des cas-tests utilisant G_THETA (début)

	Note Technique DEN	Page 31/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

Cas-test	Configuration	Mode de calcul	Elément	Objectif
rupt26	fissure élastique sous 3 chargements : traction, pression sur lèvres uniforme et parabolique	3D	quad.	J
rupt27	fissure élasto-plastique sous 3 chargements thermo-mécanique	axisym.	lin.	J
rupt28	fissure élasto-plastique sous 3 chargements thermo-mécanique	3D	quad.	J
rupt29	fissure élasto-plastique sous 3 chargements thermo-mécanique	3D	quad.	J
rupt30	plaque élastique en traction avec fissure circulaire inclinée	3D	quad.	J et découplage
xfem01	plaque élastique en traction avec fissure inclinée	2D def. plane	XQ4R	J et découplage
xfem02	plaque élasto-plastique avec fissure droite	2D def. plane	XQ4R	J
xfem04	plaque élastique en compression avec fissure inclinée	2D def. plane	XQ4R	découplage
xfem3d_01	cube élastique avec fissure plane à front semi-elliptique	3D	XC8R	J
nonconforme	plaque élastique en traction avec fissure centrale	2D def. plane	lin. + RAFF	J
raff01	plaque élastique en traction avec fissure centrale	2D def. plane	XQ4R + RAFF	J
raff03	plaque élastique en traction avec fissure inclinée	2D def. plane	XQ4R + RAFF	J et découplage
raff04	plaque élastique en traction avec fissure circulaire inclinée	3D	XC8R + RAFF	J et découplage

Tableau 1 – Matrices des cas-tests utilisant G_Theta (fin)

On remarque que n'apparaissent pas certaines fonctionnalités comme :

- fissure sur une interface ou perpendiculaire,
- gradient de propriétés (hors thermo-mécanique),
- grands déplacements,

et que les cas XFEM sont peu nombreux.

		Note Technique DEN	Page 32/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

Conclusions et perspectives

Les bases théoriques et d'implémentation de la méthode G- θ ont été posées dans cette note. L'utilisateur averti peut en déduire son domaine de validité.

Quelques exemples illustrent le fonctionnement de la méthode. De nombreuses références bibliographiques ont été données afin d'orienter la réflexion du lecteur, mais elles sont loin d'être exhaustives, les travaux sur le sujet étant très vastes. Par exemple, on ne répertorie pas les nombreuses notes utilisant la méthode à des fins applicatives et qui valide son fonctionnement dans des configurations variées.

Les principales observations qui mériteraient de plus amples travaux concernent :

- le traitement des fissures débouchantes,
- le découplage des modes lorsque le front est courbe ou la surface de fissure non-plane,
- la discrétisation de G et θ avec s , en particulier lorsqu'un modèle 3D XFEM est utilisé,
- la prise en compte des grands déplacements et grandes déformations ne semble pas complètement maîtrisée,
- d'un point de vue informatique, la maintenance de la procédure serait facilitée si certaines opérations étaient rationalisées et mieux découpées.

Un stage est actuellement en cours pour évaluer la mise en œuvre de solutions de la littérature sur certains des points ci-dessus. Des discussions informelles ont également lieu avec des membres de l'IMSIA pour mutualiser les retours d'expérience. Sachant que cette méthode est à la base de la quasi-totalité des analyses en mécanique de la rupture, une ré-appropriation du sujet par un jeune ingénieur à la fois utilisateur et développeur semble prioritaire du point de vue de l'auteur.

	Note Technique DEN	Page 33/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

Annexes

A Rappel sur la méthode XFEM telle qu'elle est implémentée dans Cast3M

La méthode des éléments finis étendus (*eXtended Finite Element Method*) fait l'objet de nombreux articles et ouvrages dont [39, 40, 41]. Elle a été développée et utilisée dans Cast3M pour diverses applications [38, 42, 43, 50]. Ici n'est rappelé que le minimum vital à savoir par l'utilisateur débutant.

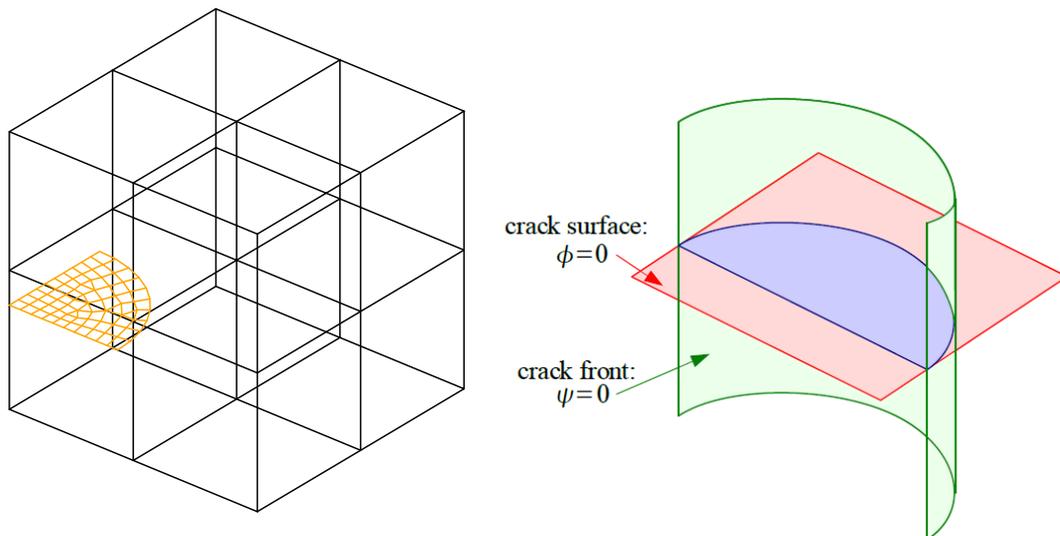
Deux ingrédients principaux composent la méthode XFEM :

- une description de la fissure indépendante de celle de la structure,
- l'enrichissement du déplacement permettant de représenter la présence de la fissure.

A.1 Description explicite/implicite de la fissure

Dans Cast3M, il a été fait le choix d'utiliser une double représentation (explicite/implicite) de la fissure.

En effet, les fonctionnalités de maillage de Cast3M permettent à l'utilisateur de mailler explicitement la surface de la fissure rapidement. Ce maillage est décorrélié de celui de la structure ainsi que représenté figure 16a.



(a) Description explicite via un maillage

(b) Description implicite via des fonctions de niveau

Figure 16 – Description explicite/implicite de la fissure

De cette représentation explicite sont déduites les fonctions de niveau (ou *Level Set*) grâce à l'opérateur PSIP parallélisé en 2018 (#9829). Cet opérateur construit 1, 2 ou 3 CHPOINT, nommés ψ , ϕ et τ , qui définissent la base locale en pointe de fissure comme représentée figure 17 :

$$\underline{x} = \psi \underline{e}_1 + \phi \underline{e}_2 + \tau \underline{e}_3 \quad (77)$$

avec,

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \nabla \psi \\ \underline{e}_2 = \nabla \phi \\ \underline{e}_3 = \nabla \phi \times \nabla \psi \end{cases} \quad (78)$$

	Note Technique DEN	Page 34/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

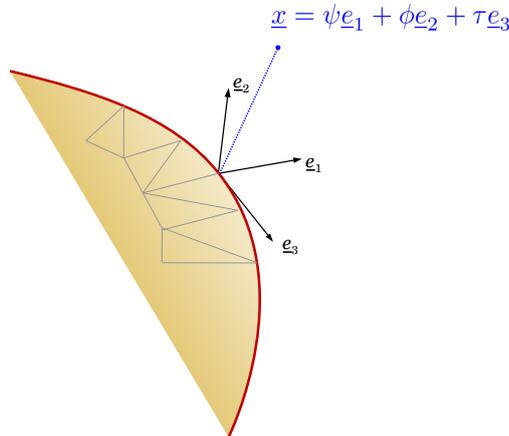


Figure 17 – Repère local au front de fissure

A.2 Enrichissement

Les fonctions de niveaux ψ et ϕ sont ensuite fournies à l'opérateur TRIE qui va enrichir le modèle sain (ou du pas précédent). Un champ d'enrichissement (objet MCHAML) défini par élément est construit et associé au modèle. L'approximation du déplacement devient ainsi :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_i N_i(\underline{x})u_i + \sum_{i \in \square} N_i(\underline{x})H_i(\underline{x})a_i + \sum_{i \in \triangle} \sum_{j=1..4} N_i(\underline{x})F_{ij}(\underline{x})b_{ij} \quad (79)$$

où les nœuds H et F enrichis sont respectivement représentés par des carrés (□) et des triangles (△) figure 18a.

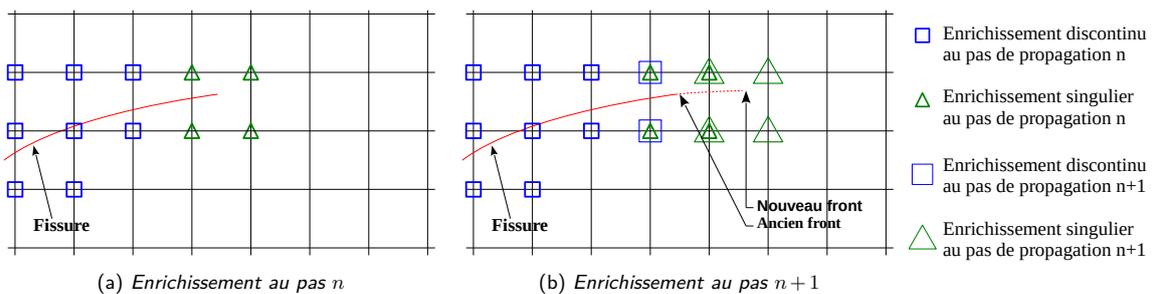


Figure 18 – Stratégie d'enrichissement pour une propagation élémentaire

Sur cette figure est également décrit la manière d'enrichir lors de la propagation. En outre, l'option 'DESE' permet d'établir les relations à imposer pour mettre à 0 au pas $n + 1$ les enrichissements F du pas n .

	Note Technique DEN	Page 35/38
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
	Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M		

B Approximation par polynôme de Legendre

On présente ici succinctement quelques éléments issus de la thèse de Le Cren [49], concernant l'utilisation des polynômes de Legendre notés $P(s)$ pour la détermination de $G(s)$

Le premier avantage de ce choix est un gradient plus faible du champ θ dans la direction tangente au front. Cet étalement des avancées virtuelles le long du front conduit à un effet de lissage. De plus, il n'y a pas de système linéaire à résoudre car ces polynômes sont orthogonaux. Cependant, si la fissure est débouchante et que le gradient de G est important à l'extrémité du front, cette base ne pourra pas bien la représenter. Le Cren remarque aussi que, pour des fonctions composées, le produits des interpolés aux points de Gauss est plus précis que l'interpolation du produit comme le montrent les figures 19a et 19b.

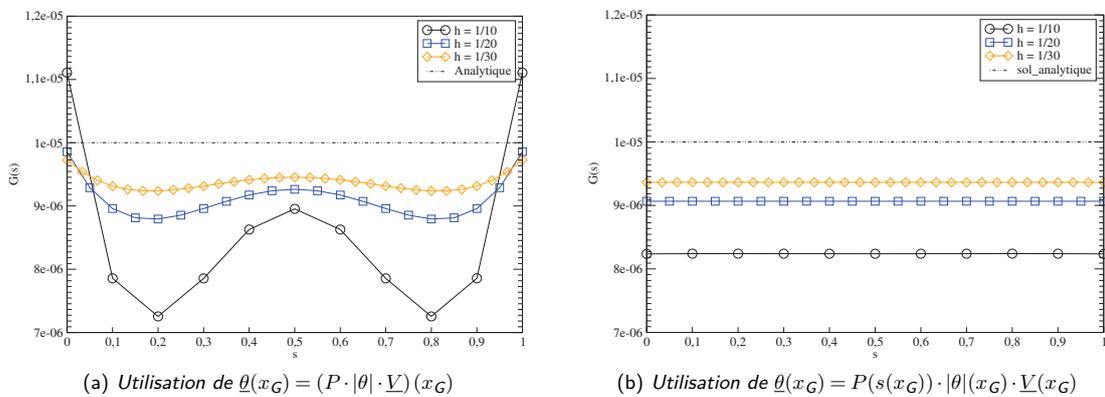


Figure 19 – Evolution de $G(s)$ le long d'un front rectiligne d'un cube chargé en mode I pur [49]

La même observation est réalisée avec une modélisation XFEM du problème (figure 20).

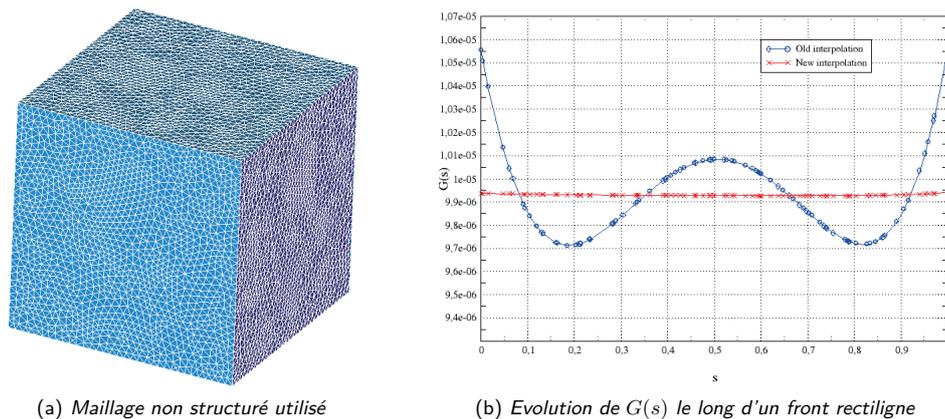


Figure 20 – Modélisation XFEM d'un cube comportant une fissure plane à front droit chargé en mode I pur [49]

L'avantage de cette approximation est d'éviter la construction d'un plan perpendiculaire au front où le champ θ ne serait que C^0 , comme cela est le cas lorsque l'on utilise les polynômes de Lagrange. C'est ce problème qui impose lors de la construction d'un maillage FEM, de mailler des surfaces orthogonales au front [22]. Cet aspect est essentiel lorsque l'on utilise une modélisation XFEM car le maillage n'est pas réglé selon le front de fissure.

		Note Technique DEN	Page 36/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

Références

- [1] A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of London*, 221(582-593) :163–198, 1921. Series A, containing papers of a mathematical or physical character.
- [2] H.M. Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6 :49–53, 1939.
- [3] G.R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 24 :361–364, 1957.
- [4] M. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :109–114, 1957.
- [5] J.R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968.
- [6] L. Freund. Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *Journal of Elasticity*, 2(4) :341–349, 1972.
- [7] P. Destuynder, M. Djaoua, and S. Lescure. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 2(1) :113–135, 1983.
- [8] C. Shih, B. Moran, and T. Nakamura. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of fracture*, 30(2) :79–102, 1986.
- [9] X. Suo. Application de la méthode THETA pour calculer le taux de restitution d'énergie en rupture élastique au moyen du programme Castem 2000. Rapport DMT 87-554, CEA, 1987.
- [10] X. Suo and A. Combescure. Une nouvelle méthode pour la stabilité de propagation de fissures en mécanique de la rupture élastique : Méthode II- θ . Rapport DMT 88-479, CEA, 1988.
- [11] X. Suo and A. Combescure. Sur une formulation mathématique de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en théorie de la rupture fragile. Rapport DMT 89-135, CEA, 1989.
- [12] A. Combescure. La méthode G TETA : Rapport de synthèse. Rapport DMT 90-206, CEA, 1990.
- [13] A. Combescure and X. Suo. Energy release rate and J integral for cracks propagating in non-homogeneous media. Part I : Problem formulation. Rapport DMT 91-316, CEA, 1991.
- [14] X. Suo and J. Brochard. Introduction dans Castem2000 de la méthode G-THETA pour les éléments de coques minces. Rapport DMT 91-279, CEA, 1991.
- [15] X. Suo and A. Combescure. Energy release rate and J integral for cracks propagating in non-homogeneous media. Part II : Finite element applications. Rapport DMT 91-446, CEA, 1991.
- [16] X.Z. Suo and A. Combescure. On the application of G (Θ) method and its comparison with De Lorenzi's approach. *Nuclear Engineering and Design*, 135(2) :207–224, 1992.
- [17] J. Brochard and A. Toquet. Analyses relatives au calcul des valeurs locales de G aux noeuds d'un front de fissure tridimensionnel. Rapport DMT 93-152, CEA, 1993.
- [18] X. Suo and J. Brochard. Calcul de l'intégrale caractéristique C^* en viscoplasticité par la méthode G-THETA. Rapport DMT 93-619, CEA, 1993.
- [19] J. Brochard and X. Suo. Le taux de restitution d'énergie G en mécanique de la rupture non-linéaire. Formulation de la méthode G- θ et description de la programmation dans Castem2000. Rapport DMT 94-640, CEA, 1994.
- [20] X. Suo and J. Brochard. Calcul élasto-plastique d'une éprouvette CT bimétallique avec une fissure proche de l'interface. Rapport DMT 94-132, CEA, 1994.
- [21] X. Suo and J. Brochard. Les intégrales caractérisant la rupture par fluage. Rapport DMT 97-681, CEA, 1994.
- [22] M. Valeta and J. Brochard. Description des procédures pour le calcul de G en 3D avec Castem2000. Rapport DMT 94-109, CEA, 1994.

		Note Technique DEN	Page 37/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

- [23] M. Valeta and J. Brochard. Tests de validation des méthodes de calcul de J pour des problèmes thermo-mécaniques plans. Rapport DMT 94-507, CEA, 1994.
- [24] M. Attigui, C. Petit, and M. Valeta. Identification des paramètres de fissuration en élasto-dynamique par la méthode G-THETA. Rapport DMT 95-675, CEA, 1995.
- [25] X. Suo and J. Brochard. Découplage des modes de rupture mixte par une méthode énergétique. Rapport DMT 95-068, CEA, 1995.
- [26] M. Valeta. Calcul de J dans 4 configurations bidimensionnelles sous chargement thermo-mécanique. Rapport DMT 96-179, CEA, 1996.
- [27] M. Valeta and J. Brieu. Rappel de la démonstration de l'expression "classique" du taux de restitution de l'énergie - méthode G-THETA. Rapport DMT 96-618, CEA, 1996.
- [28] A. Brisset and M. Lecoutre. Validité de l'intégrale J en élastoplasticité en cas de déchargement non monotone. Implantation de critères de décharge dans le code de calcul Castem2000. Rapport DMT 97-537, CEA, 1997.
- [29] X. Suo and M. Valeta. Introduction dans Castem2000 de l'intégrale $C^*(h)$ conditionnant la rupture par le fluage primaire. Rapport DMT 97-002, CEA, 1997.
- [30] X. Suo and M. Valeta. Taux de restitution de l'énergie et l'intégrale J en grands déplacements. Rapport DMT 97-157, CEA, 1997.
- [31] A. Brisset. Validité de l'intégrale J en élastoplasticité. Nouveaux critères de décharge dans le code de calcul Castem2000. Rapport DMT SEMT/LAMS/RT/98-038/A, CEA, 1998.
- [32] L.B. Freund. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge university press, 1998.
- [33] M. Gosz, J. Dolbow, and B. Moran. Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(15) :1763–1783, 1998.
- [34] X. Suo. Virtual crack extension in geometries under large displacements/rotations. Rapport DMT 98-031, CEA, 1998.
- [35] M. Gosz and B. Moran. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(3) :299–319, 2002.
- [36] J. Réthoré, A. Gravouil, and A. Combescure. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(5) :631–659, 2005.
- [37] H.D. Bui. *Fracture mechanics : inverse problems and solutions*. Springer, 2006.
- [38] B. Prabel. *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. Ph.D. thesis, INSA de Lyon, 2007.
- [39] A. Yazid, N. Abdelkader, and H. Abdelmadjid. A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12) :4269–4282, 2009.
- [40] T.P. Fries and T. Belytschko. The eXtended/Generalized Finite Element Method : An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010.
- [41] S. Pommier, A. Gravouil, N. Moes, and A. Combescure. *Extended finite element method for crack propagation*. John Wiley & Sons, 2011.
- [42] B. Prabel, T. Yuritzinn, T. Charras, and A. Simatos. Propagation de fissures tridimensionnelles dans des matériaux inélastiques avec XFEM dans Cast3m. In *10e colloque national en calcul des structures*. 2011.
- [43] A. Simatos, B. Prabel, S. Marie, M. Nedelec, and A. Combescure. Modelling the Tearing Crack Growth in a Ductile Ferritic Steel Using X-FEM Elements. pages, 281–294. American Society of Mechanical Engineers, 2011.

		Note Technique DEN	Page 38/38
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65797	
		Date : 03/12/2019	Indice : A
Synthèse sur la méthode G-θ et son implémentation dans Cast3M			

- [44] M. Allanic. Modélisation 3D de la propagation de fissure avec la méthode XFEM. Technical Report DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/13-005/A, CEA, 2013.
- [45] V.F. González-Albuixech, E. Giner, J.E. Tarancón, F.J. Fuenmayor, and A. Gravouil. Domain integral formulation for 3-D curved and non-planar cracks with the extended finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 264 :129–144, 2013.
- [46] C. Roux-Langlois. *Simulation de fissures courbes en trois dimensions avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes : En vue de l'identification de lois de propagation de fatigue*. Ph.D. thesis, Lyon, INSA, 2014.
- [47] B. Trollé. *Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails*. Ph.D. thesis, INSA de Lyon, 2014.
- [48] S. Pommier. Basics elements on linear elastic fracture mechanics and crack growth modeling. Doctoral course, 2017.
- [49] M. Le Cren. *Propagation robuste de défauts en 3D*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2018.
- [50] G. Gibert. *Propagation de fissures en fatigue par une approche X-FEM avec raffinement automatique de maillage*. Ph.D. thesis, INSA de Lyon, 2019.

B.2 Intégration temporelle des réponses des machines tournantes dans Cast3M

		
	NOTE TECHNIQUE DEN	Page 1/68

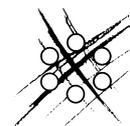
Direction de l'Energie Nucléaire
Direction déléguée aux Activités Nucléaires de Saclay
Département de Modélisation des Systèmes et Structures
Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

Benoit Prabel

DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/15-012/A

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Centre de Saclay - SEMT/DYN - Bâtiment 607 - Point Courrier 115
91191 Gif sur Yvette Cedex - FRANCE
Tél. : +33 (0)1 69 08 23 60 - Fax : +33 (0)1 69 08 87 80 - catherine.borgoltz@cea.fr
Établissement public à caractère industriel et commercial
RCS PARIS B 775 685 019



Réf du formulaire : F1-DM2S/DIR/PR/003 classe L^AT_EX docDM2S version C

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

		Note Technique DEN	Page 2/68
		Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
		Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M			

NIVEAU DE CONFIDENTIALITÉ				
DO	DR	CCEA	CD	SD
X				

PARTENAIRES/CLIENTS	ACCORD	TYPE D'ACTION
CEA		

RÉFÉRENCES INTERNES CEA			
DIRECTION D'OBJECTIFS	DOMAINE	PROJET	EOTP
DISN	ONIA		A-ENTNA-01-02
JALON	INTITULÉ DU JALON	DÉLAI CONTRACTUEL DE CONFIDENTIALITÉ	CAHIERS DE LABORATOIRE

SUIVI DES VERSIONS			
INDICE	DATE	NATURE DE L'ÉVOLUTION	PAGES ET CHAPITRES MODIFIÉS
A	01/09/2015	Document initial	

	NOM	FONCTION	VISA	DATE
RÉDACTEUR	Benoit Prabel	INGÉNIEUR-CHERCHEUR		
VÉRIFICATEUR	Philippe Piteau	INGÉNIEUR-CHERCHEUR		
APPROBATEUR	Thomas LAPORTE	CHEF DE LABORATOIRE		
AUTRE VISA				
ÉMETTEUR	Xavier AVERTY	CHEF DE SERVICE		

		Note Technique DEN	Page 3/68
		Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
		Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M			

MOTS CLEFS

Vibrations des machines tournantes, dynamique, éléments finis, schémas d'intégration temporelle, sous-structuration, squeeze-film, Cast3M.

RÉSUMÉ/CONCLUSIONS

En complément des analyses fréquentielles, les analyses temporelles permettent d'accéder aux réponses transitoires et stationnaires des structures soumises à des chargements dynamiques. Elles permettent de prendre en compte les non-linéarités de manière plus naturelle que dans le domaine fréquentiel, mais impliquent des contraintes sur la discrétisation temporelle (choix du pas de temps et de la durée de simulation). C'est pourquoi il est nécessaire de bien connaître la théorie et les domaines de validité relatifs aux différents schémas d'intégration temporelle.

Dans le présent rapport, sont présentés les éléments théoriques de ces schémas, ainsi que leur application pratique au cas des machines tournantes. Une attention particulière est également portée aux méthodes de sous-structuration dynamique qui permettent une réduction modale particulièrement efficace dans le cas d'ensemble rotor-stator.

Ce rapport montre également comment l'implémentation des schémas explicites a dû être adaptée afin de prendre en compte la nature pleine des matrices gyroscopiques et permettre ainsi de maintenir un pas de temps de stabilité raisonnable. De plus, dans le cas de l'utilisation de méthodes de sous-structuration, les matrices modales de masse et de raideur étant également pleines, des développements numériques ont été nécessaires au sein de l'opérateur DYNE de Cast3M pour prendre en compte cette spécificité.

Concernant les schémas implicites, une instabilité numérique liée à la liaison à coefficients périodiques entre le rotor et le stator a été observée. Un moyen de l'éviter a été d'implémenter les familles de schémas dissipatifs HHT et α -généralisé.

Enfin, la modélisation dans l'opérateur DYNE d'éléments fortement non-linéaires de type palier et *squeeze-film* est abordée dans une dernière partie et validée sur des exemples de la littérature.

		Note Technique DEN	Page 4/68
		Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
		Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M			

DIFFUSION INITIALE
(Diffusion par email)

Diffusion interne CEA

B. Prabel	Auteur	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
P. Piteau	Vérificateur	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
T. Laporte	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
X. Averty	Chef de Service	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
L. Borsoi		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
J. Cardolaccia		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
V. Faucher		DEN/CAD/DTN
S. Pascal	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
A. Millard		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
C. Berthinier		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
J. Kichenin		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
P. Verpeaux		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
I. Politopoulos		DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI
F. Wang		DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI
D. Gallet	Chef de Service	DEN/MAR/DTEC/SEPE/DIR
R. Grastien	Chef de Programme	DEN/EC/DISN

Diffusion externe

"sans objet"

Diffusion résumé

(page de garde + résumé)

C. Cavata	Chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
E. Foerster	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI

	Note Technique DEN	Page 5/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

SOMMAIRE

1	Éléments théoriques associés aux méthodes d'intégration temporelle directe	7
1.1	Notions élémentaires d'intégration temporelle	7
1.1.1	La famille des schémas de Newmark	7
1.1.2	Algorithme d'intégration des schémas de Newmark	9
1.1.3	Algorithmes d'intégration explicites	10
1.2	Choix d'un schéma	11
1.2.1	Stabilité et dissipation numérique	11
1.2.2	Autres caractéristiques des schémas	12
1.2.3	Outils disponibles dans Cast3M	12
1.3	Les méthodes dérivées du schéma de Newmark	13
1.3.1	La méthode α de Hilber-Hughes-Taylor (HHT)	13
1.3.2	La méthode α -généralisée de Chung & Hilber	14
1.4	Cas particulier des machines tournantes	16
1.4.1	Prise en compte des termes extra-diagonaux des matrices avec DYNE	16
1.4.2	Liaison rotor-stator	17
2	Quelques rappels de synthèse modale	18
2.1	Approximation sur la base des modes propres	18
2.2	Sous-structuration dynamique	18
2.2.1	Méthode de Craig et Brampton	18
2.2.2	Méthodes mettant en jeu des modes propres libres	19
3	Etude d'un rotor seul : rotor5	20
3.1	Description de l'exemple rotor5 et des modèles utilisés	20
3.2	Modélisation avec des éléments de type poutre	20
3.2.1	Analyses fréquentielles linéaires	21
3.2.2	Analyse temporelles transitoires linéaire	21
3.3	Modèle 3D	24
3.3.1	Analyses fréquentielles linéaires	24
3.3.2	Analyse temporelles transitoires linéaire	24
3.4	Réécriture d'une partie du schéma d'intégration temporelle de DYNE	27
3.4.1	Interprétation des résultats obtenus au §3.3.2 et remède	27
3.4.2	Application du remède dans DYNE	29
3.5	Bilan partiel	30
4	Etude d'un ensemble rotor + stator : rotorstator5	32
4.1	Modélisation avec des éléments de type poutre	32
4.1.1	Analyses fréquentielles linéaires	32
4.1.2	Analyses temporelles linéaires	32
4.2	Modélisation 3D avec un schéma implicite (méthode a)	34
4.2.1	Calculs transitoires avec le schéma de l'accélération moyenne	34
4.2.2	Résolution du problème d'instabilité	37
4.2.3	Calculs transitoires avec un schéma dissipatif	40
4.3	Modélisation 3D avec un schéma explicite (méthode c)	42
4.3.1	Utilisation par DYNE d'une base issue de la sous-structuration	42
4.3.2	Extension de la liaison COUPLAGE_DEPLACEMENT au cas de coefficients périodiques	43
4.3.3	Résultats obtenus par DYNE	44

	Note Technique DEN	Page 6/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

5	Modélisation de paliers et de squeeze-film	45
5.1	Modélisation de paliers	45
5.2	Modélisation de <i>squeeze-film</i>	45
5.2.1	Cas test de Cookson et Kossa [1]	46
5.2.2	Cas test de Inayat-Hussain <i>et al.</i> [2]	47
5.2.3	Cas test de Zhu <i>et al.</i> [3]	50
	Références	55
	Annexes	56
A	Organisation informatique de l'opérateur DYNE	56
B	Cas-tests Cast3M appelant l'opérateur DYNE	58
C	Exemples d'application de DYNAMOI à d'autres domaines de la mécanique	60
C.1	Interaction Fluide-Structure	60
C.2	Impact élastique	61
D	Equations de la mécanique des fluides appliquée aux films minces	64
D.1	Equation de Reynolds	64
D.2	Cas des géométries cylindriques	66
D.3	Approximation de type "palier court"	68

	Note Technique DEN	Page 7/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

1 ÉLÉMENTS THÉORIQUES ASSOCIÉS AUX MÉTHODES D'INTÉGRATION TEMPORELLE DIRECTE

1.1 Notions élémentaires d'intégration temporelle

L'intégration temporelle consiste à déterminer l'équilibre d'un système à un instant t_{n+1} (état qu'on notera X_{n+1}) ayant connaissance de l'état du système aux instants précédents (X_0, X_1, \dots, X_n). On considère ici seulement les schémas à 1 pas de temps, c'est à dire ceux qui utilisent seulement X_n pour calculer l'état X_{n+1} . Progressant ainsi *step-by-step*, on obtient la réponse temporelle du système considéré.

De nombreux ouvrages comme ceux de Hughes [4], Géradin [5], Argyris [6] ou Zienkiewicz [7] présentent les fondements et propriétés des schémas d'intégration temporelle et nous invitons le lecteur à s'y référer pour plus de détails. Dans cette section, on se contente de présenter les principaux schémas d'intégration temporelle implicites et explicites. Les schémas plus élaborés comme le HHT (Hilber-Hughes-Taylor) et l' α -method (version généralisée du HHT), sont introduits au paragraphe 1.3. Le schéma de Krenk ou encore les schémas de type Galerkin discontinu ne sont pas présentés dans le présent rapport.

1.1.1 La famille des schémas de Newmark

Zienkiewicz[7] présentent 2 types de schémas basés sur 2 démarches de construction :

- les algorithmes SS p_j (pour *Single Step with approximation of degree p for equation of degree j=1,2*) construits en minimisant un résidu pondéré,
- les algorithmes GN p_j (pour *Genreal Newmark with degree p and degree j*) construits via un développement de Taylor tronqué.

Il s'avère que le SS22 peut être identifié comme le schéma de Newmark "classique" GN22.

Ce dernier est certainement le plus employé en mécanique des structures. Suivant l'approche de Geradin [5] et Argyris[6], on l'introduit en considérant le développement de Taylor :

$$f_{n+1} = f_n + \Delta t \dot{f}_n + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} f_n^{(p)} + R_p \quad (1)$$

où R_p est le reste à l'ordre p qui peut notamment être défini de la manière intégrale suivante :

$$R_p = \int_n^{n+1} \frac{(t_{n+1} - \tau)^p}{p!} f^{(p+1)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

Les problèmes de dynamique des structures étant du second ordre, il semble naturel de tronquer l'expansion (1) à l'ordre $p = 1$ pour les déplacements et $p = 0$ pour les vitesses :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \int_n^{n+1} (t_{n+1} - \tau) \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (3a)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \int_n^{n+1} \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (3b)$$

Afin d'établir une formule de récurrence, il est donc nécessaire de choisir une approximation de $\ddot{u}(\tau)$ entre t_n et t_{n+1} pour intégrer (3). On peut choisir d'approximer $\ddot{u}(\tau)$ via l'un des développements de Taylor suivants :

$$\ddot{u}_n = \ddot{u}(\tau) + u^{(3)}(\tau)(t_n - \tau) + u^{(4)}(\tau) \frac{(t_n - \tau)^2}{2} + \dots \quad (4a)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}(\tau) + u^{(3)}(\tau)(t_{n+1} - \tau) + u^{(4)}(\tau) \frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2} + \dots \quad (4b)$$

	Note Technique DEN	Page 8/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

En ajoutant l'équation (4a) multipliée par $(1 - \gamma)$ à l'équation (4b) multipliée par γ , on obtient une expression de $\ddot{u}(\tau)$ qu'on injecte dans l'équation (3b). Il reste à réaliser l'intégration :

$$\int_n^{n+1} \ddot{u}(\tau) d\tau = \Delta t(1 - \gamma)\dot{u}_n + \Delta t\gamma\dot{u}_{n+1} + r_\gamma \quad (5)$$

pour obtenir une expression de la vitesse à l'instant $n + 1$.

De même, en ajoutant l'équation (4a) multipliée par $(1 - 2\beta)$ à l'équation (4b) multipliée par 2β , on obtient une autre expression de $\ddot{u}(\tau)$ qu'on injecte dans l'équation (3a). Il reste à réaliser l'intégration :

$$\int_n^{n+1} (t_{n+1} - \tau)\ddot{u}(\tau) d\tau = \left(t_{n+1}\Delta t - \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{2} \right) \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (6)$$

$$= \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{u}_{n+1} + r_\beta \quad (7)$$

pour obtenir une expression du déplacement à l'instant $n + 1$.

Ainsi, on établit les relations de récurrence du schéma de Newmark :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{u}_{n+1} + r_\beta \quad (8)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{u}_n + \Delta t\gamma\ddot{u}_{n+1} + r_\gamma$$

où sont négligés les restes de troncature r_β et r_γ définis comme :

$$r_\beta = \Delta t^3 \left(\beta - \frac{1}{6} \right) u^{(3)}(\tilde{\tau}) + O(\Delta t^4 u^{(4)}) \quad (9)$$

$$r_\gamma = \Delta t^2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) u^{(3)}(\tilde{\tau}) + O(\Delta t^3 u^{(4)})$$

La deuxième ligne de (8) montre que la variation de vitesse est directement liée à l'accélération en début de pas et à la variation d'accélération pendant le pas, laquelle est pondérée par γ . La figure 1 tirée du livre d'Argyris [6] illustre bien cette propriété (attention, sur cette figure l'accélération \ddot{u} est notée \ddot{r}).

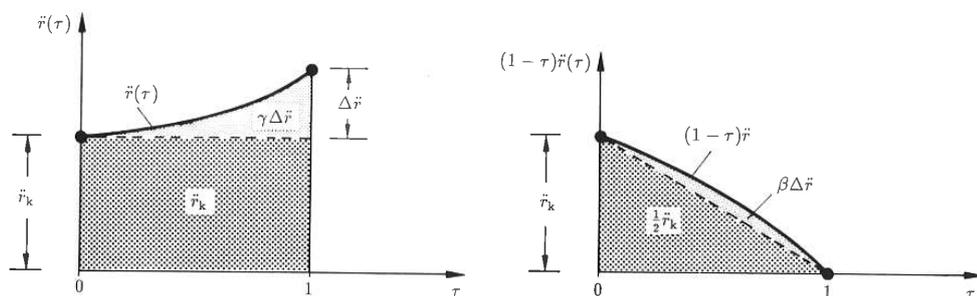


FIGURE 1 – Interprétation des coefficients γ et β

Si on utilise directement une approximation de l' **accélération linéaire** au cours du pas de la forme :

$$\ddot{u}(\tau) \simeq \dot{u}_n + (\tau - t_n) \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{\Delta t} \quad (10a)$$

	Note Technique DEN	Page 9/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

et qu'on l'utilise dans l'intégration de (3), on constate que l'on obtient les mêmes relations de récurrence qu'avec le choix de paramètres :

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{6} \quad (10b)$$

De même, l'approximation de l'**accélération** par sa valeur **moyenne** :

$$\ddot{u}(\tau) \simeq \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2} \quad (11a)$$

conduit au même schéma que le choix :

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4} \quad (11b)$$

Il est aussi possible de choisir un couple de paramètres (γ, β) qui introduit de l'amortissement numérique dans le schéma de Newmark via la constante $\alpha > 0$:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2 \quad (12)$$

Cette méthode de Newmark amorti est aussi souvent appelée schéma de l'**accélération moyenne modifiée**.

1.1.2 Algorithme d'intégration des schémas de Newmark

Les relations de récurrence précédemment établies sont ensuite utilisées pour résoudre l'équilibre dynamique :

$$M\ddot{u}_{n+1} + C\dot{u}_{n+1} + Ku_{n+1} = F_{n+1}^{ext} \quad (13)$$

Afin de résoudre ce problème avec un formalisme incrémental, on remet les expressions (8) sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}(u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{u}_n \\ \dot{u}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(u_{n+1} - u_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_n + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_n \end{aligned} \quad (14)$$

Les injectant dans (13), on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}M + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}C + K \right] (u_{n+1} - u_n) &= F_{n+1}^{ext} - Ku_n \\ &\quad - C \left(\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_n + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_n \right) \\ &\quad - M \left(-\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{u}_n \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ce qui, considérant les paramètres de l'accélération moyenne, peut s'écrire sous la forme :

$$\left[\frac{4}{\Delta t^2}M + \frac{2}{\Delta t}C + K \right] (u_{n+1} - u_n) = F_{n+1}^{ext} - Ku_n + C\dot{u}_n + M \left(\frac{4}{\Delta t}\dot{u}_n + \ddot{u}_n \right) \quad (16)$$

Si on utilise l'équilibre à t_n , on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\left[\frac{4}{\Delta t^2}M + \frac{2}{\Delta t}C + K \right] (u_{n+1} - u_n) = F_{n+1}^{ext} + F_n^{ext} - 2Ku_n + M\frac{4}{\Delta t}\dot{u}_n \quad (17)$$

C'est l'équation (17) qui est implémentée dans la procédure DYNAMIC de Cast3M. Elle a l'avantage de ne pas introduire au second membre des termes liés à la matrice d'amortissement et de ne pas nécessiter le calcul de l'accélération, mais elle n'est pas adaptée au cas où les matrices varient d'un pas de temps à l'autre (car il faudrait ajouter $\Delta Ku_n + \Delta C\dot{u}_n + \Delta M\ddot{u}_n$ au second membre).

	Note Technique DEN	Page 10/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

1.1.3 Algorithmes d'intégration explicites

Un premier schéma d'intégration temporelle explicite est celui des **différences centrées**, qui est le schéma de Newmark avec $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = 0$. Le déplacement à l'instant $n + 1$ ne dépend que des quantités à l'instant n :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_n \quad (18)$$

On montre (cf. [5] par ex.) qu'en combinant habilement les expressions des déplacements et vitesses à t_{n+1} et t_n , l'accélération et la vitesse peuvent s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n &= \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} \\ \dot{u}_n &= \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (19)$$

Cependant, dans l'implémentation algorithmique, c'est souvent la vitesse au demi-pas de temps (20) qui est utilisée,

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (20)$$

car elle permet d'écrire la vitesse à t_{n+1} sous la forme :

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{n+1} + \dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Finalement, à chaque pas de temps, il faut calculer u_{n+1} depuis (18) et $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$ depuis (20), puis résoudre :

$$M\ddot{u}_{n+1} + C\dot{u}_{n+1} = F_{n+1}^{ext} - Ku_{n+1} \quad (22a)$$

$$\left[M + \frac{\Delta t}{2} C \right] \ddot{u}_{n+1} = F_{n+1}^{ext} - Ku_{n+1} - C\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \quad (22b)$$

ce qui est très simple en considérant une matrice de masse M diagonalisée et les vitesses au demi-pas pour le calcul des forces d'amortissement plutôt que celles au pas de temps (ce qui résulte en la simplification de l'équation 22b).

Parmi les méthodes explicites, on peut aussi citer la méthode de **Runge-Kutta** [8], qui peut être vue comme un schéma d'Euler où le pas courant est recalculé en fonction de l'estimation obtenue en fin de pas. En choisissant 4 évaluations du second membre, on peut ainsi construire une méthode d'ordre 4 (souvent notée RK4).

Enfin la méthode de **De Vogelaere** [9, 10, 11, 12] qui est elle aussi d'ordre 4 ne requiert que 2 évaluations du second membre. Elle est basée sur un développement de Taylor à l'ordre 5 et 6 pour $u_{n+\frac{1}{2}}$ et u_{n+1} autour de t_n , et à l'ordre 3 et 4 pour $F_{n-\frac{1}{2}}$ et $F_{n+\frac{1}{2}}$ autour de t_n . L'utilisation respective des quadratures par les trapèzes et de Simpson permet d'exprimer les vitesses $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$ et \dot{u}_{n+1} .

On veut résoudre l'équilibre dynamique pour le pas de temps t_{n+1} :

$$M\ddot{u}_{n+1} + C\dot{u}_{n+1} = F_{n+1}^{ext} + F_{n+1}^{liaison} - Ku_{n+1} = F_{n+1} \quad (23)$$

	Note Technique DEN	Page 11/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

connaissant u_n, \dot{u}_n, F_n et $F_{n+\frac{1}{2}}$. A cette fin, ainsi que détaillé dans [13], on calcule :

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{24} (4F_n - F_{n-\frac{1}{2}} - C(4\dot{u}_n - \dot{u}_{n-\frac{1}{2}})) \quad (24a)$$

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{4}{4 + \Delta t C} \left(\dot{u}_n + \frac{\Delta t}{4} (F_n + F_{n+\frac{1}{2}} - C\dot{u}_n) \right) \quad (24b)$$

$$\ddot{u}_{n+\frac{1}{2}} = F_{n+\frac{1}{2}} - C\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \quad (24c)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{6} (F_n + 2F_{n+\frac{1}{2}} - C(\dot{u}_n + 2\dot{u}_{n+\frac{1}{2}})) \quad (24d)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{6}{6 + \Delta t C} \left(\dot{u}_n + \frac{\Delta t}{6} (F_{n+1} + 4F_{n+\frac{1}{2}} + F_n - C(4\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} + \dot{u}_n)) \right) \quad (24e)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = F_{n+1} - C\dot{u}_{n+1} \quad (24f)$$

où les $F = F/M$ et $C = C/M$ sont aisément calculés puisque les matrices M et C sont supposées diagonales. L'étape (24c) est réalisée bien qu'a priori inutile. Il est par ailleurs nécessaires d'initialiser l'algorithme avec :

$$u_{-\frac{1}{2}} = u_0 - \frac{\Delta t}{2} \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{8} (F_0 - C\dot{u}_0) \quad (25)$$

$$\dot{u}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4 - \Delta t C} \left((4 + \Delta t C)\dot{u}_0 - \Delta t(F_{-\frac{1}{2}} + F_0) \right)$$

1.2 Choix d'un schéma

1.2.1 Stabilité et dissipation numérique

La stabilité du schéma de Newmark dépend de la valeur des paramètres γ et β :

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta \Rightarrow \text{inconditionnellement stable} \quad (26a)$$

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \text{ and } 2\beta \leq \gamma \Rightarrow \text{stable si } \Delta t \leq \Delta t_{crit} \quad (26b)$$

$$\text{où } \Delta t_{crit} \equiv \Delta t^e \frac{\xi(\gamma-1/2) + [\gamma/2 - \beta + \xi^2(\gamma-1/2)^2]^{1/2}}{\gamma/2 - \beta} \leq \frac{\min(\Delta x^e)}{\sqrt{E/\rho}} \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right)^{-1/2} \quad (26c)$$

$\Delta t^e = \frac{\min(\Delta x^e)}{\sqrt{E/\rho}}$ est le temps caractéristique d'un élément de module d'Young E , de masse volumique ρ et de distance internodale Δx^e . ξ est l'amortissement modal associé.

On résume dans le tableau 1 les conditions de stabilité de différents algorithmes présentés. Il est important de noter que les pas de temps indiqués dans ce tableau ne sont valables que dans le cas linéaire et en l'absence de second membre.

Schéma	γ	β	$\Delta t_c / \Delta t^e$
Différence centrée	1/2	0	2
Fox and Goodwin	1/2	1/12	2.45
Accélération linéaire	1/2	1/6	3.46
Accélération moyenne	1/2	1/4	∞
Accélération moyenne modifiée	$1/2 + \alpha$	$1/4(1 + \alpha)^2$	∞
Runge-Kutta 4	-	-	$2\sqrt{2}$
Fu-De Vogelaere	-	-	$2\sqrt{2}$

TABLE 1 – Stabilité de quelques schémas d'intégration temporels

	Note Technique DEN	Page 12/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

La figure 2a représente le rayon spectral des principaux schémas de Newmark. On rappelle que le rayon spectral ρ est calculé en considérant la plus grande valeur propre de la matrice d'amplification A d'un système élémentaire à 1 ddl. La matrice d'amplification se définit (équation 27) comme l'opérateur permettant de passer du vecteur d'état à l'instant n au vecteur d'état à l'instant $n + 1$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \Delta t \dot{u}_{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ \Delta t \dot{u}_n \\ \Delta t^2 \ddot{u}_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

Le rayon spectral renseigne sur la stabilité et l'amortissement numérique des schémas. Une valeur de $\rho > 1$ indique un comportement instable, tandis qu'une valeur de $\rho < 1$ indique une tendance du schéma à amortir ces fréquences.

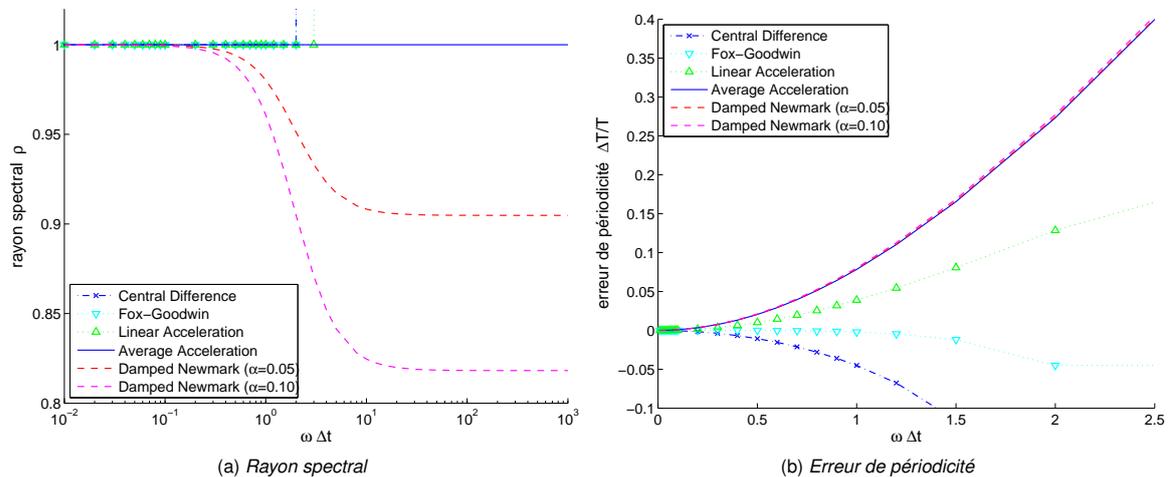


FIGURE 2 – Caractéristiques des principaux schémas de Newmark

1.2.2 Autres caractéristiques des schémas

En plus de la précision (liée à l'ordre de troncature du développement de Taylor) et de la stabilité, on considère aussi souvent l'erreur d'amplification et de périodicité des schémas d'intégration. L'étude analytique d'un système harmonique à 1 degré de liberté (1-ddl) non-amorti de pulsation propre ω menée dans [5] montre que l'erreur d'amplification est nulle tant que $\gamma = \frac{1}{2}$ (ce qui est vrai pour les principaux schémas de Newmark comme détaillé dans le tableau 2), et que l'erreur de périodicité est proportionnelle à $\omega^2 \Delta t^2$ pour l'ensemble des schémas excepté celui de Fox et Goodwin pour lequel l'erreur est en $O(\Delta t^3)$. Cette dernière est représentée figure 2b.

En pratique, le choix d'un schéma d'intégration temporelle se fait surtout en fonction du problème à traiter. Le tableau 2, inspiré de l'exposé de De Langre [12], synthétise les éléments orientant ce choix.

1.2.3 Outils disponibles dans Cast3M

Dans le tableau 2, on a fait apparaître le logiciel EUROPLEXUS et les opérateurs ou procédures Cast3M correspondants à la méthode d'intégration temporelle décrite. DYNAMIC peut être utilisé à la place de PASAPAS si la non-linéarité est de type de contact seulement. De plus, il est possible d'utiliser une base modale avec DYNAMIC, situation non décrite par ce tableau.

DYNAMIC : Cette procédure est une version *allégée* de PASAPAS, qui calcule la réponse dynamique du système sur base physique ou modale en l'absence de non-linéarité (à part le contact en petit déplacement). Elle utilise le schéma de

	Note Technique DEN	Page 13/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

		Éléments Finis		Base Modale	Equations intégrales
		Implicite PASAPAS	Explicite EUROPLEXUS	Explicite DYNE	
Structure	élancée	+	+	++	0
	massive	++	++	0	+
Non-linéarités	localisée	+	+	++	+
	répartie	++	++	0	+
	simple	+	+	+	+
	complexe	0	++	++	0
	interne (comportement...)	+	+	0	0
	frontière (contact...)	+	+	+	++
	faible (grand déplacement...)	+	+	0	+
	forte (choc...)	+	++	++	0
Durée du phénomène	court	+	++	+	+
	long	++	0	+	0

TABLE 2 – Performances des méthodes d'intégration temporelles selon les caractéristiques du problème
(0 : méthode inadaptée, + : méthode utilisable, ++ : méthode très bien adaptée)

Newmark implicite de l'accélération moyenne. Dans ce rapport, on utilisera une nouvelle procédure baptisée DYNAMOI, initialement inspirée par DYNAMIC, mais avec un nombre d'évolutions non négligeables qui seront détaillées dans ce rapport.

DYNE : Cet opérateur est dédié au calcul sur base modale avec des non-linéarités localisées (contact, chocs, paliers ...). Deux algorithmes explicites peuvent être utilisés : le schéma des différences centrées et le Fu-De Voegelaere. Durant cette étude, de nombreuses évolutions ont été apportées à cet opérateur de manière à proposer "Un DYNE presque parfait" pour nos cas d'applications.

1.3 Les méthodes dérivées du schéma de Newmark

Dans certaines situations particulières, il peut être nécessaire d'introduire de l'amortissement numérique. Comme on l'a vu précédemment, la méthode de Newmark "amortie" ou "modifiée" le permet, mais de manière grossière (l'amortissement numérique affecte largement les moyennes fréquences) et au prix d'une perte de précision notable (erreur d'amplification). Ceci explique pourquoi l'intérêt des méthodes plus *évoluées* visant à contrôler plus précisément cet amortissement numérique.

1.3.1 La méthode α de Hilber-Hughes-Taylor (HHT)

La méthode HHT (également appelée méthode α de Hilber-Hughes-Taylor) a été introduite en 1977 dans [14] et est présentée dans de nombreux ouvrages [6, 5, 4]. Les efforts inertiels à t_{n+1} sont équilibrés par les efforts à $t_{n+1-\alpha}$. L'équation de la dynamique à résoudre devient ainsi :

$$M\ddot{u}_{n+1} + (1 - \alpha)C\dot{u}_{n+1} + (1 - \alpha)Ku_{n+1} + \alpha C\dot{u}_n + \alpha Ku_n = (1 - \alpha)F_{n+1}^{ext} + \alpha F_n^{ext} \quad (28)$$

En utilisant la formule de récurrence de Newmark modifié (12) avec la même valeur de α pour évaluer γ et β , on obtient un schéma du second ordre qui dissipe les hautes fréquences en affectant moins les moyennes fréquences que le schéma de Newmark de l'accélération moyenne modifié, comme le montre l'évolution du rayon spectral de la méthode (figure 3a).

On constate que le schéma HHT est identique au schéma de Newmark lorsque $\alpha = 0$.

	Note Technique DEN	Page 14/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

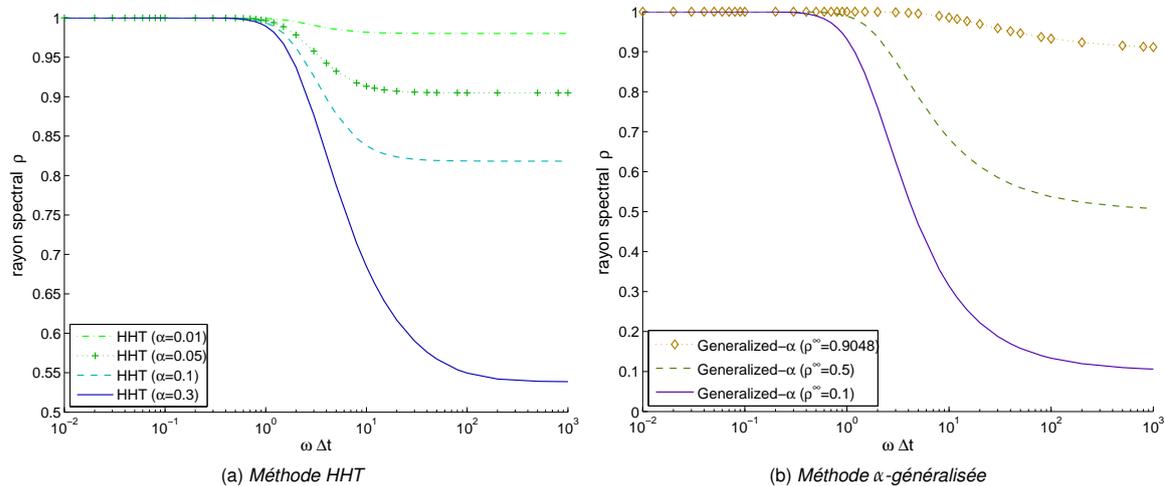


FIGURE 3 – Rayon spectral des méthodes α (HHT) et α -généralisée

1.3.2 La méthode α -généralisée de Chung & Hilber

Plus récemment (en 1993), Chung et Hulbert [15] ont généralisé la méthode HHT en introduisant un second paramètre α_m affectant les termes d'inertie. L'équation d'équilibre à résoudre devient ainsi :

$$(1 - \alpha_m)M\ddot{u}_{n+1} + \alpha_m M\ddot{u}_n + (1 - \alpha_f)C\dot{u}_{n+1} + (1 - \alpha_f)Ku_{n+1} + \alpha_f C\dot{u}_n + \alpha_f Ku_n = (1 - \alpha_f)F_{n+1}^{ext} + \alpha_f F_n^{ext} \quad (29)$$

Afin de rester de second ordre et de dissipation maximale aux hautes fréquences, il faut choisir les paramètres selon :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha_f - \alpha_m)^2 \quad (30)$$

Par rapport à la méthode HHT, la méthode α -généralisée permet de dissiper beaucoup plus les hautes fréquences et de manière beaucoup plus ciblée comme l'illustre la figure 3b. En effet, il suffit de choisir α_m et α_f selon :

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \text{et} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (31)$$

où ρ_∞ est le rayon spectral lorsque $\omega\Delta t \rightarrow \infty$. Ce dernier peut varier de 0 à 1, alors qu'avec la méthode HHT, il est limité à la plage [0.52 - 1] puisque $\alpha < 1/3$.

Il est important de noter que :

- choisir $\rho_\infty = 1$ impose $\alpha_m = 0.5$ et $\alpha_f = 0.5$,
- et que choisir $\rho_\infty = 0$ impose $\alpha_m = -1$ et $\alpha_f = 0$.

On ne peut donc pas retrouver le schéma de Newmark ni le schéma HHT si on respecte la relation (31).

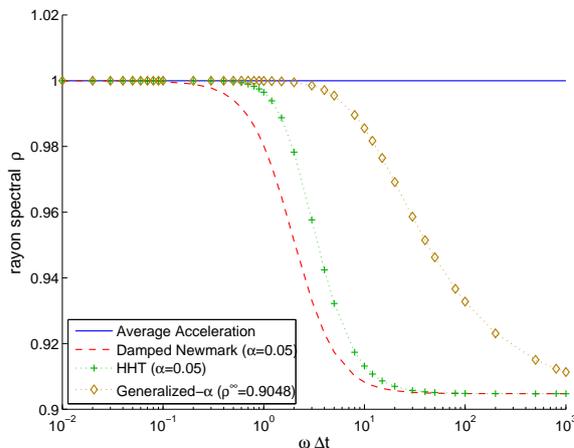
Les tracés comparatifs des rayons spectraux, amortissement numérique et erreur de périodicité de ces derniers schémas sont donnés figure 4. Ceux-ci ont été obtenus en appliquant l'approche de Géraudin [5, 16] au présent schéma, aboutissant, après quelques pages de calculs, à l'étude des valeurs propres de la matrice d'amplification :

$$A = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\alpha_f}{1-\alpha_m}\Omega^2 & 1 & \frac{1}{2} - \frac{\beta}{1-\alpha_m} \\ -\frac{\gamma}{1-\alpha_m}\Omega^2 & 1 + \frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}(\beta - \gamma)\Omega^2 & 1 - \frac{\gamma}{1-\alpha_m} - \frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}(\frac{\gamma}{2} - \beta)\Omega^2 \\ -\frac{\gamma}{1-\alpha_m} & -\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}\Omega^2 & -\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} - \frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}(\frac{1}{2} - \beta)\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

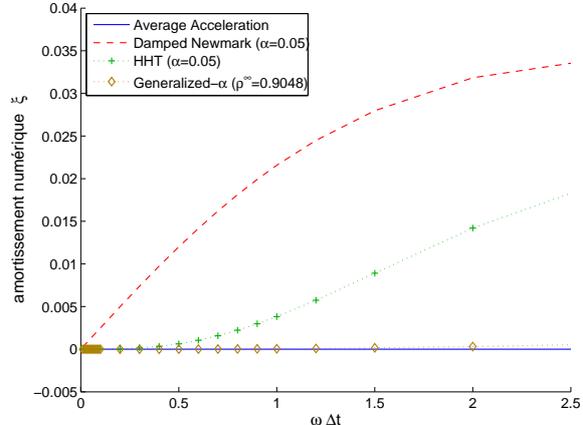
où $D = 1 + \beta\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}$ et $\Omega = \omega\Delta t$.

	Note Technique DEN	Page 15/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

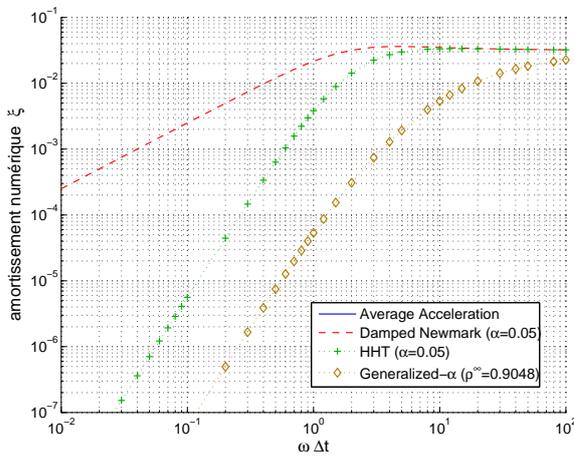
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M



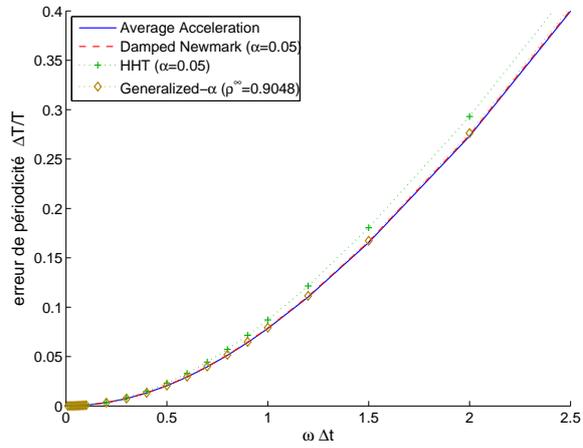
(a) Rayon spectral



(b) Amortissement



(c) Amortissement (échelle log)



(d) Erreur de périodicité

FIGURE 4 – Caractéristiques de quelques schémas dérivés de Newmark

	Note Technique DEN	Page 16/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

1.4 Cas particulier des machines tournantes

Dans ce paragraphe, on se contente de signaler les deux principales caractéristiques liées à l'intégration temporelle de systèmes tournants. La suite de cette note mettra en évidence quelles sont les difficultés qui en résultent et quelles solutions ont été mises en place afin d'obtenir des algorithmes satisfaisants.

1.4.1 Prise en compte des termes extra-diagonaux des matrices avec DYNE

Les matrices de couplage gyroscopique G^{gyro} et d'amortissement corotatif H (pour les poutres décrites dans le repère fixe) et de Coriolis G^{Cori} (pour les modèles 3D décrits dans le repère tournant) ne deviennent pas diagonales lorsqu'elles sont projetées sur la base des modes propres réels.

Afin de les prendre en compte dans le schéma de résolution de DYNE, il était nécessaire (jusqu'à la présente étude) de "passer" ces forces au second membre de l'équation (23). Ceci est possible en créant pour une base de m modes m^2 liaisons élémentaires sur base A* de type COUPLAGE_VITESSE ou COUPLAGE_DEPLACEMENT, via une double boucle gibiane du type :

```

TLIAI = TABLE 'LIAISON' ;
TLIAI.'LIAISON_A' = TABLE 'LIAISON_A' ;
I=0;
Iliai = 0;
REPETER BLOC1 Nmode;
  I=I+1;
  PtI = ((TBASR1.'MODES'). I). 'POINT_REPERE';
  Vunit = MANU CHPO PtI 1 'ALFA' 1.;
  CHPOM1 = CGP*Vunit;
  CHPOM2 = KHP*Vunit;
  J=0;
  REPETER BLOC2 Nmode;
    J=J+1;
    PtJ = ((TBASR1.'MODES'). J). 'POINT_REPERE';
    Iliai = Iliai + 1;
    CoefCG1 = EXTR CHPOM1 'FALF' PtJ;
    CoefKH2 = EXTR CHPOM2 'FALF' PtJ;
    mess Iliai ': G_{ I J } = ' CoefCG1
              '- K_{ I J } = ' CoefKH2;
  * couplage gyroscopique
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai = TABLE 'LIAISON_ELEMENTAIRE';
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'TYPE_LIAISON' = MOT 'COUPLAGE_VITESSE';
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'SUPPORT' = PtJ;
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'ORIGINE' = PtI;
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'COEFFICIENT' = (-1.)*CoefCG1;
  * amortissement corotatif
  Iliai = Iliai + 1;
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai = TABLE 'LIAISON_ELEMENTAIRE';
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'TYPE_LIAISON' = MOT 'COUPLAGE_DEPLACEMENT';
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'SUPPORT' = PtJ;
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'ORIGINE' = PtI;
  TLIAI.'LIAISON_A'.Iliai.'COEFFICIENT' = (-1.)*CoefKH2;
  FIN BLOC2;
FIN BLOC1;

```

La vitesse utilisée pour l'évaluation de ce terme de couplage qui participe à \mathbb{F}_{n+1} ne peut pas être \dot{u}_{n+1} puisque ce terme dépend de \mathbb{F}_{n+1} (cf. équation 24a). Ainsi, c'est $\frac{u_{n+1} - u_{n+1/2}}{\Delta t/2}$ (dans le cas de De Vogelaere) qui est utilisé, comme l'indique la notice de DYNE [17].

Une solution alternative est d'ajouter la matrice des effets gyroscopiques G à C , ce qui implique d'inverser les matrices

*. Dans DYNE, les liaisons sur base A sont celles exprimées sur les degrés de liberté modaux. Les liaisons sur base B sont quant à elles exprimées sur les degrés de liberté du modèle éléments finis non-réduit et nécessitent donc une recombinaison modale à chaque pas de temps.

	Note Technique DEN	Page 17/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

désormais non-diagonales mettant en jeu $C + G$. Comme cela est discuté au § 3.4, cette solution nécessite de modifier substantiellement DYNE, mais permet de maintenir un pas de temps critique raisonnable.

Un autre cas où l'on rencontre des matrices projetées non diagonales est celui de l'utilisation d'une base modale construite par sous-structuration dynamique comme cela est décrit au § 2.2. Dans ce cas, les matrices de masse et de raideur projetées sont également pleines. On verra que cette possibilité a également été introduite pour l'opérateur DYNE.

1.4.2 Liaison rotor-stator

Liaison par multiplicateurs de Lagrange

La modélisation en 2D Fourier ou en 3D implique une description du rotor dans le repère tournant. La prise en compte de la souplesse (et a fortiori l'amortissement) du stator (i.e. des appuis) nécessite d'écrire une liaison entre ces deux parties. A cause du changement de repère, cette liaison est nécessairement dépendante du temps.

Si l'on considère cette liaison comme **parfaite**, une équation de liaison cinématique entre ces deux parties doit être ajoutée au système à résoudre. Si on considère que Z est l'axe de rotation du rotor, UX , UY et UZ les degrés de liberté (ddl) du stator et UX' , UY' et UZ' les ddl du rotor, on a ainsi :

$$\begin{pmatrix} UX \\ UY \\ UZ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} UX' \\ UY' \\ UZ' \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$U = P(\Omega t) \cdot U'$$

En introduisant un vecteur Λ de 3 multiplicateurs de Lagrange associés aux 3 relations, on peut remettre cette relation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -I & P \\ -I^T & 0 & 0 \\ P^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda \\ U \\ U' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

soit $L(\Omega t) \cdot q = 0$

Cette dernière matrice doit être ajoutée à K . Ainsi, même dans un cas linéaire, l'opérateur implicite d'intégration temporelle (matrice à gauche de l'égalité 17) change avec le temps. Le cas de structures avec contraintes est traité largement dans la littérature concernant la *flexible multibody dynamics* [16, 18].

Liaison par pénalité (ou via une raideur de liaison)

Une deuxième manière de traiter cette liaison est de considérer une **force de rappel** (physique ou artificielle), proportionnelle au déplacement multiplié par la raideur κ associée à la liaison, et agissant sur chacune des parties selon le principe d'action-réaction :

$$F = -\kappa(U - P(\Omega t)U') \quad (35a)$$

$$P(\Omega t)F' = +\kappa(U - P(\Omega t)U') \quad (35b)$$

In fine, la raideur entre les degrés de liberté liant le rotor et le stator s'exprime comme :

$$\begin{pmatrix} FX \\ FX' \\ FY \\ FY' \end{pmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -1 & \cos \Omega t & 0 & -\sin \Omega t \\ \cos \Omega t & -1 & \sin \Omega t & 0 \\ 0 & \sin \Omega t & -1 & \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t & 0 & \cos \Omega t & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} UX \\ UX' \\ UY \\ UY' \end{pmatrix} \quad (36)$$

L'équation précédente illustre le cas d'une raideur définie entre le rotor et le stator, mais une modélisation plus fine est possible en considérant une force fonction non-linéaire des déplacements et vitesses.

	Note Technique DEN	Page 18/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

2 QUELQUES RAPPELS DE SYNTHÈSE MODALE

Il convient maintenant de définir les choix possibles pour réaliser l'approximation spatiale de la solution, à savoir :

- approximation éléments finis classique (souvent nommée "base physique" dans ce rapport) : $u(x, t) \simeq N_i(x) \cdot u_i(t)$,
- approximation par une base des modes propres (§ 2.1),
- approximation par une base issue d'une méthode de sous-structuration (§ 2.2).

2.1 Approximation sur la base des modes propres

On construit la base des modes propres $[\Phi(x)] = [\dots\phi_j(x)\dots]$ avec $j = 1..m$ en résolvant le problème non-amorti homogène associé (où K et M sont construits sur l'espace éléments finis classique) :

$$[K - \omega_j^2 M] \phi_j = 0 \quad (37)$$

On approxime ensuite la solution sur cette base de vecteurs propres afin de réduire la taille du système à intégrer temporellement :

$$u(x, t) \simeq [\Phi(x)] \cdot \alpha(t) \quad (38)$$

où $[\Phi(x)]$ de taille $n \times m$ avec $m \ll n$ permet de réduire notablement la taille du système à intégrer puisque l'on projette les équations de la dynamique sur cette base :

$$K^* \alpha(t) + C^* \dot{\alpha}(t) + M^* \ddot{\alpha}(t) = F^*(t) \quad (39)$$

où $K^* = \Phi^T K \Phi$, $C^* = \Phi^T C \Phi$, $M^* = \Phi^T M \Phi$, et $F^* = \Phi^T F \dots$

2.2 Sous-structuration dynamique

La base des modes propres est parfaitement adaptée au cas d'un rotor seul, ou d'un ensemble rotor-stator décrit dans le même repère (fixe) ce qui est le cas d'un modèle de poutre. Par contre, pour les modèles 2D Fourier et 3D, le rotor étant décrit dans le repère tournant, il est nécessaire de calculer séparément les modes du rotor et du stator pour réaliser une analyse temporelle.

Les méthodes de sous-structuration dynamique ont d'abord été introduites pour permettre de résoudre des problèmes principalement vibratoires de grands ensembles constitués de plusieurs composants liés les uns aux autres par un petit nombre de ddl. C'est le cas d'une machine tournante supportée par un nombre fini de paliers et butées.

Nous introduisons donc ici les notions générales liées à la sous-structuration appliquée à la problématique des machines tournantes de manière la plus simple possible. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans le livre de Gibert [19, chap. 9], la synthèse de Craig [20], la documentation de Code_Aster [21] ou le cours de Didier Combescure [22, §3.4].

2.2.1 Méthode de Craig et Brampton

Parmi les nombreux choix possibles, la méthode de Craig et Brampton est souvent considérée comme la référence. Celle-ci considère la base constituée par :

- les modes propres bloqués des sous-structures, notés $\Phi = [\dots\phi_j\dots]$
- les solutions statiques des sous-structures, notées $\Psi = [\dots\psi_j\dots]$

Soit U_i et U_b les n_i et n_b ddl intérieurs et de frontière d'une sous-structure. Alors, les modes propres bloqués de cette sous-structure sont obtenus en résolvant le système avec l'interface bloquée :

$$\left[\begin{array}{ccc} K_{ii} & K_{ib} & 0 \\ K_{bi} & K_{bb} & L_b^T \\ 0 & L_b & 0 \end{array} \right] - \omega_j^2 \left[\begin{array}{ccc} M_{ii} & M_{ib} & 0 \\ M_{bi} & M_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} U_i \\ U_b \\ \lambda \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40a)$$

$$\text{soit} \quad \left[\begin{array}{cc} K & L_b^T \\ L_b & 0 \end{array} \right] - \omega_j^2 \left[\begin{array}{cc} M & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \phi_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40b)$$

	Note Technique DEN	Page 19/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Les solutions statiques sont quant à elles obtenues en résolvant les n_b systèmes :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} & 0 \\ K_{bi} & K_{bb} & L_{b\lambda} \\ 0 & L_{\lambda b} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_b \\ \lambda \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_j^{imp} \end{pmatrix}_j \quad (41a)$$

$$\text{soit } \begin{bmatrix} K & L_b^T \\ L_b & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_j^{imp} \end{pmatrix}_j \quad (41b)$$

où le déplacement imposé de la $j^{\text{ème}}$ résolution est défini comme $U_j^{imp} = (\delta_{jj})^T$, soit seule la $j^{\text{ème}}$ inconnue est non-nulle est égale à 1.

L'illustration de cette méthode de sous-structuration est donnée par la figure 5 où deux sous-structures 1 et 2 sont liées par des degrés de liberté de déplacements communs.

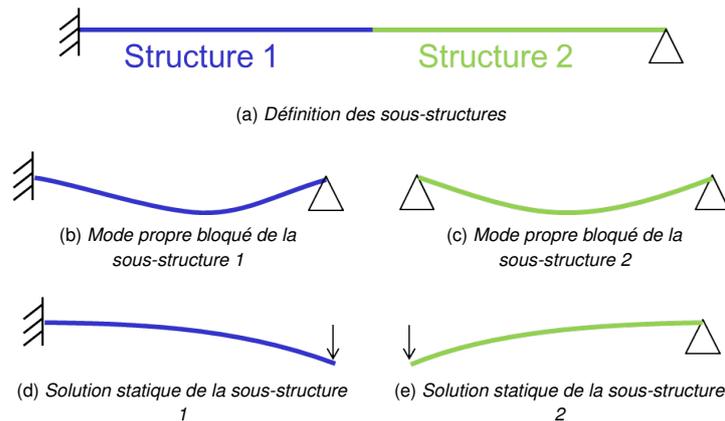


FIGURE 5 – Méthode de Craig et Brampton

La projection de la matrice de raideur sur la base ainsi formée est aisée puisque :

$$\phi_i^T [K - \omega_j^2 M] \phi_j = -\phi_i^T L_b^T \lambda_j = 0 \quad \text{car bloqué} \quad (42a)$$

$$\Rightarrow \phi_i^T K \phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T M \phi_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (42b)$$

$$\text{et } \phi_i^T K \psi_j = -\phi_i^T L_b^T \lambda_j = 0 \quad \forall i, j \quad \text{car bloqué} \quad (42c)$$

Par contre, on ne peut rien dire de plus sur les autres termes. Finalement, on a les matrices projetées :

$$K^* = \begin{bmatrix} \text{diag}(k_j^*) & 0 \\ 0 & \Psi^T K \Psi \end{bmatrix} \quad M^* = \begin{bmatrix} \text{diag}(m_j^*) & \Phi^T M \Psi \\ \Psi^T M \Phi & \Psi^T M \Psi \end{bmatrix} \quad (43)$$

Relativement facile à mettre en oeuvre, cette méthode présente également des matrices projetées relativement creuses.

2.2.2 Méthodes mettant en jeu des modes propres libres

On peut dans un premier temps considérer une base constituée uniquement de modes propres libres. Cependant, comme le montre [20, §5.2] ou le cas-test `dyna14.dgibi` en grande partie ré-écrit durant la présente étude, une telle base est très imprécise. Il est nécessaire de la compléter avec des modes d'attache (méthode de Mac Neal).

	Note Technique DEN	Page 20/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

3 ETUDE D'UN ROTOR SEUL : ROTOR5

Cet exemple est issu des travaux de D. Combesure [23, p. 51-54] sur la modélisation des machines tournantes avec des éléments de poutre. Le cas-test rotor5.dgibi fait partie de la base des cas-test de Cast3M et vérifie le bon fonctionnement de ce type de modélisation notamment pour le calcul de réponse transitoire avec les opérateurs DYNE et DYNAMIC.

3.1 Description de l'exemple rotor5 et des modèles utilisés

Longueur	Rayon	Module d'Young	Coefficient de Poisson	Masse volumique	Viscosité
10 m	200 mm	2.E11 Pa	0.3	7800 kg.m ³	2.E7 Pa.s

TABLE 3 – Caractéristiques de l'arbre

Il s'agit d'un arbre encastré à ses deux extrémités et dont les caractéristiques (de masse, d'élasticité et d'amortissement visqueux) sont récapitulées dans le tableau 3. Au trois quarts de la longueur de cet arbre est fixé un disque ou des pales. Le disque possède un rayon de 1 m et une épaisseur de 50 mm. On peut aussi choisir de modéliser 4 pales au lieu du disque; celles-ci sont générées par une rotation de chaque quart de disque d'un angle β variant linéairement de 0 à 25° entre le rayon de l'arbre et le rayon extérieur.

Les maillages 3D sont réalisés avec des éléments d'ordre 2 hexaédriques et prismatiques (CU20 et PR15). Un tracé de ce maillage est donné figure 6. Une centaine d'éléments sont utilisés dans la longueur pour les modèles de poutre contre une vingtaine seulement pour le modèle 3D afin de garder un temps de calcul raisonnable. Le nombre de degrés de liberté est respectivement de 600 et 5230 pour ces deux modèles.

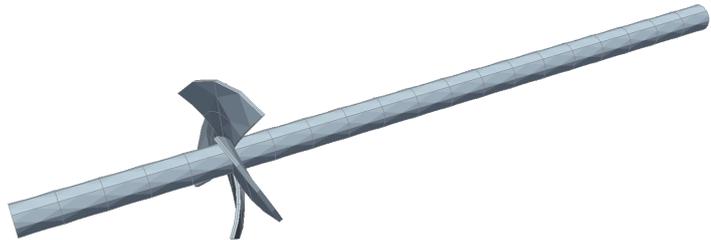


FIGURE 6 – Maillage 3D massif de rotor5 dans le cas où $\beta=25^\circ$

3.2 Modélisation avec des éléments de type poutre

Un premier modèle basé sur les poutres de Bernoulli (modèle POUT de Cast3m) est utilisé. Pour celui-ci, la prise en compte du disque ou des pales est réalisée via une condensation statique de leur caractéristiques de raideur, masse et effet gyroscopique en un point de l'arbre à l'aide des opérateurs SUPER et MANU 'RIGI' ainsi que représenté sur la figure 7.

On rappelle l'équation de la dynamique pour les modèles de poutre [23, p. 6] :

$$M\ddot{u} + (C + G)\dot{u} + (K + H)u = F^{ext} \quad (44)$$

où G est la matrice de couplage gyroscopique et H est la matrice d'amortissement corotatif.

On ne présentera ici que les résultats obtenus dans le cas d'un disque, car les calculs avec des pales inclinées de $\beta = 25^\circ$ donne sans surprise des résultats quasi-identiques, les modes de pales intervenant à des fréquences plus élevées.

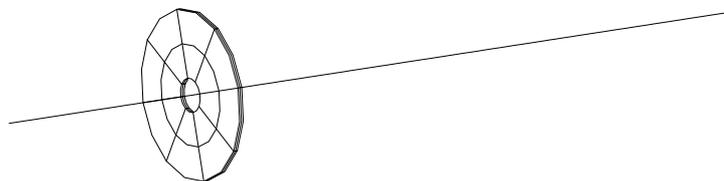


FIGURE 7 – Maillage poutre de rotor5 dans le cas où $\beta=0^\circ$
(Les degrés de liberté du disque massif sont condensés sur la poutre)

	Note Technique DEN	Page 21/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

3.2.1 Analyses fréquentielles linéaires

On calcule tout d'abord le premier couple de modes réels (en négligeant les matrices C , G et H). La fréquence trouvée est de 7.4962 Hz.

Ensuite, le diagramme de Campbell est établi directement dans le repère fixe. Les évolutions des parties réelles et imaginaires sont données figure 8. On observe un très faible couplage gyroscopique et un amortissement tournant qui déstabilise la structure au delà de la vitesse critique via le mode rétrograde.

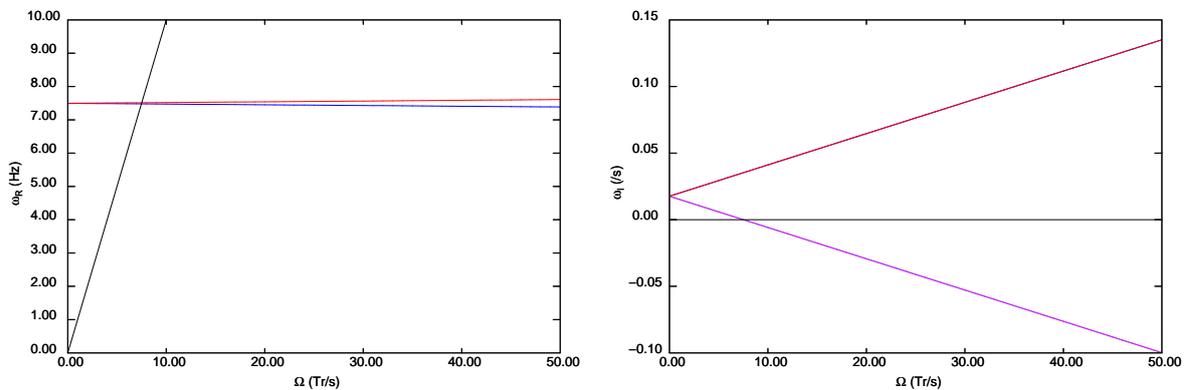


FIGURE 8 – Diagramme de Campbell de rotor5 modélisé avec des éléments de poutre

La réponse (stationnaire) au balourd engendrée par la perte d'un quart de disque est donnée figure 9. L'amortissement

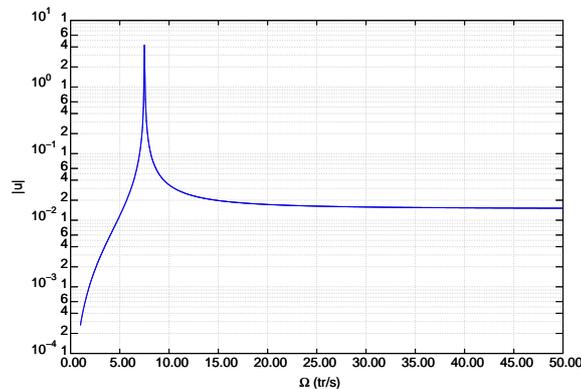


FIGURE 9 – Réponse au balourd de rotor5 modélisé avec des éléments de poutre

tournant ne limite pas l'amplitude vibratoire lors de la résonance.

3.2.2 Analyse temporelles transitoires linéaire

Un balourd généré par une perte de pale est appliqué à un rotor tournant à 5 Hz sur une demi-période. Cela se traduit dans le chargement par une rampe variant linéairement de 0 à 1 entre 0 et $T/2$ comme l'illustre la figure 10. Dans l'exemple original (rotor5.dgibi et rapport [23]), cette mise en charge était réalisée sur quelques pas de temps seulement, excitant ainsi un spectre plus large. Egalement, l'amortissement corotatif qui était négligé est ici pris en compte.

L'orbite-réponse du modèle de poutre est donnée figure 11a où on compare les intégrations implicite sur base physique (DYNAMIC) et explicite sur base modale (DYNE DE_VOGELAERE).

	Note Technique DEN	Page 22/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

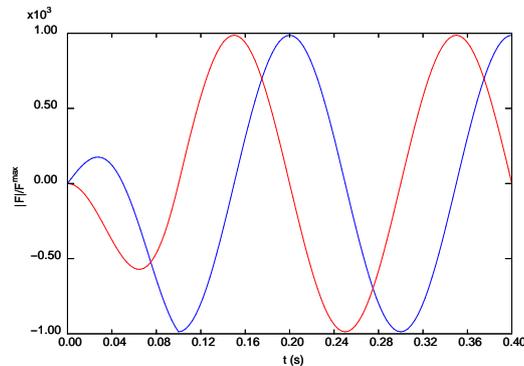


FIGURE 10 – Evolution temporelle des efforts de balourd appliqués au rotor5

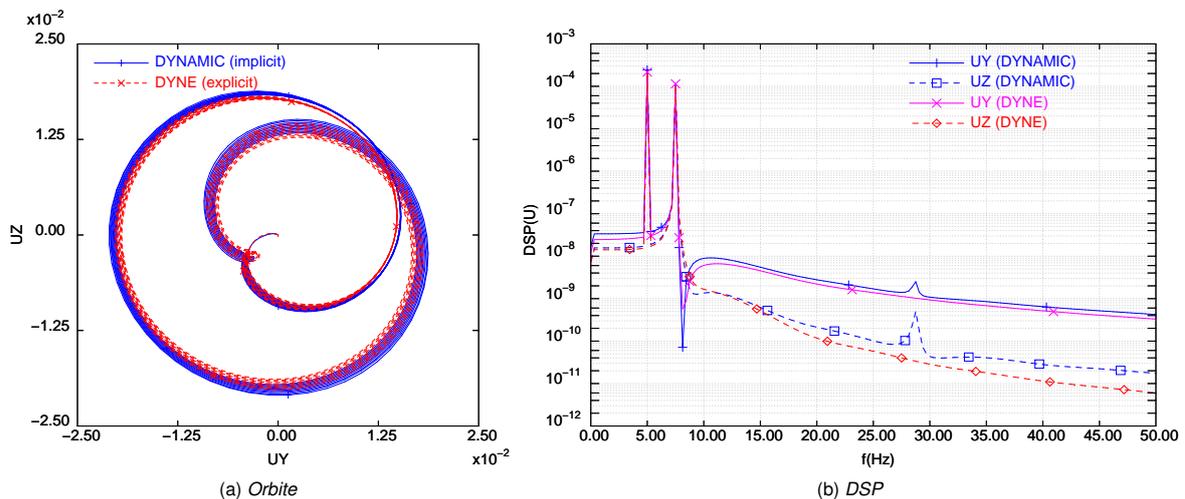


FIGURE 11 – Réponse temporelle transitoire d'un point du rotor5 modélisé avec des éléments de poutre

Avec la procédure DYNAMIC, la fréquence de coupure f_{coup} fournie en entrée par l'utilisateur détermine le pas de temps de calcul utilisé par le schéma de Newmark de DYNAMIC via la formule : $\Delta t = \frac{1}{4f_{coup}}$. Dans nos simulations, on a choisi $f_{coup} = \frac{64}{T}$ où $T = \frac{1}{\Omega}$ est la période de rotation du rotor, ce qui amène à $\Delta t = \frac{T}{256}$. En sortie de cette procédure, on choisit de ne sauver qu'un pas de temps sur 4, soit un point toutes les $\frac{T}{64}$ s. Pour l'opérateur DYNE, le pas de temps retenu pour le calcul est le même que dans le cas test rotor5 original, soit $\Delta t = \frac{T}{128}$. Comme tous les schémas explicites, le pas de temps est très important pour obtenir une précision satisfaisante et influence beaucoup le résultat, comme on le verra dans le cas d'un modèle 3D. Pour les calculs avec des modèles de poutre, ce pas de temps est jugé suffisant.

La DSP des 2 signaux (figure 11b) montre une bonne corrélation des deux approches et l'effet de la troncature modale, minime dans ce cas.

Un calcul sur une durée plus longue (figure 12) montre l'effet de l'amortissement en sous-critique qui gomme progressivement les contributions autres que celle du chargement (y compris la réponse du mode propre), faisant tendre progressivement l'orbite considérée vers un cercle. Le rayon de cette orbite circulaire (environ $1.5E-2$) est cohérente avec le calcul de réponse au balourd réalisé en fréquentiel (figure 12-a, c et e).

Le même scénario est envisagé pour une vitesse surcritique : $\Omega = 10$ Hz. L'amortissement tournant tend alors à déstabiliser le système, ce qui se traduit par une amplitude de mouvement qui croît exponentiellement comme le montre la figure 12-b, d et f.

	Note Technique DEN	Page 23/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

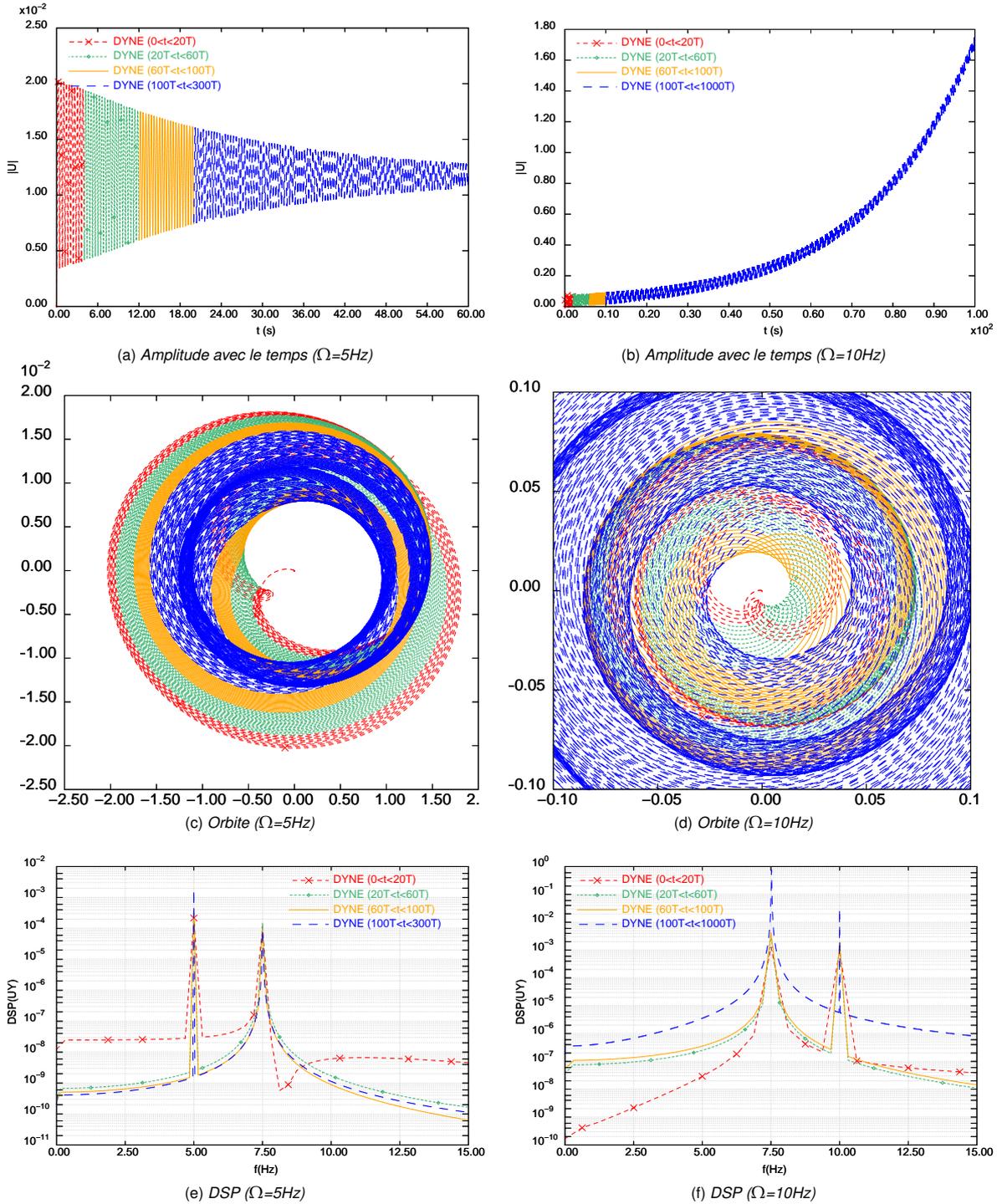


FIGURE 12 – Réponse temporelle obtenue avec DYNE d'un point de rotor5 modélisé avec des éléments de poutre pour 2 vitesses de rotation

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

	Note Technique DEN	Page 24/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

3.3 Modèle 3D

On considère une approche similaire à la précédente : l'effet de perte de pale n'agit que via la force de balourd générée (et pas sur le comportement). On résout ainsi l'équation de la dynamique avec les matrices de raideur, masse, amortissement et couplage de Coriolis de la structure saine :

$$M\ddot{u} + (C + G)\dot{u} + (K + K^\sigma + \Omega^2 K^{cent})u = F^{ext} \quad (45)$$

où G est la matrice de Coriolis, K^σ est la matrice de précontrainte géométrique et K^{cent} est la matrice de raideur centrifuge. Cette modélisation est adaptée aux cas où l'on considère de petites vibrations autour d'un état d'équilibre stationnaire calculé au préalable. Cet état est celui de l'équilibre sous chargement centrifuge, dont le résultat est donné figure 13.

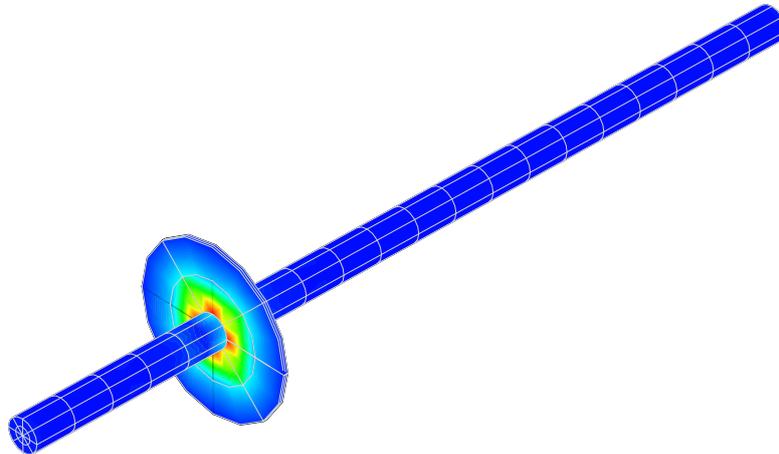


FIGURE 13 – Isovaleur de la contrainte centrifuge sur le modèle 3D massif de rotor5 dans le cas où $\beta=0^\circ$.

Le chargement qui vient perturber l'état stationnaire est le balourd défini comme : $F^{bal}(t) = rampe(t) \cdot (F_{3pales}^{cent} - F_{4pales}^{cent})$.

Remarque : On aurait aussi pu considérer les propriétés de la structure avec une pale en moins, et appliquer progressivement la force centrifuge totale comme chargement : $F^{bal}(t) = rampe(t) \cdot F_{3pales}^{cent}$. Cependant, cela implique de faire un calcul linéaire avec la configuration initiale comme configuration de référence, ou un calcul en grands déplacements en réactualisant la force centrifuge à chaque itération.

3.3.1 Analyses fréquentielles linéaires

On calcule tout d'abord le premier couple de modes réels (en négligeant les matrices C , G , K^σ et K^{cent}). La fréquence trouvée est de 7.492 Hz.

Ensuite, le diagramme de Campbell est établi dans le repère tournant. Les évolutions des parties réelles et imaginaires sont données figure 14.

Les courbes obtenues sont très proches de celles issues du calcul avec des éléments de poutre.

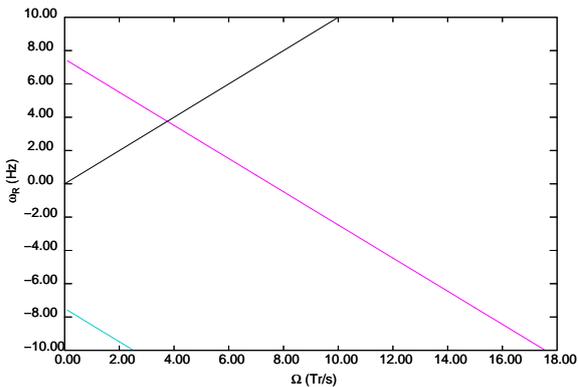
La réponse (stationnaire) au balourd n'est pas présentée, mais elle est également très proche des résultats obtenus avec des éléments de poutre.

3.3.2 Analyse temporelles transitoires linéaire

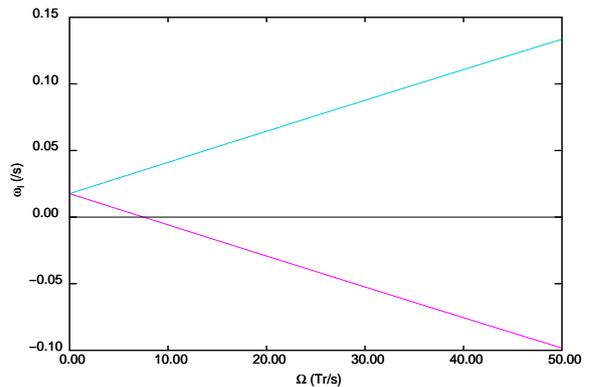
Le balourd considéré est le même qu'à la section précédente, mais appliquée dans le repère tournant, la force est de direction fixe et il ne reste que la rampe sur une demi-période comme l'illustre la figure 15.

	Note Technique DEN	Page 25/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

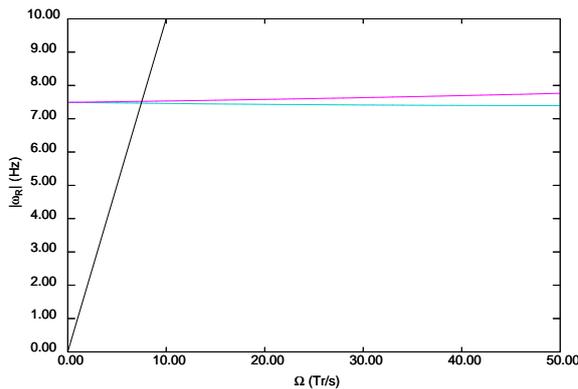
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M



(a) Fréquence réelle dans le repère tournant



(b) Fréquence Imaginaire



(c) Fréquence réelle dans le repère fixe

On retrouve les valeurs des fréquences propres dans le repère fixe (ci-contre) en :

- classant les modes de telles sorte que la déformée modale complexe soit directe (ainsi on respecte la convention : mode direct $\Leftrightarrow \omega > 0$),
- ajoutant $+\Omega$ à ces modes : $\omega'_R = \omega_R + \Omega$.

FIGURE 14 – Diagramme de Campbell de rotor5 modélisé avec des éléments 3D massifs

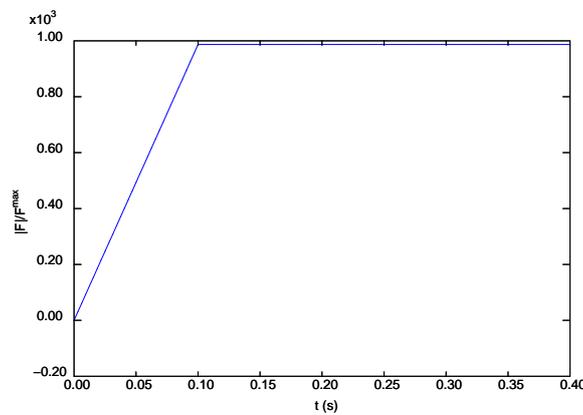


FIGURE 15 – Evolution temporelle des efforts de balourd appliqués au rotor5

	Note Technique DEN	Page 26/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Lors de ces analyses, une instabilité numérique due à un choix de pas de temps trop grand pour le calcul explicite a été mise en évidence. L'évolution temporelle de la composante UZ d'un point du rotor pour différents schémas numérique est tracée figure 16.

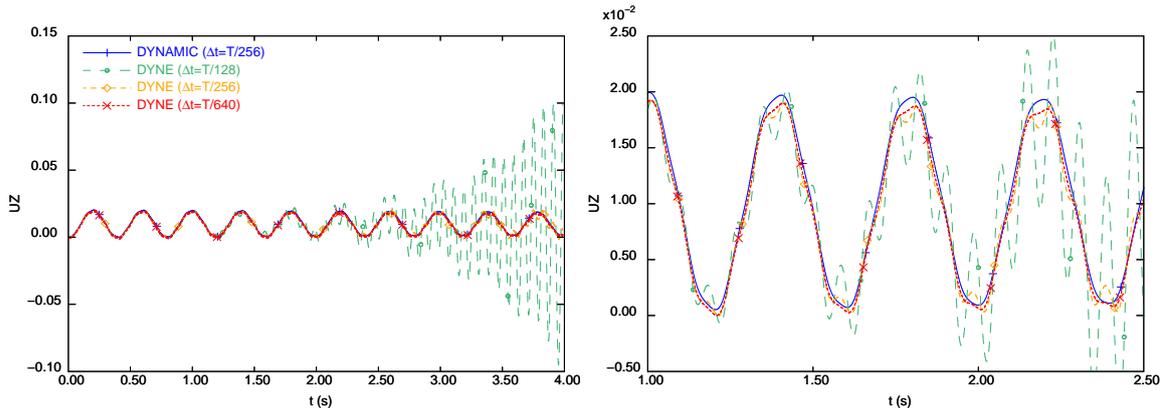


FIGURE 16 – Evolution temporelle pour différents schémas avec le modèle 3D

Il apparaît que le pas de temps doit être très petit par rapport à la période caractéristique du système. La nécessité d'un pas de temps plus petit que celui utilisé pour les calculs dans le repère fixe peut en partie se justifier par le fait que les fréquences propres du système dans le repère tournant sont très différentes de celles dans le repère fixe (on rappelle que $\omega' = \omega + \Omega$). Ainsi, à $\Omega = 5$ Hz, le mode à $\omega \simeq 7.5$ Hz voit sa fréquence augmenter : $\omega' \simeq 12.5$ Hz.

Cependant, l'application des formules théoriques de limite de stabilité telles que présentées au §1.2.1 donnent : $\Delta t_c = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_c} = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi \cdot 12.5} \simeq 36$ ms, alors qu'ici, on est clairement instable pour $\Delta t = 1.5$ ms !

L'orbite-réponse du modèle 3D est donnée figure 17 où on compare les intégrations implicite sur base physique (DYNAMIC) et explicite sur base modale (DYNE DE_VOGELAERE) avec des pas de temps respectifs de $\Delta t = \frac{T}{256}$ et $\Delta t = \frac{T}{640}$.

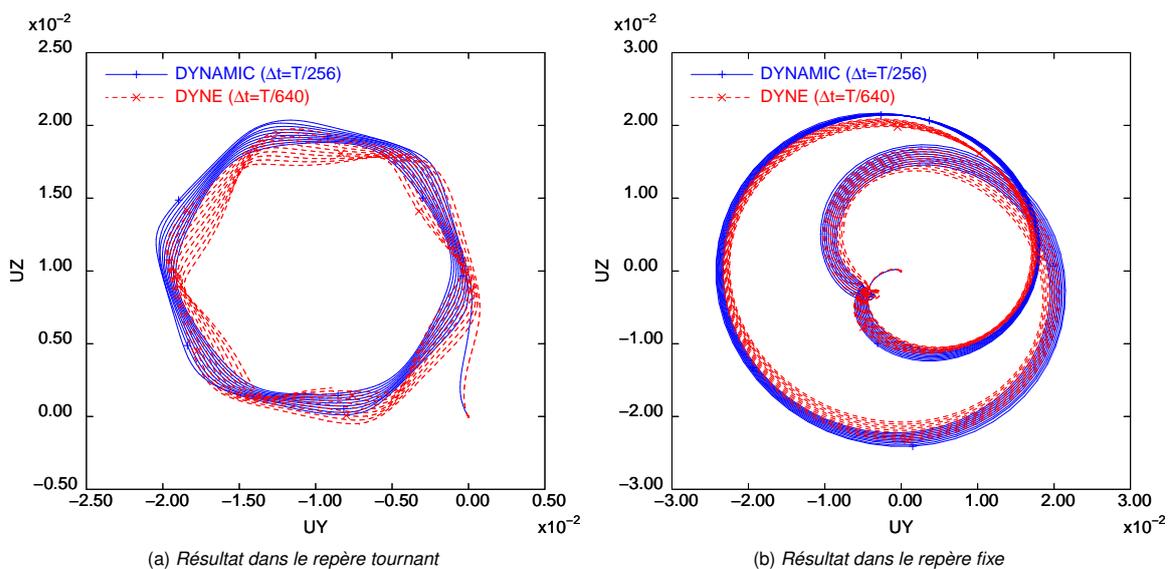


FIGURE 17 – Orbite d'un point du rotor5 modélisé avec des éléments 3D massifs

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

	Note Technique DEN	Page 27/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

On constate qu'en présence des forces de Coriolis, l'intégration explicite nécessite un pas de temps extrêmement faible pour obtenir un schéma stable et une qualité convenable. Une analyse complète de ce point sera donné au paragraphe §3.4.

Autres méthodes d'intégration

D'autres calculs ont également été menés :

- avec la procédure DYNAMIC (Newmark implicite) sur base modale,
- avec DYNE et l'option DIFFERENCES_CENTREES.

La qualité des résultats obtenus est similaire à ceux obtenus avec les 2 méthodes précédemment détaillées.

Concernant la première option, il s'avère qu'elle permet de réduire le temps de calcul à environ 300 cs (cs pour centième de seconde) pour une réduction sur 2 modes. Cela semble assez médiocre car le modèle de poutre sur base physique comptait 600 ddls et durait 825 cs. Cette option devient plus utile lorsque le nombre de ddls devient important, comme cela est le cas du modèle 3D (5230 ddls) qui durait 20200 cs

Concernant l'utilisation des différences centrées au lieu du schéma de De Vogelaere, on constate bien que le pas de temps critique est plus faible, conduisant ainsi plus rapidement à une instabilité numérique pour un même pas de temps.

3.4 Réécriture d'une partie du schéma d'intégration temporelle de DYNE

3.4.1 Interprétation des résultats obtenus au §3.3.2 et remède

Cette instabilité précoce observée au §3.3.2 est due à la présence d'importants effets de Coriolis et à leur prise en compte trop simplifiée par le schéma d'intégration temporelle comme expliqué au §1.4.

En effet, la matrice d'amortissement totale C comporte un terme d'amortissement C^{amor} et le terme de Coriolis G^{Cori} . La simplification "classique" du schéma explicite qui consiste à négliger le terme en $\frac{\Delta t}{2}C$ au premier membre de l'équation (22b) afin de conserver un opérateur diagonal (M), diminue de manière drastique le pas de temps critique. Dans la documentation [24], on trouve l'exemple d'un système à 1 ddl amorti pour lequel le pas de temps critique vaut :

$$\Delta t_{crit} = \min \left(\frac{-\frac{c}{m} + \sqrt{\frac{c^2}{m^2} + 4\omega^2}}{\omega^2}, \frac{2m}{c} \right).$$

Le cas de l'intégration temporelle explicite d'un système avec une matrice C comportant des termes de Coriolis est traité dans la thèse de Herran [25]. Probablement pour des raisons informatiques, il décompose l'accélération en une partie solution de l'équation simplifiée (accélération classique), et une partie complémentaire obtenue par une résolution itérative dans le but de vérifier l'équation complète (qui ne négligerait donc pas le terme $\frac{\Delta t}{2}C$ à gauche de l'équation 22b).

Afin de déterminer l'efficacité d'un schéma où l'on résout directement :

$$\left[M + \frac{\Delta t}{2}C \right] \ddot{u}_{n+1} = F_{n+1}^{ext} - K u_{n+1} - C \dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \quad (46)$$

avec $C = C^{amor} + \Omega G^{Cori}$, une expérience numérique basée sur le cas test rotor5 3D est conduite sous Matlab. Les résultats obtenus sont donnés figure 18.

On constate que l'écriture "complète" (c'est à dire non simplifiée) du schéma des différences centrées permet de conserver un pas de temps raisonnable, puisque les courbes obtenues ainsi se superposent parfaitement (figure 18b) quelque soit le pas de temps choisi. A l'opposé, l'utilisation d'un schéma des différences centrées "classique" devient rapidement instable (figure 18a) tel que signalé précédemment.

Ce changement de comportement avec l'écriture "complète" du schéma est également démontrée pour le schéma de De Vogelaere (figure 19).



Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

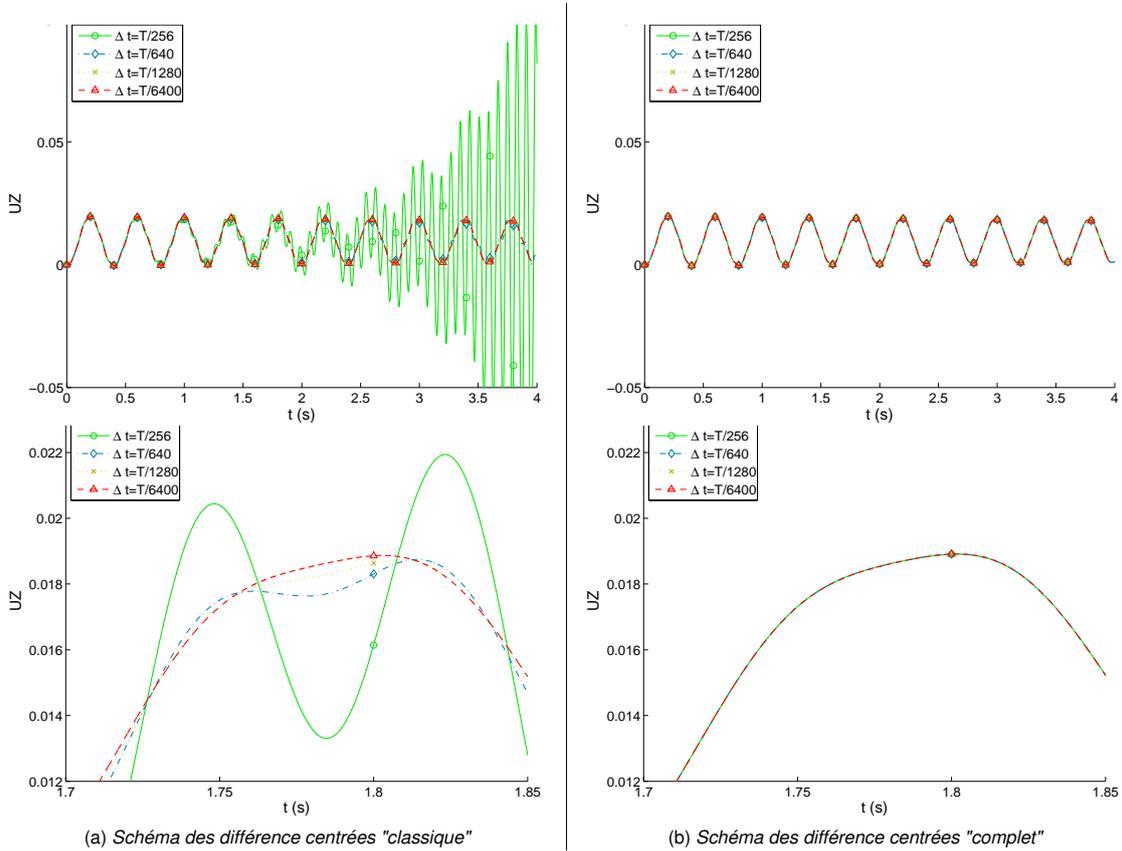


FIGURE 18 – Intégration temporelle par le schéma des différences centrées du cas rotor5 3D dans Matlab

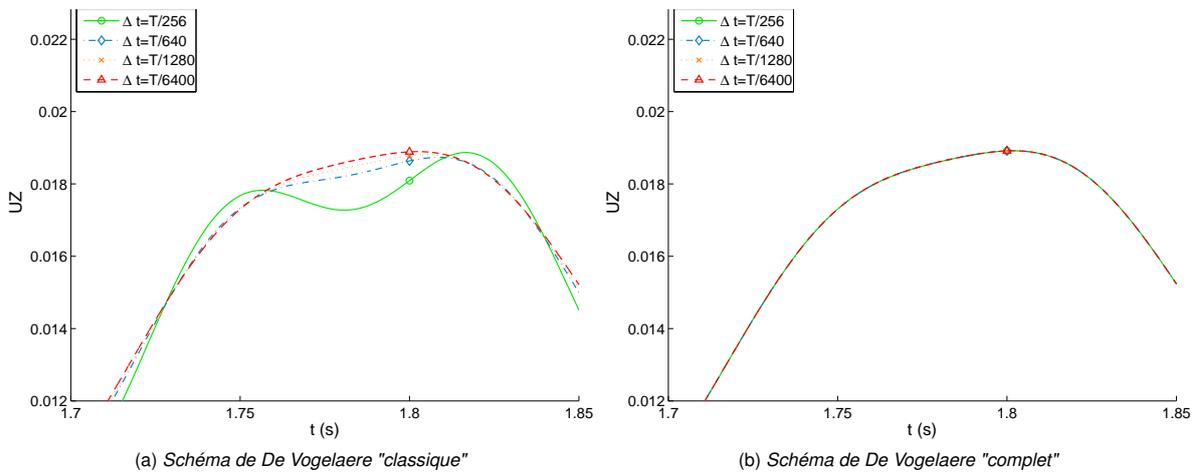


FIGURE 19 – Intégration temporelle par le schéma de De Vogelaere du cas rotor5 3D dans Matlab

	Note Technique DEN	Page 29/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

3.4.2 Application du remède dans DYNE

La transposition de cette écriture "complète" des schémas explicites de Matlab vers l'opérateur DYNE a été réalisé en deux temps. On a d'abord codé le cas de la matrice C pleine avec le schéma des différences centrées de l'opérateur DYNE. Cela consiste en :

- L'ajout d'une dimension au tableau contenant C (valant 1 si diagonal).
- L'inversion de la matrice $[M + \frac{\Delta t}{2} C]$.
- Le calcul des forces d'amortissement.
- Le calcul des accélérations.

On a ensuite étendu cette nouvelle option au cas de De Vogelaere, pour lequel des modifications semblables mais plus nombreuses (de fait, on ne les énumèrera pas ici) ont été apportées à l'opérateur DYNE. Finalement, les 28 sources suivantes ont été modifiées (ou créées) lors du développement #8151 :

d2valg.eso, d2vene.eso, d2vini.eso, d2vpas.eso, d2vtra.eso, devalg.eso, devalo.eso, deveq2.eso, deveq3.eso, deveq4.eso, deveq5.eso, deveq1.eso, deveq6.eso, deveq7.eso, deveq8.eso, devini.eso, devlir.eso, devpas.eso, devsor.eso, devtra.eso, dyndev.eso, dyndif.eso, dyne13.eso, dyne17.eso, comalo.eso, coml10.eso, dyne26.eso et devso5.eso.

Les résultats obtenus sont donné figure 20.

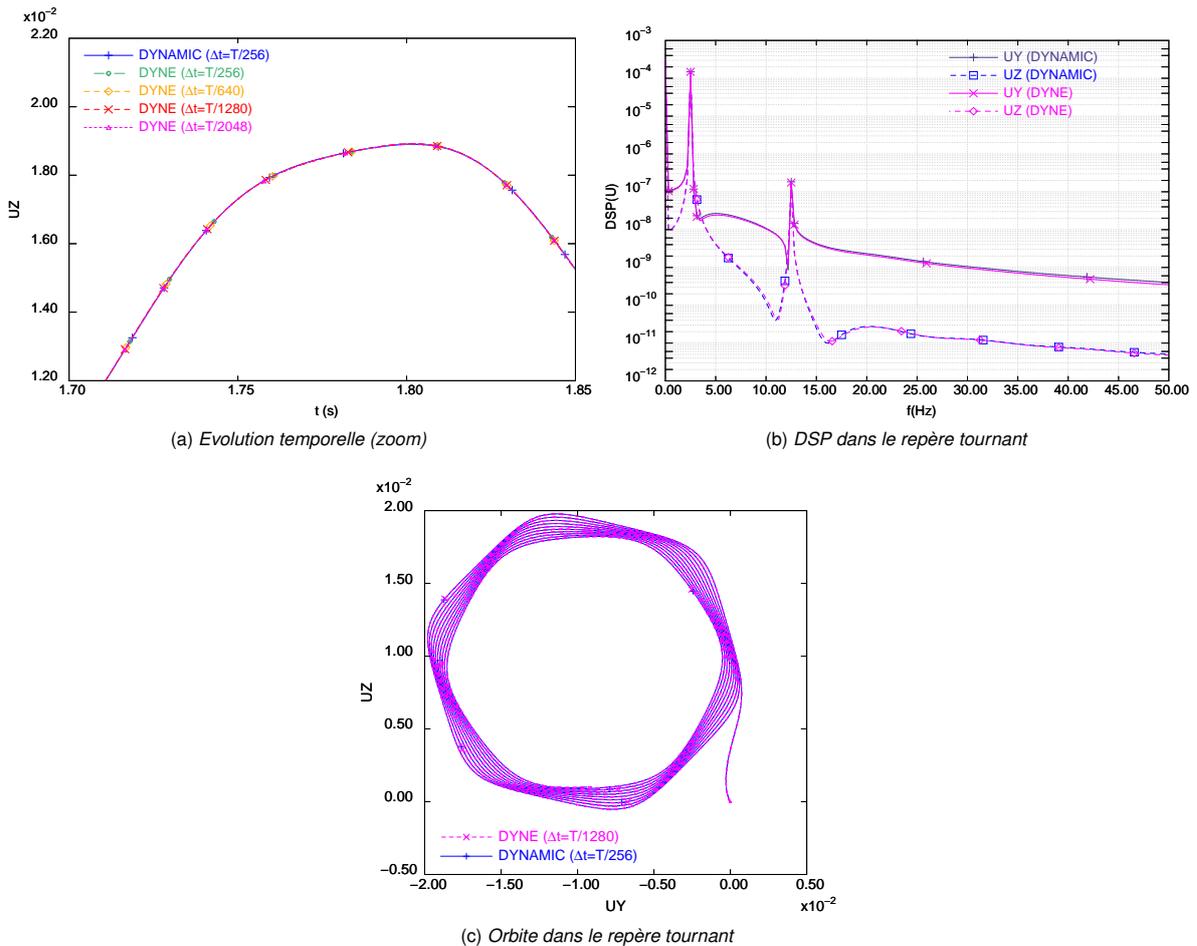


FIGURE 20 – Résultats obtenus par le schéma de De Vogelaere "complet" du cas rotor5 3D avec DYNE de Cast3M

	Note Technique DEN	Page 30/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

On constate effectivement une très bonne adéquation des résultats fournis par DYNE avec DYNAMIC, et surtout une insensibilité au pas de temps.

3.5 Bilan partiel

Sur l'exemple traité précédemment, l'intégration temporelle semble plus précise et moins sensible au pas de temps choisi avec une intégration implicite sur base physique (DYNAMIC) qu'avec une intégration explicite sur base modale (DYNE) dans sa version "classique". Cependant, une adaptation de cet opérateur a permis de s'affranchir de ce mauvais penchant des algorithmes explicites.

Les temps de calcul penchent quant à eux nettement en la faveur de DYNE, comme le montrent les tableaux 4 et 5.

Algorithme	Base utilisée	Opération	TCPU (cs)
DYNAMIC	physique	calcul sur 5120 pas de temps	825
		construction de 2 évolutions sur 1280 pas de temps	21
		total	846
DYNAMIC	modale	calcul de 2 modes (VIBR) + projection (PJBA)	3
		calcul sur 5120 pas de temps	304
		construction de 2 évolutions sur 1280 pas de temps	21
		total	328
DYNE De Vogelaere	modale	calcul de 2 modes (VIBR) + projection (PJBA)	3
		calcul sur 5120 pas de temps	4
		création de 2 évolutions sur 5120 pas de temps	1
		total	8

TABLE 4 – Temps de calcul indicatifs du cas rotor5 poutre

Le calcul de modes a été réalisé par VIBR avec l'option 'PROCHE' et le temps intègre la projection des matrices élémentaires sur base modale (opérateur PJBA). L'opérateur EVOL 'RECO' a permis de construire les évolutions dans le cas d'un calcul avec DYNE. Ces temps de calcul restent indicatifs, car ils dépendent notamment des opérations de "ménage" (nettoyage de la mémoire par Cast3M). Cependant, ils mettent en évidence le gain à utiliser l'opérateur DYNE, ainsi que la non-pénalisation à utiliser une matrice C pleine (schéma "complet").

L'intégration des non-linéarités joue aussi en faveur de DYNE pour lequel aucun algorithme de convergence de type Newton n'est nécessaire, puisque le calcul des efforts non-linéaires est réalisé à partir des données à l'instant précédent. Néanmoins un calcul implicite reste intéressant pour valider les résultats obtenus.

	Note Technique DEN	Page 31/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Algorithme	Base utilisée	Opération	TCPU (cs)
DYNAMIC	physique	calcul sur 5120 pas de temps	20500
		construction de 2 évolutions sur 1280 pas de temps	29
VIBR	-	calcul de 2 modes (VIBR) + projection (PJBA)	90
DYNAMIC	modale	calcul sur 5120 pas de temps	280
		construction de 2 évolutions sur 1280 pas de temps	22
DYNE Differences Centrees	modale	calcul sur 5120 pas de temps	4
		création de 2 évolutions sur 5120 pas de temps	1
		calcul sur 12800 pas de temps	28
		création de 2 évolutions sur 12800 pas de temps	3
		calcul sur 25600 pas de temps	69
		création de 2 évolutions sur 25600 pas de temps	4
DYNE De Vogelaere	modale	calcul sur 51200 pas de temps	186
		création de 2 évolutions sur 51200 pas de temps	8
		calcul sur 2560 pas de temps	1
		création de 2 évolutions sur 2560 pas de temps	1
		calcul sur 5120 pas de temps	16
		création de 2 évolutions sur 5120 pas de temps	1
DYNE Differences Centrees schéma « complet »	modale	calcul sur 12800 pas de temps	30
		création de 2 évolutions sur 12800 pas de temps	2
		calcul sur 5120 pas de temps	4
		création de 2 évolutions sur 5120 pas de temps	0
		calcul sur 12800 pas de temps	31
		création de 2 évolutions sur 12800 pas de temps	2
DYNE De Vogelaere schéma « complet »	modale	calcul sur 25600 pas de temps	72
		création de 2 évolutions sur 25600 pas de temps	5
		calcul sur 51200 pas de temps	140
		création de 2 évolutions sur 51200 pas de temps	6
		calcul sur 5120 pas de temps	3
		création de 2 évolutions sur 5120 pas de temps	1
DYNE De Vogelaere schéma « complet »	modale	calcul sur 12800 pas de temps	29
		création de 2 évolutions sur 12800 pas de temps	2
		calcul sur 25600 pas de temps	69
		création de 2 évolutions sur 25600 pas de temps	4
		calcul sur 51200 pas de temps	136
		création de 2 évolutions sur 51200 pas de temps	6

TABLE 5 – Temps de calcul indicatifs du cas rotor5 3D

	Note Technique DEN	Page 32/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

4 ETUDE D'UN ENSEMBLE ROTOR + STATOR : ROTORSTATOR5

On considère la même géométrie que précédemment, mais on "coupe" le rotor à sa demi-longueur. On obtient ainsi deux poutres d'égales longueur :

- le stator apparaît en rose pâle sur la figure 21,
- le rotor qui comporte le disque d'inertie apparaît en bleu-gris sur la figure 21.

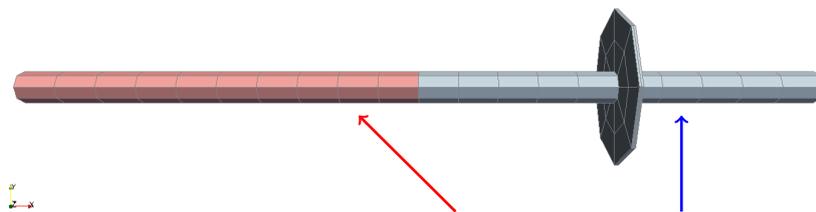


FIGURE 21 – Maillage de l'ensemble stator (en rose pâle) + rotor (en bleu-gris)

4.1 Modélisation avec des éléments de type poutre

4.1.1 Analyses fréquentielles linéaires

De la même façon que pour le cas d'un rotor seul, le diagramme de Campbell est établi directement dans le repère fixe. Les évolutions des parties réelles et imaginaires sont données figure 22.

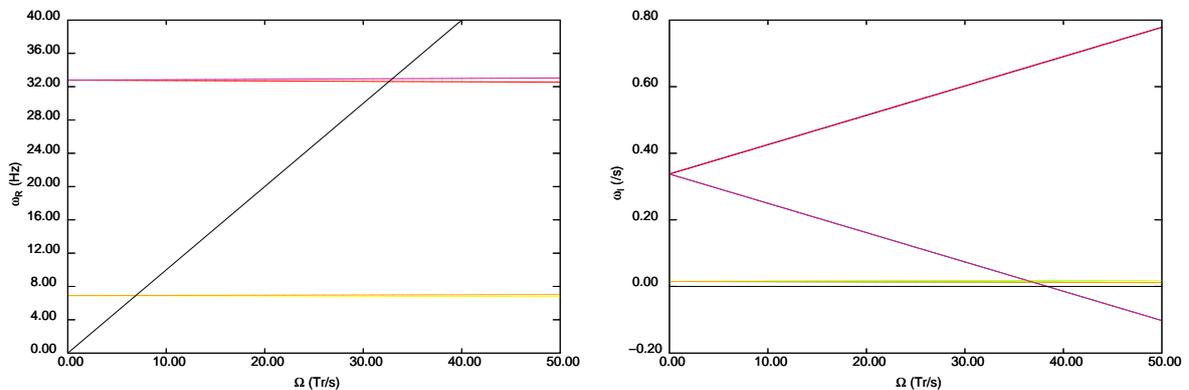


FIGURE 22 – Diagramme de Campbell de rotorstator5 modélisé avec des éléments de poutre

4.1.2 Analyses temporelles linéaires

Le même chargement de balourd que précédemment initié par une perte de pale est considéré à la vitesse sous-critique de $\Omega=5$ Hz. Trois méthodes d'intégration temporelle sont considérées :

- a) avec un schéma implicite (DYNAMOI) sur base physique (pas de projection modale),
- b) avec un schéma explicite (DYNE) sur la base des modes "naturels" calculés en imposant directement la liaison rotor-stator (ce qui est possible car la cinématique du rotor modélisé en poutre est décrite dans le repère fixe),
- c) avec un schéma explicite (DYNE) sur une base de modes obtenus par sous-structuration dynamique.

	Note Technique DEN	Page 33/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

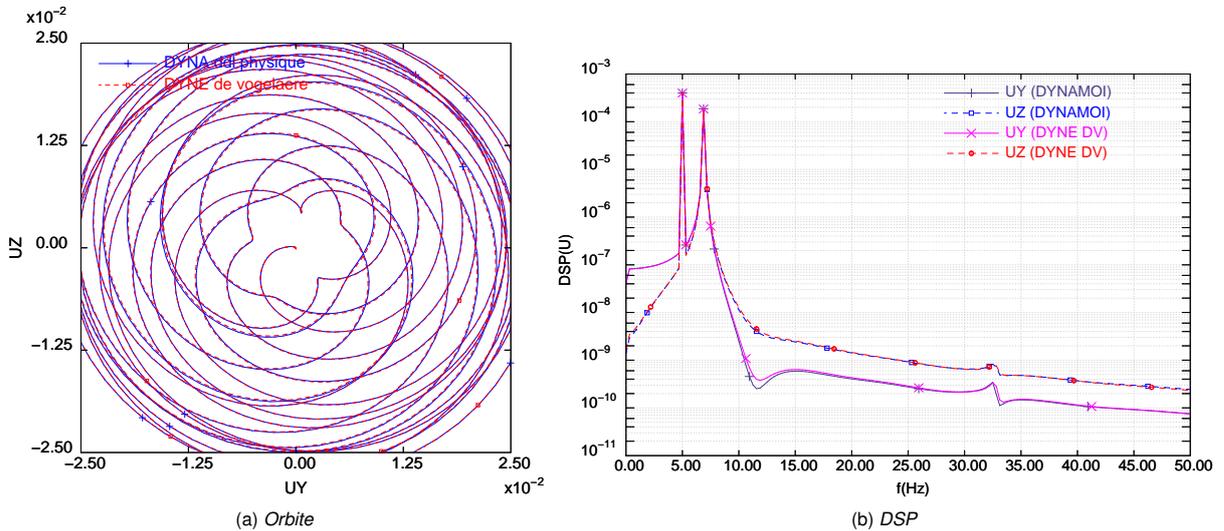


FIGURE 23 – Réponse temporelle transitoire d'un point du rotor5 modélisé avec des éléments de poutre

La réponse dynamique du système modélisé par des poutres est donnée figure 23 pour les méthodes a) et b). La figure 23b met en évidence la réponse des modes (environ 7 et 32 Hz), ainsi que la fréquence d'excitation due au balourd. On constate un très bon accord entre le calcul avec un schéma implicite (DYNAMOI) sur base physique (méthode a), et un calcul explicite (DYNE) sur base modale naturelle (méthode b). Des calculs avec un schéma implicite sur base modale ou avec l'option "Différences centrées" de DYNE ont également été réalisés et montrent eux aussi des résultats très proches de ceux présentés.

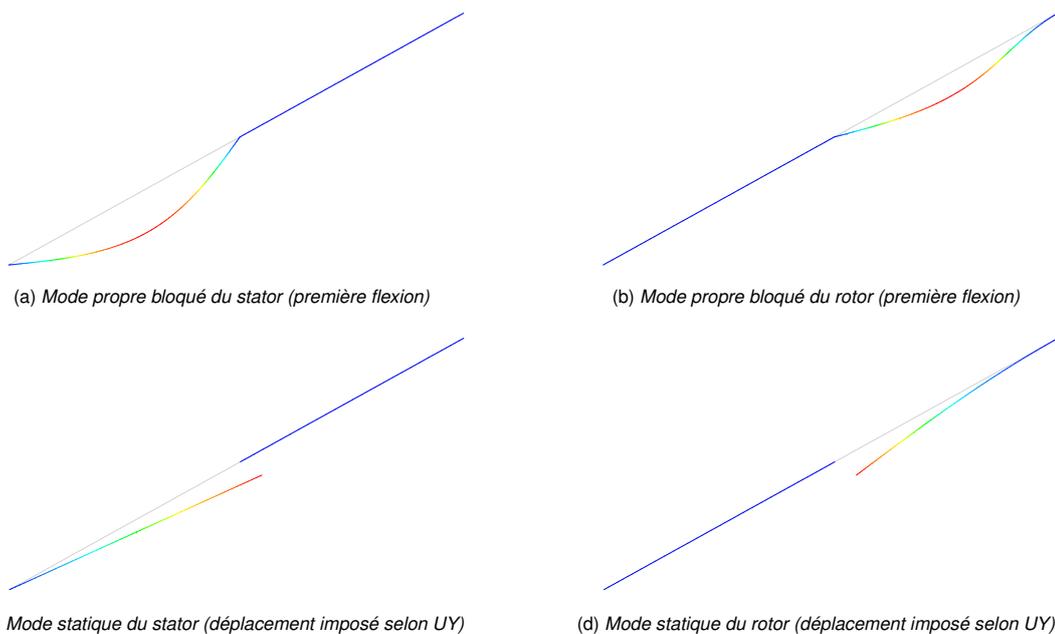


FIGURE 24 – Exemple de déformées constituant la base modale obtenue par sous-structuration et des éléments de poutre

	Note Technique DEN	Page 34/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

La méthode c) utilise une base modale issue de la sous-structuration dont les déformées sont représentées figure 24. Cette méthode n'est pas nécessaire dans le cas de poutres (puisque l'on peut utiliser directement la méthode b), mais elle le sera dans le cas de modèles 3D.

Elle implique la prise en compte de matrices K et M pleines et par conséquent une adaptation du schéma de DYNE. Ce point sera détaillé au § 4.3.1.

De plus, afin d'assurer la continuité des déplacement entre les deux sous-structures indépendantes une liaison de type COUPLAGE_DEPLACEMENT est introduite entre le rotor et le stator. La "raideur" de cette liaison est une pénalité que l'on choisit ici égale à $\kappa = 10 * \max(K_{ii})$. On constate qu'avec ce choix, le pas de temps critique est légèrement inférieur au cas b). Une marge un peu plus importante vis à vis de celui-ci permet malgré tout d'obtenir des résultats très satisfaisants comme le montre la figure 25 qui est très proche de la figure 23.

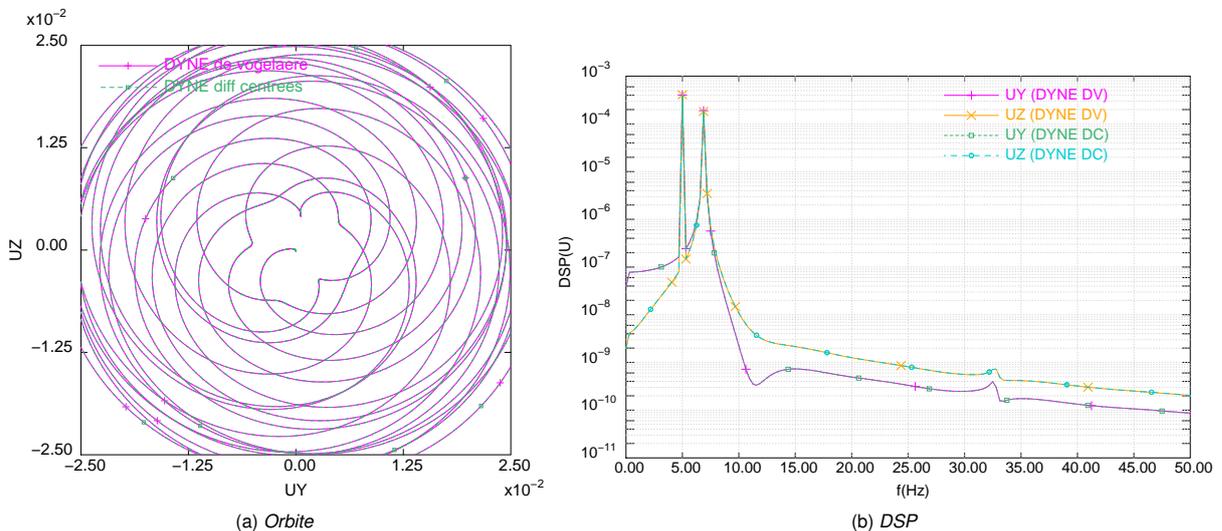


FIGURE 25 – Réponse temporelle transitoire d'un point du rotor5 modélisé avec des éléments de poutre

4.2 Modélisation 3D avec un schéma implicite (méthode a)

4.2.1 Calculs transitoires avec le schéma de l'accélération moyenne

On considère maintenant le problème via l'algorithme implicite de Newmark (i.e. l'accélération moyenne), et on traite le problème sur base physique et modale.

Résultats sur base physique

Les résultats obtenus sur base physique sont donnés figure 26.

L'orbite de la figure 26a montre que l'état stationnaire n'est pas atteint à la fin de la simulation. Ce constat est plus difficile à établir en considérant l'orbite dans le repère fixe (figure 26c). La DSP (figure 26b) fait apparaître des pics à des fréquences proches de $7 - 5 = 2$ Hz et $7 + 5 = 12$ Hz. Les valeurs 7 Hz et 5 Hz sont respectivement la fréquence propre du premier mode de la structure et la fréquence de rotation du rotor. De la même façon, on observe le doublement du second mode aux fréquences de $32 - 5 = 27$ Hz et $32 + 5 = 37$ Hz.

Les résultats obtenus sont ainsi très proches de ceux obtenus avec des éléments de poutre.

	Note Technique DEN	Page 35/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

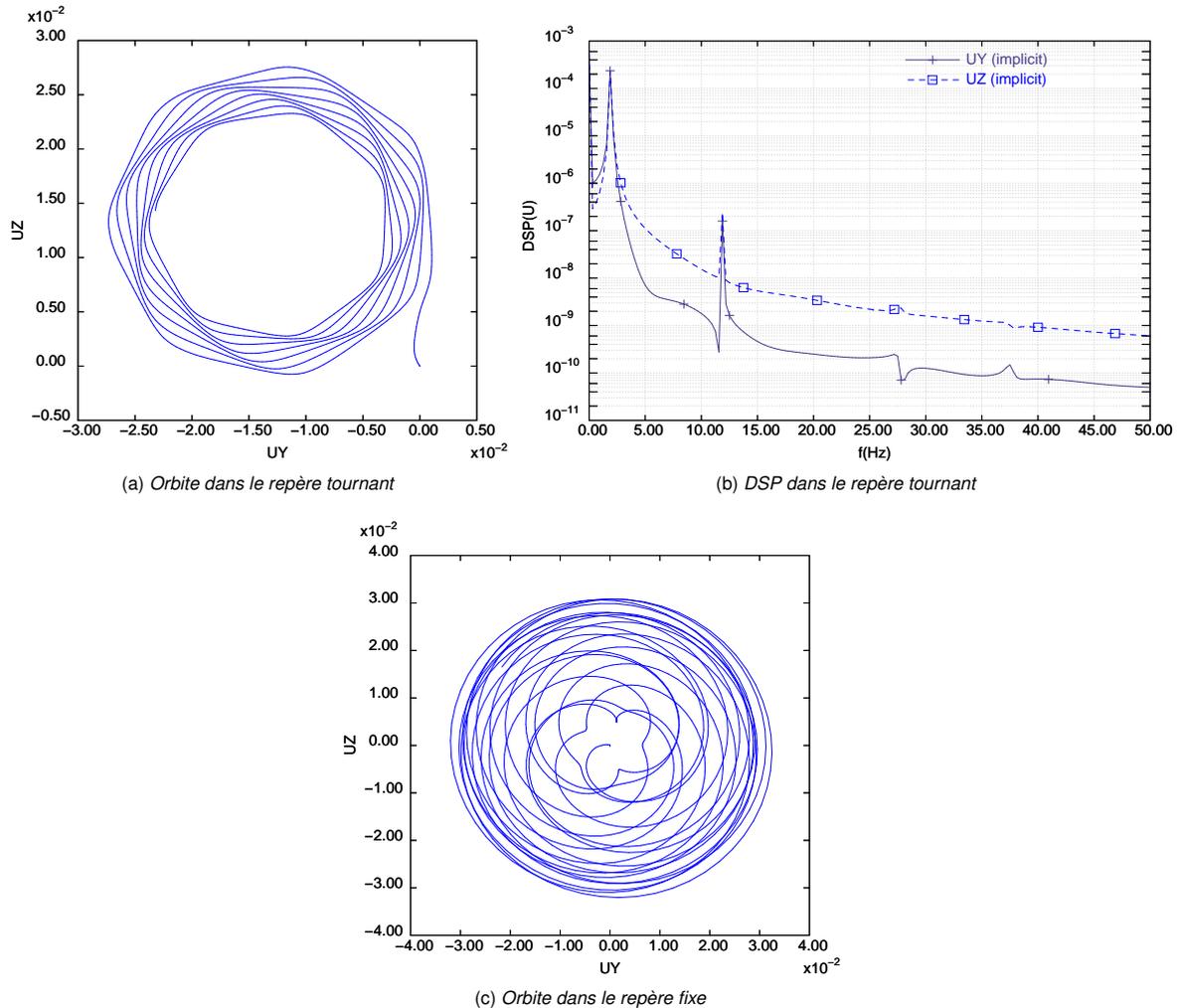


FIGURE 26 – Réponse temporelle transitoire d'un point du rotor modélisé avec des éléments 3D massifs

Résultats sur base modale

Pour pouvoir résoudre le même problème sur base modale, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de sous-structuration en différenciant les modes du stator et du rotor, car la liaison entre rotor et stator dépend explicitement du temps. Ici, la méthode de Craig et Brampton est adoptée. On calcule donc :

- Φ^s : les modes propres "bloqués" du stator (en immobilisant les degrés de liberté d'interface avec le rotor),
- Φ^r : les modes propres "bloqués" du rotor (en immobilisant les degrés de liberté d'interface avec le stator),
- Ψ^s : les modes "statiques" du stator (en imposant un déplacement unitaire sur chacun des degrés de liberté du stator en jeu dans la liaison avec le rotor),
- Ψ^r : les modes "statiques" du rotor (en imposant un déplacement unitaire sur chacun des degrés de liberté du rotor en jeu dans la liaison avec le stator).

Ces 4 bases élémentaires constituent une base modale qu'on estime représenter suffisamment bien la cinématique du système considéré. Les déformées de cette base modale sont données figure 27.

	Note Technique DEN	Page 36/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

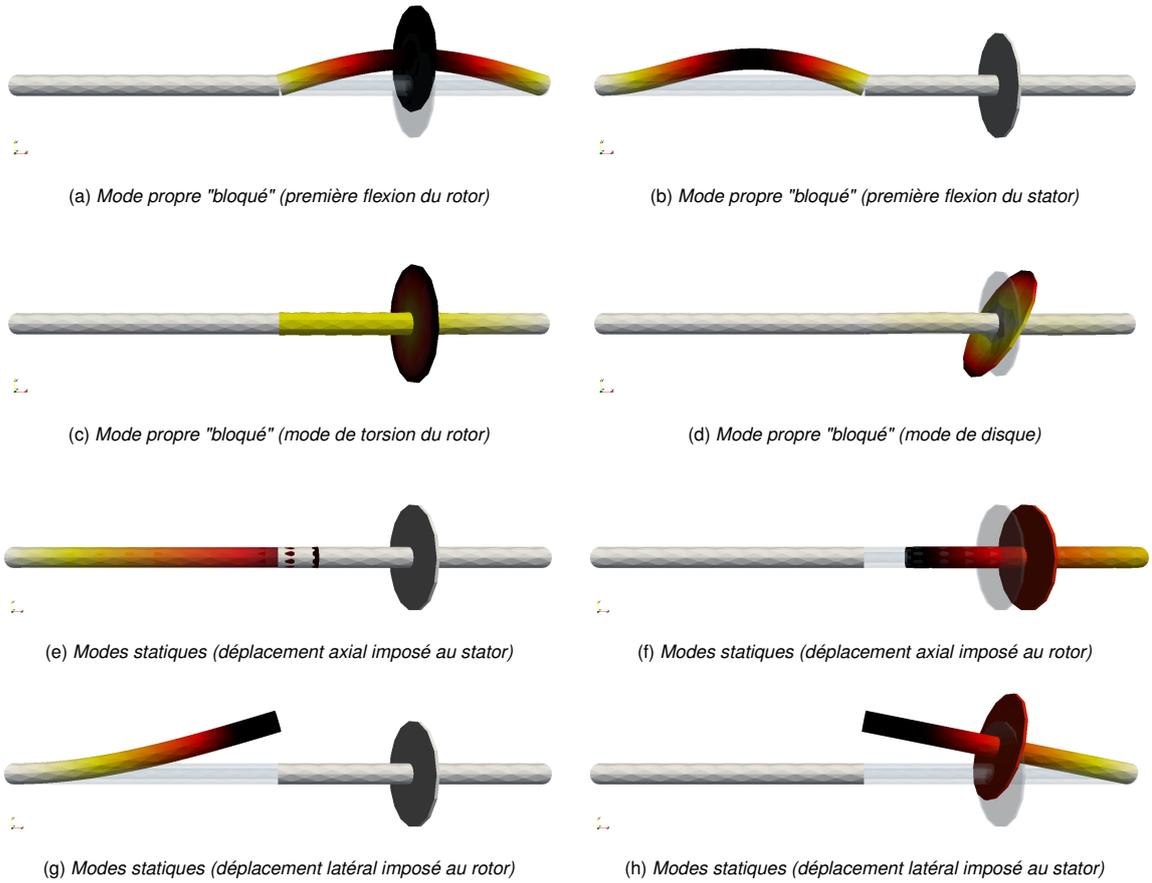


FIGURE 27 – Déformées constituant la base modale $[\Phi^r, \Phi^s, \Psi^r, \Psi^s]$ obtenue par sous-structuration du modèle 3D de rotorstator5

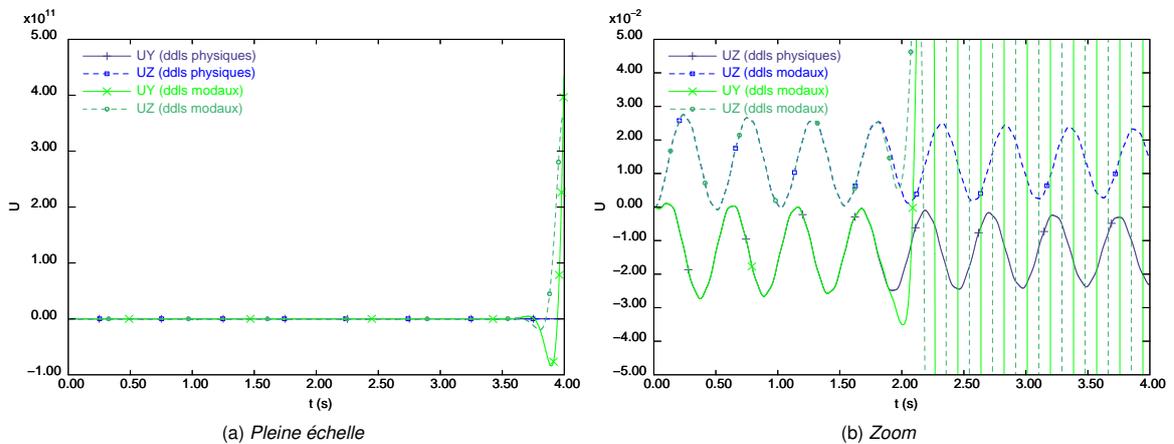


FIGURE 28 – Réponse temporelle de rotorstator5 3D obtenue avec Newmark (déplacements dans le repère tournant)

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

	Note Technique DEN	Page 37/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Le calcul temporel sur bases physique et modale (figure 28) met en évidence une instabilité lorsque le calcul est réalisé sur une base modale obtenue par sous-structuration. Celle-ci est-elle d'origine physique ou numérique ? Trouve-t-elle sa cause dans les hypothèses de modélisation issues de la méthode de sous-structuration ? Afin de répondre à ces questions, un problème simplifié a été considéré et étudié dans Matlab.

4.2.2 Résolution du problème d'instabilité

a) Problème simplifié

Après des étapes successives de simplification, on est parvenu au système à 2x2 dds correspondant à la figure 29.

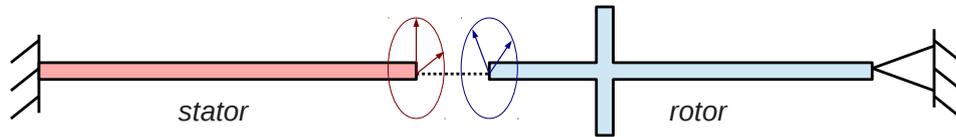


FIGURE 29 – Schéma du système rotor-stator à 2x2ddl

Seuls le premier mode (double) du stator (flexion) et le premier mode (double) du rotor (corps rigide) sont considérés. La liaison rotor stator introduit 2 multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, le vecteur inconnu considéré est :

$$q^T = (\lambda_y \quad \lambda_z \quad u_y \quad u_z \quad u'_y \quad u'_z) \tag{47}$$

L'équation de la dynamique à résoudre est donc :

$$Kq + C\dot{q} + M\ddot{q} = F \tag{48}$$

où $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos\Omega t & \sin\Omega t \\ 0 & 0 & 1 & -\sin\Omega t & -\cos\Omega t & 0 \\ & & k & 0 & 0 & 0 \\ & & & k & 0 & 0 \\ & & & & k' & 0 \\ sym & & & & & k' \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & c & 0 & 0 & 0 \\ & & & c & 0 & 0 \\ & & & & c' & 0 \\ sym & & & & & c' \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m & 0 & 0 & 0 \\ & & & m & 0 & 0 \\ & & & & m' & 0 \\ sym & & & & & m' \end{bmatrix}$$

On considère un chargement de balourd appliqué au rotor selon la direction y' :

$$F = (2\pi\Omega)^2 \cdot r(t) \cdot (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad f \quad 0)^T \tag{49}$$

Ce chargement est appliqué progressivement sur une demi-période par l'intermédiaire de la rampe linéaire suivante :

$$r(t) = \begin{cases} 2\Omega t & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2\Omega} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{50}$$

Les constantes numériques choisies sont données table 6.

m	m'	k	k'	c	c'	f	Ω
1E3	1E3	6E6	0	31E3	0	$\frac{1}{(2\pi\Omega)^2}$	5 Hz

TABLE 6 – Constantes choisies pour l'application numérique

	Note Technique DEN	Page 38/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

b) Mise en évidence de l'instabilité et interprétation

On réalise l'intégration temporelle de ce système par le schéma de Newmark implicite *inconditionnellement stable* de l'accélération moyenne.

Ce cas d'école met aussi en évidence une instabilité. La figure 30a représentant le déplacement en fonction du temps montre une divergence soudaine après 1.5 s environ. L'examen de la figure 30a montre que celle-ci est précédée par la divergence des multiplicateurs de Lagrange. La condition de liaison reste cependant bien respectée de manière relative au déplacement en jeu comme le montre la figure 30c. De la même façon, l'équilibre est bien respecté en relatif, mais comme les déplacements et efforts en jeu (par le biais des multiplicateurs de Lagrange) "explorent", son évolution absolue est nettement divergente après 1 s.

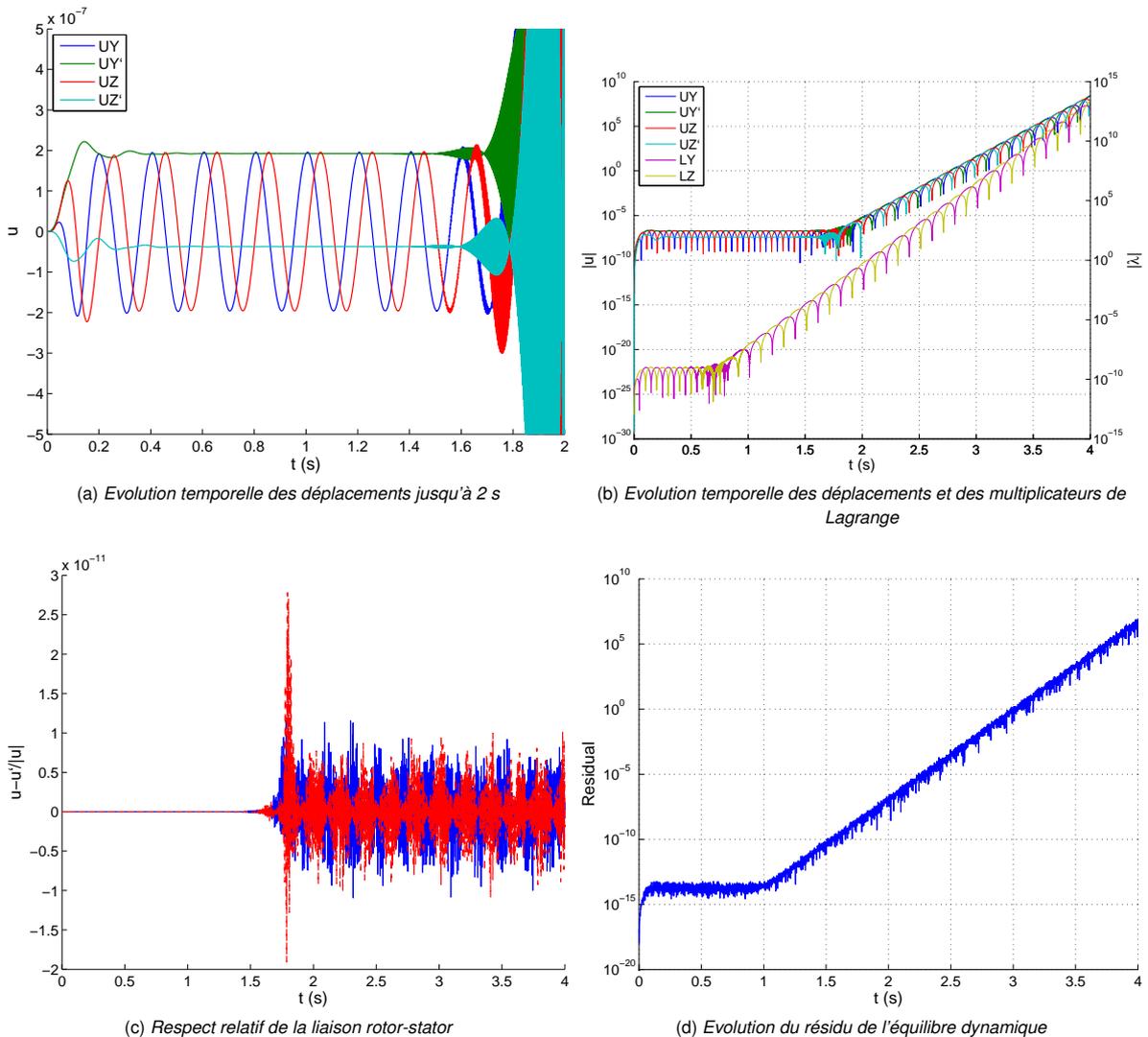


FIGURE 30 – Résultats obtenus par le schéma de Newmark de l'accélération moyenne

Ces résultats sont à première vue surprenants car la physique modélisée est extrêmement simple et ne présente a priori

	Note Technique DEN	Page 39/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

aucune source potentielle d'instabilité physique. Le schéma de Newmark de l'accélération moyenne est également réputé pour être inconditionnellement stable pour des systèmes linéaires (ce qui est notre cas). Il n'existe pas de démonstration générale pour le cas non-linéaire.

Néanmoins, une recherche bibliographique approfondie a permis de nuancer cette bonne réputation. Dans un article de 1989, Cardona et Géradin [26] démontrent qu'en présence de contraintes (de type liaisons cinématiques), le système dynamique présente autant de valeurs propres infinies que de multiplicateurs de Lagrange. De plus, la matrice d'amplification du schéma de l'accélération moyenne présente 2 valeurs propres de module unitaire, ce qui est à l'origine de l'instabilité numérique du schéma.

Cet aspect du schéma de Newmark est peu connu en mécanique des structures continues, mais est abordé dans quelques références en dynamique multi-corps (*flexible multibody dynamics*) où les liaisons entre corps jouent un rôle central dans les problèmes traités. Ceci explique pourquoi les ouvrages dans ce domaine [18, 16] consacrent une large part aux algorithmes d'intégration temporel. Dans [16], il est rappelé que la résolution de ce problème peut être réalisé en régularisant les contraintes, en les éliminant, ou en adoptant un schéma dissipant les hautes fréquences parasites. La première approche (approche de [Baumgarte,1972, CMAME vol.1 : 1-16]) consiste à dériver deux fois l'équation de liaison par rapport au temps et ajouter à l'équation différentielle obtenue des termes de masse et d'amortissement afin de stabiliser l'évolution des multiplicateurs. La liaison est ainsi vérifiée aux oscillations près de l'oscillateur ainsi artificiellement introduit. La seconde approche implique de reformuler le problème en terme de variables indépendantes et est difficile à mettre en oeuvre de manière générale. Enfin, la dernière qui consiste à utiliser un intégrateur avec de l'amortissement numérique est celle que nous adoptons ici.

c) Utilisation d'un schéma avec amortissement numérique

On compare donc les résultats obtenus avec les trois schémas suivants :

- Newmark modifié avec $\alpha=0.05$
- HHT avec $\alpha=0.05$
- α -généralisé avec $\rho_{\infty}=0.9$

Un exemple des résultats obtenus avec le schéma HHT ($\alpha=0.05$) est donné figure 31. Par comparaison avec les résultats de la figure 30, on constate que l'amortissement numérique introduit joue bien son rôle et maintient le niveau des quantités (en particulier les multiplicateurs de Lagrange).

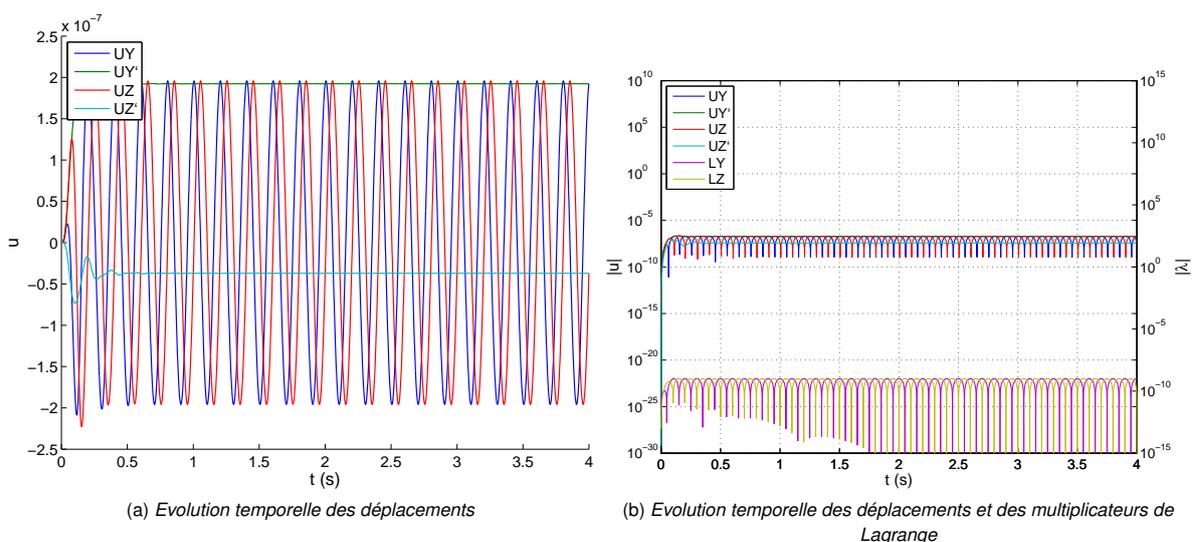


FIGURE 31 – Résultats obtenus avec le schéma HHT ($\alpha=0.05$)

	Note Technique DEN	Page 40/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Les trois schémas avec amortissement numérique considérés ici permettent d'obtenir une réponse temporelle satisfaisante et les écarts sur les réponses obtenues sont faibles (<1%) comme le montre la figure 32a.

L'amplitude du déplacement du rotor selon UY à $t = 4$ s calculée par les trois schémas est donnée dans le tableau ci-dessous :

Newmark modifié avec $\alpha=0.05$	1.922 175 E-7
HHT avec $\alpha=0.05$	1.922 839 E-7
α -généralisé avec $\rho_\infty=0.9$	1.926 705 E-7

On note une amplitude plus grande pour le schéma α -généralisé. Cela s'explique par une plus faible dissipation des moyennes fréquences. Il est ainsi possible d'utiliser une plus grande valeur de ρ_∞ sans dégrader trop la solution. Le déplacement UY' atteint 1.923 316 E-7 à $t = 4$ s, ce qui reste supérieur aux amplitudes des schémas de Newmark amorti et HHT.

Cette intégration temporelle est répétée avec les schémas HHT et α -généralisé en faisant varier les paramètres respectifs α et ρ^∞ et pour deux valeurs de pas de temps. L'évolution avec le rayon spectral ρ^∞ du déplacement UY à $t = 4$ s est donnée figure 32b.

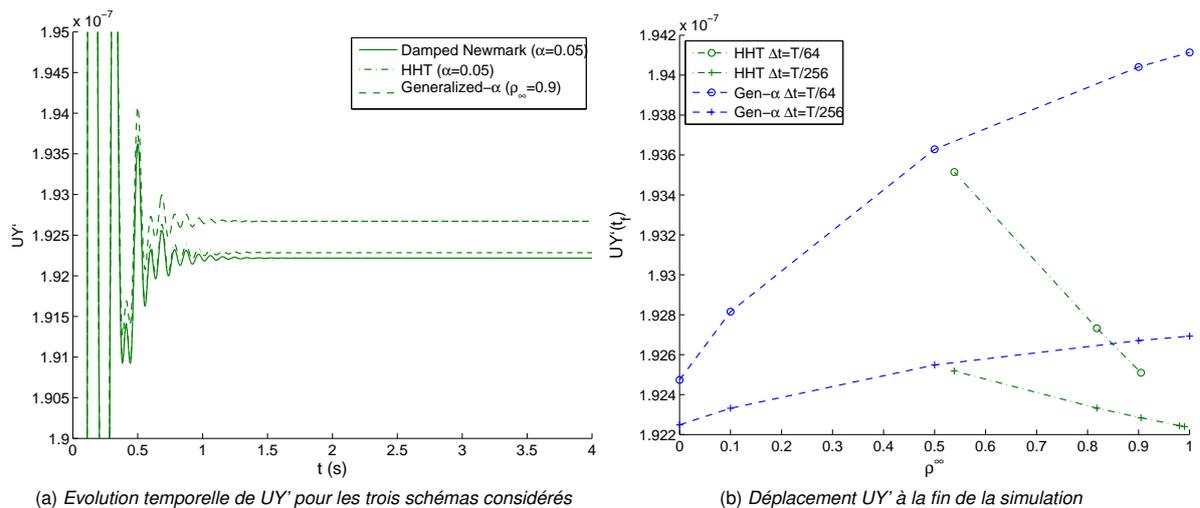


FIGURE 32 – Comparaison des résultats obtenus par des schémas avec amortissement numérique

A la lecture de cette figure, on constate que ;

- avec le schéma HHT, le système devient instable pour des valeurs trop petites de α et dont le seuil dépend du choix du pas de temps,
- avec le schéma HHT, l'amplitude finale diminue avec le rayon spectral, ce qui est contre-intuitif !
- avec le schéma α -généralisé, le système est stable même en fixant $\rho^\infty = 1$ (pas de dissipation) !
- avec le schéma α -généralisé, l'amplitude finale augmente avec le rayon spectral (mais reste finie).

On conclut donc à une meilleure efficacité du schéma α -généralisé pour ce cas d'étude analytique.

4.2.3 Calculs transitoires avec un schéma dissipatif

Bilan énergétique sur un système à 1 degré de liberté

Les algorithmes HHT et α -généralisé sont intégrés à la procédure Cast3M DYNAMOI.

Le caractère dissipatif de ces schémas est illustré en considérant le cas du lâcher d'un système à 1 degré de liberté. La perte relative d'énergie après 640 pas de temps en fonction du pas de temps relatif $\omega\Delta t$ est tracée figure 33 pour ces deux

	Note Technique DEN	Page 41/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

algorithmes et plusieurs valeurs de paramètre.

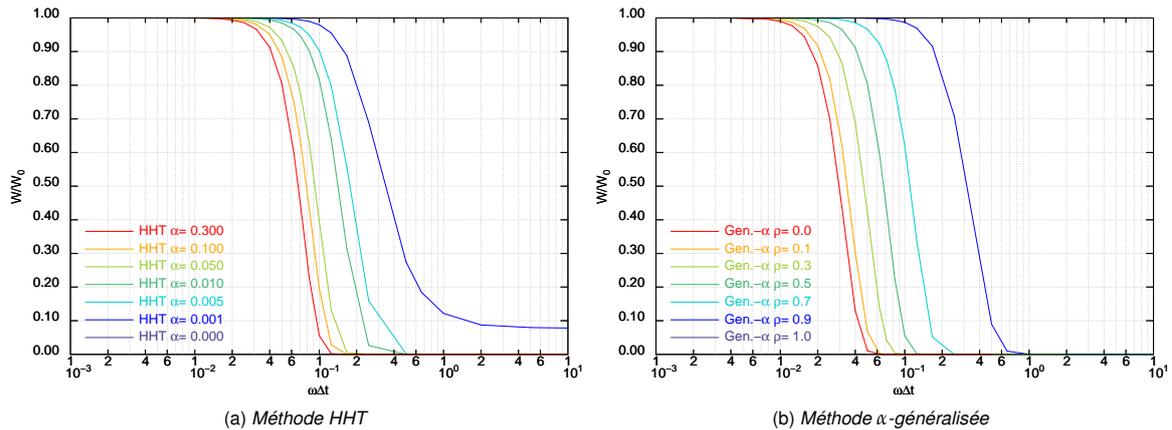


FIGURE 33 – Variation relative de l'énergie mécanique après 640 pas de temps pour les méthodes α (HHT) et α -généralisée

Le problème simplifié du §4.2.2 est également traité dans Cast3M et on retrouve exactement les mêmes valeurs numériques que dans Matlab, ce qui valide définitivement l'implémentation réalisée.

Application au cas rotorstator5

Il est désormais possible d'appliquer ces schémas dissipatifs à notre problème initial (rotorstator5 en 3D). Les résultats sont présentés figure 34.

On constate que le schéma HHT permet de retrouver une évolution temporelle du déplacement UY proche de celle obtenue avec un calcul sur base physique pour des valeurs de α de 0.005 et 0.010. Si α est trop faible, la réponse devient instable. Si α est trop élevé, l'amplitude est surestimée. Ces observations confortent celles réalisées au § 4.2.2.

Le schéma α -généralisé est toujours stable, et la réponse la plus proche de la référence est celle obtenue avec $\rho^\infty = 0$ (dissipation maximale). Cette dernière conclusion diffère de celle du cas test simplifié où toutes les valeurs de ρ^∞ permettait d'obtenir une solution satisfaisante.

Le domaine d'application des schémas d'intégration temporelle développés ici ne se limite pas au domaine des machines tournantes, et deux autres exemples d'applications sont donnés dans l'annexe C.

	Note Technique DEN	Page 42/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

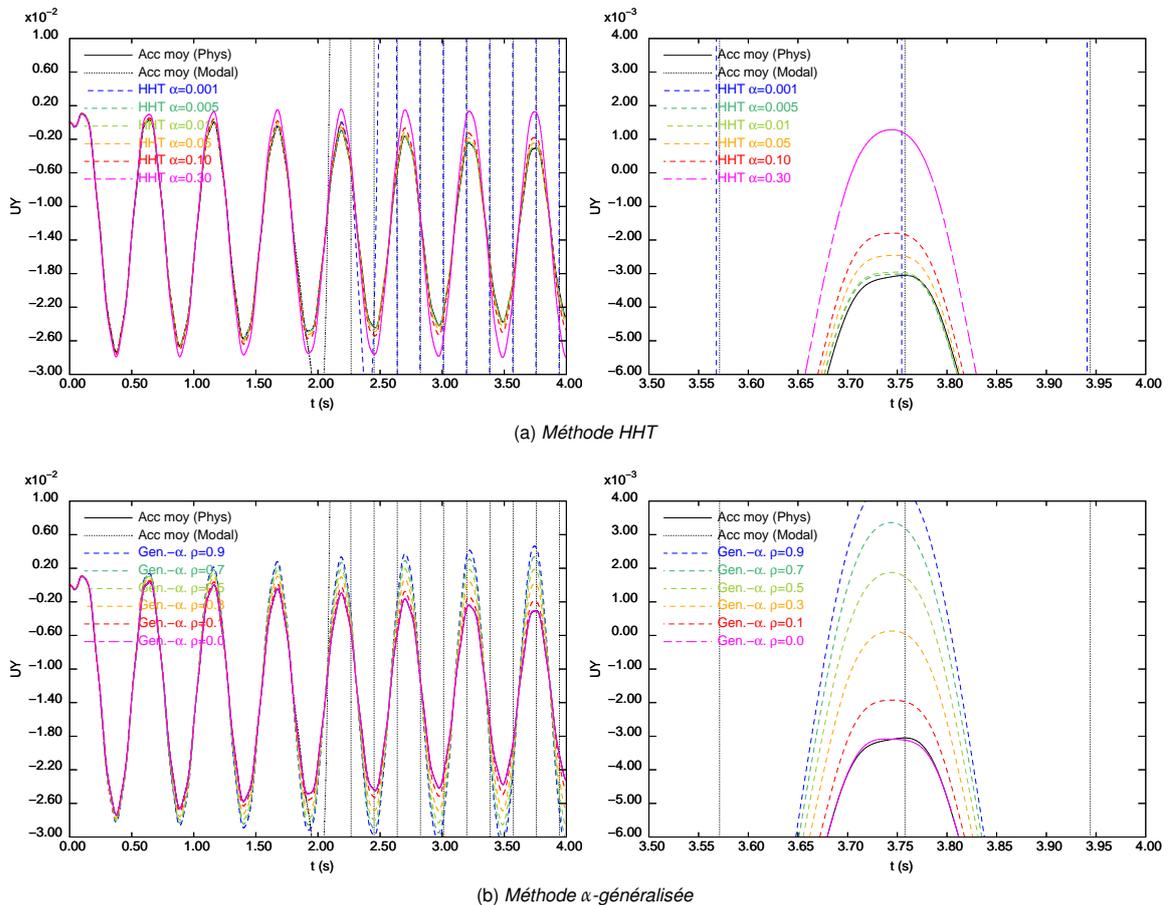


FIGURE 34 – Résultats de l'intégration temporelle du cas rotor stator 3D
(à gauche : vue générale - à droite : détail autour de 3.75 s)

4.3 Modélisation 3D avec un schéma explicite (méthode c)

4.3.1 Utilisation par DYNE d'une base issue de la sous-structuration

Comme on l'a vu au §2.2, les matrices projetées sur une base obtenue par sous-structuration ne sont pas diagonales. Or, jusqu'à présent, l'opérateur DYNE ne permet d'utiliser en entrée que des matrices de masse et de raideur diagonale. Une évolution de l'opérateur DYNE est donc nécessaire afin de pouvoir utiliser des matrices de masse et de raideur pleines. Cela impacte notablement les étapes de calcul. L'étape d'initialisation de l'algorithme de De Vogelaere devient ainsi :

Initialisation :

$$\ddot{u}_0 = M^{-1} \cdot (F_0 - C\dot{u}_0) \quad (51a)$$

$$u_{-\frac{1}{2}} = u_0 - \frac{\Delta t}{2}\dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{8}\ddot{u}_0 \quad (51b)$$

$$\dot{u}_{-\frac{1}{2}} = \underbrace{\left[4I - \Delta t M^{-1} C\right]^{-1}}_{O_0} \cdot \left(4\dot{u}_0 - \Delta t M^{-1} \cdot \Delta t (F_{-\frac{1}{2}} + F_0 - C\dot{u}_0)\right) \quad (51c)$$

	Note Technique DEN	Page 43/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

tandis que l'algorithme en lui-même s'écrit :

Premier demi-pas :

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{24} M^{-1} \cdot \left(4(F_n - C\dot{u}_n) - (F_{n-\frac{1}{2}} - C\dot{u}_{n-\frac{1}{2}}) \right) \quad (52a)$$

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \underbrace{\left[4I + \Delta t M^{-1} C \right]^{-1}}_{O_1} \cdot \left(4\dot{u}_n + \Delta t M^{-1} \cdot (F_n + F_{n+\frac{1}{2}} - C\dot{u}_n) \right) \quad (52b)$$

$$\ddot{u}_{n+\frac{1}{2}} = M^{-1} \cdot \left(F_{n+\frac{1}{2}} - C\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (52c)$$

Demi-pas final :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{6} M^{-1} \left((F_n - C\dot{u}_n) + 2(F_{n+\frac{1}{2}} - C\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}) \right) \quad (52d)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \underbrace{\left[6I + \Delta t M^{-1} C \right]^{-1}}_{O_2} \cdot \left(6\dot{u}_n + \Delta t M^{-1} \cdot (F_{n+1} + 4(F_{n+\frac{1}{2}} - C\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}) + (F_n - C\dot{u}_n)) \right) \quad (52e)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = M^{-1} \cdot (F_{n+1} - C\dot{u}_{n+1}) \quad (52f)$$

où $F = F^{ext}(t) + F^{liaison}(u, \dot{u}) - Ku$.

Les matrices K , C , M , M^{-1} , $O_{0,1}$ ou O_2 peuvent être pleines ou diagonales selon les cas considérés, ce qui implique un stockage adéquat dans des tableaux fortran de dimensions adaptées. De plus, une inversion préliminaire est effectuée afin d'obtenir les opérateurs M^{-1} et O_j lorsque cela est nécessaire.

De la même façon, il est nécessaire de tenir compte de la nature des matrices dans l'algorithme des différences centrées.

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{u}_n \quad (53a)$$

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (53b)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \left[M + \frac{\Delta t}{2} C \right]^{-1} \cdot (F_{n+1} - C\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}) \quad (53c)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}) \quad (53d)$$

4.3.2 Extension de la liaison COUPLAGE_DEPLACEMENT au cas de coefficients périodiques

Contrairement au cas des poutres, en 3D (et en 2D Fourier), les déplacements sont définis dans le repère tournant, ce qui implique une liaison avec des coefficients périodiques (cf. équation 36 du § 1.4.2). il a donc été nécessaire d'étendre la liaison COUPLAGE_DEPLACEMENT au cas de coefficients périodiques.

La mise en donnée de la table des liaisons est la suivante :

```
* données obligatoires :
TLia1l . 'LIAISON_A' . i = TABLE 'LIAISON_ELEMENTAIRE' ;
TLia1l . 'LIAISON_A' . i . 'TYPE_LIAISON' = mot 'COUPLAGE_DEPLACEMENT' ;
TLia1l . 'LIAISON_A' . i . 'SUPPORT' = plia1 ;
TLia1l . 'LIAISON_A' . i . 'ORIGINE' = plia2 ;
TLia1l . 'LIAISON_A' . i . 'COEFFICIENT' = kappa ;
* données optionnelles :
TLia1l . 'LIAISON_A' . i . 'FONCTION' = | mot 'COS' ;
| mot 'SIN' ;
TLia1l . 'LIAISON_A' . i . 'FREQUENCE' = OMEGA ;
```

	Note Technique DEN	Page 44/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

4.3.3 Résultats obtenus par DYNE

Les résultats obtenus avec DYNE sur une base modale issue d'une méthode de sous-structuration appliquée à un modèle 3D sont donnés figure 35.

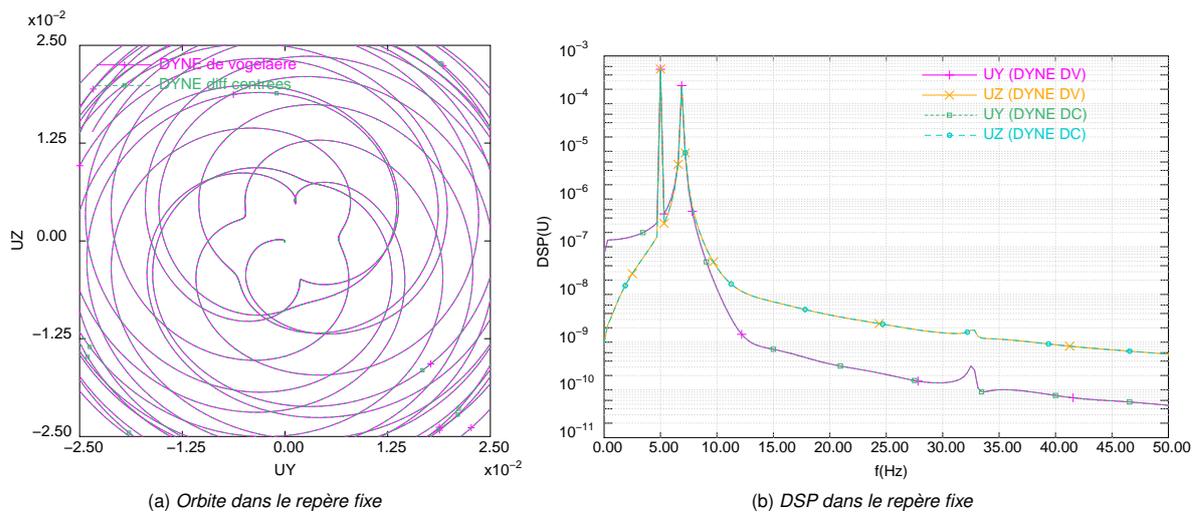


FIGURE 35 – Réponse temporelle transitoire d'un point du rotor modélisé avec des éléments 3D massifs

Les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus avec des éléments poutre (cf. figure 25 pour comparaison) et valident le bon fonctionnement des outils développés.

Il est aussi possible d'analyser les résultats dans le repère tournant (du rotor).

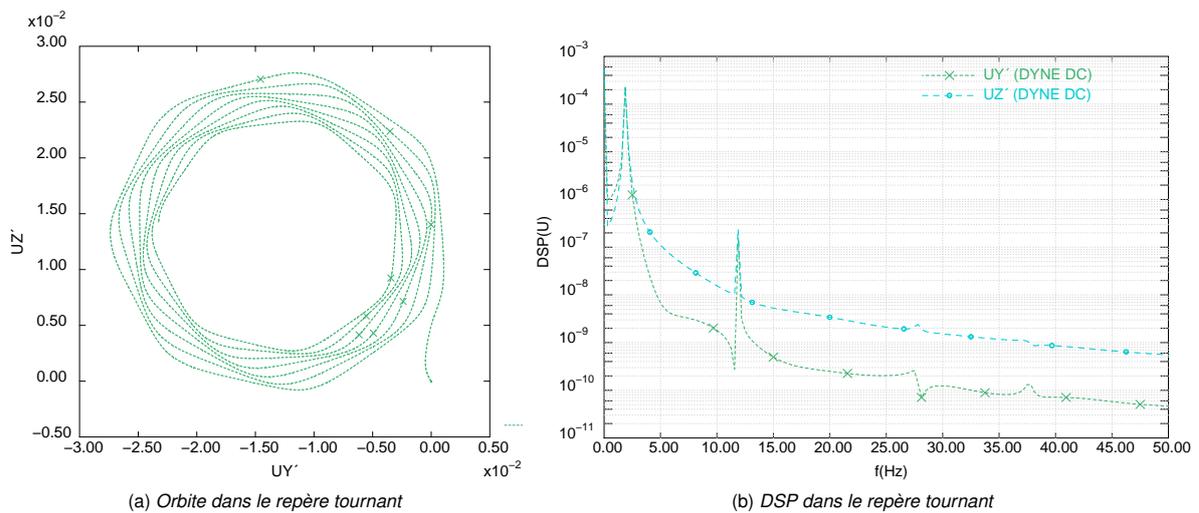


FIGURE 36 – Réponse temporelle transitoire d'un point du rotor modélisé avec des éléments 3D massifs

Les résultats et conclusions sont les mêmes que ceux établis au § 4.2.1 lors du calcul 3D avec un schéma implicite sur base éléments finis.

	Note Technique DEN	Page 45/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

5 MODÉLISATION DE PALIERS ET DE SQUEEZE-FILM

A la suite du stage de V. Boisson [27] en 1997 a été intégré à DYNE une liaison de type "PALIER_FLUIDE" basée sur le modèle de Rohde et Li [28]. Ce modèle (baptisé **RODELI**) repose sur les hypothèses de palier court et de cavitation de "Reynolds". La première induit un profil parabolique des pressions, ce qui réduit à une dimension le problème. La seconde cherche à vérifier la condition $p \geq 0$ via l'algorithme itératif de Christoferson [29, p70].

Cette liaison est aussi censée permettre de calculer les caractéristiques d'un palier à lobes, mais après essai et comparaison avec une référence obtenue à l'aide d'un logiciel tiers, il s'est avéré que la lecture des données était fautive dans DYNE. Ce point a été corrigé (cf. § 5.1) et la notice de DYNE améliorée sur ce point.

5.1 Modélisation de paliers

On a d'abord cherché à valider le modèle existant. Deux cas-tests existaient dans la base des cas-tests de Cast3m préalablement à la présente étude :

- **dy_dev10.dgibi** : calcul d'un palier cylindrique soumis à une charge statique (poids propre).
- **dy_dev11.dgibi** : calcul d'un palier à 3 lobes soumis à une charge dynamique.

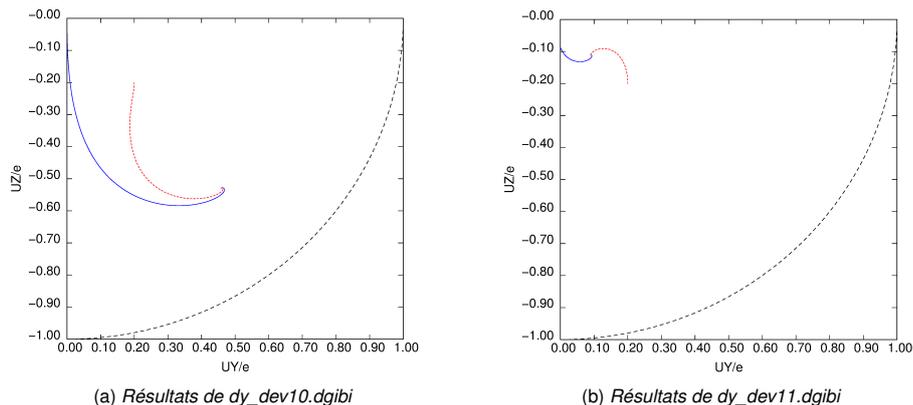


FIGURE 37 – Orbites obtenues avec deux conditions initiales différentes convergent vers le même point d'équilibre

Alors que le premier cas-test donne de bons résultats (cf. figure 37a), la confiance dans les résultats fournis par le second est faible. Il s'est avéré que les données relatives aux lobes du palier étaient mal traitées par DYNE. Après une correction des sources en cause (et de la notice de DYNE), on réussit à obtenir des résultats validés par un logiciel tiers (développé à l'université de Poitiers) sur le cas d'un palier à 3 lobes soumis à une charge statique. Les orbites résultats sont tracées sur la figure 37b.

5.2 Modélisation de squeeze-film

Le squeeze-film étant un cas particulier de palier (avec une vitesse de rotation nulle), il a semblé opportun d'utiliser ce modèle disponible pour traiter le cas du squeeze-film. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec la littérature, un modèle dit de **PALIER_COURT**, qui utilise lui aussi l'hypothèse de profil parabolique du champ de pression mais prend l'hypothèse de Gumbel comme modèle de cavitation, a également été introduit dans DYNE, en plus du modèle historique de RODELI (pour Rohde et Li).

On propose de vérifier l'implémentation réalisée sur la base de trois cas tirés de la littérature. Cette étude est également l'occasion de mettre en place les outils nécessaires à de telles analyses :

- choix des paramètres temporels (pas de temps, nombre de périodes nécessaires pour atteindre un régime stabilisé ...)
- calculs et tracés (éventuellement animés) d'orbites, de DSP (Densité Spectrale de Puissance), de colormaps (à la manière de celles obtenues expérimentalement), de carte de Poincaré (correction de l'opérateur MAPP de Cast3m)...

	Note Technique DEN	Page 46/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

5.2.1 Cas test de Cookson et Kossa [1]

Ce cas test est tiré de l'article de Cookson et Kossa [1]. Il s'agit d'un squeeze-film tel que décrit par la figure 38 supportant la combinaison d'une charge de type poids propre et balourd. Le balourd engendre un mouvement de rotation qui permet au film d'avoir une portance suffisante pour supporter le poids propre (de direction fixe).

Ce type de problème peut être adimensionné en posant comme paramètre $B = \frac{\mu RL^3}{m\Omega C^3}$, $W = \frac{mg}{mC\omega^2}$ et $U = \frac{F_{balourd}}{mC\Omega^2}$.

On essaie de reproduire les orbites stationnaires observées pour le jeu de paramètres adimensionnés $B = 0.09$, $W = 0.10$ et des valeurs de U variables. On constate sur la figure 39 que les orbites obtenues avec le modèle de **palier court** (hypothèse de Gumbel) diffèrent de celles avec le modèle de **Rohde et Li** (hypothèse de Reynolds). Cela n'est pas surprenant, mais nous alerte quant à la sensibilité des résultats au type d'hypothèse formulée sur la cavitation. On ne note pas d'influence de l'intégrateur temporel utilisé.

Les résultats obtenus avec le modèle de cavitation de Gumbel sont très proches de ceux fournis par Cookson et Kossa [1] qui utilisent la même formulation, comme on peut le voir figure 40.

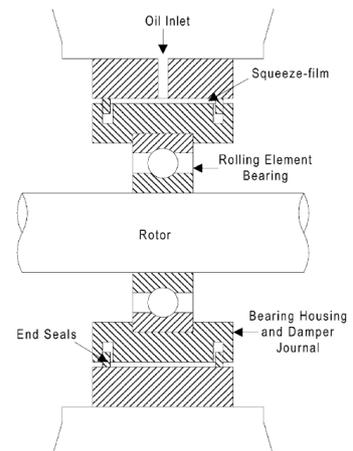


FIGURE 38 – Schéma du squeeze-film

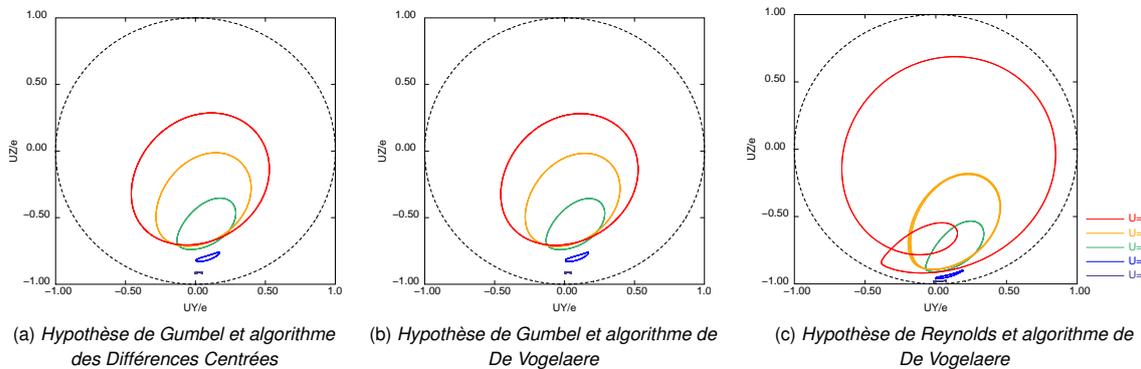


FIGURE 39 – Résultats obtenus par DYNE sur le cas test de Cookson ($B=0.09$ et $W=0.10$)

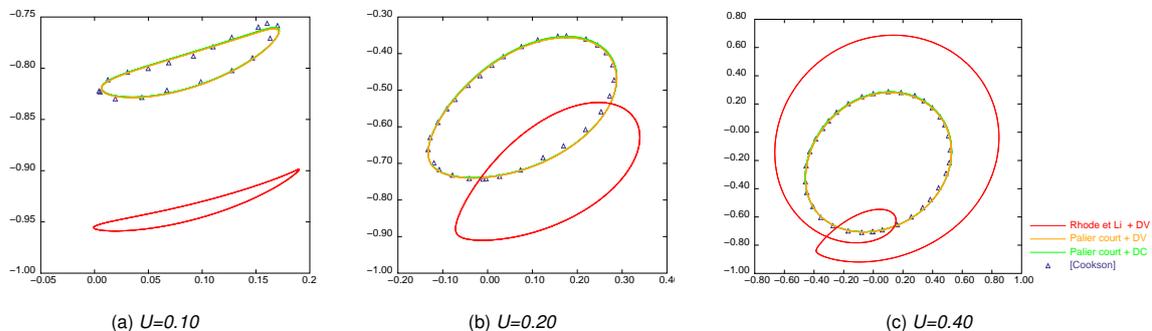


FIGURE 40 – Comparaison des résultats obtenus par DYNE avec la référence [Cookson, ($B=0.09$ et $W=0.10$)] (DV : De Vogelaere, DC : Différences Centrées)



Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

5.2.2 Cas test de Inayat-Hussain *et al.* [2]

Inayat-Hussain a écrit un certain nombre d'articles sur la dynamique des squeeze-film et des paliers magnétiques. Dans [2], Inayat-Hussain, Kanki et Mureithi étudient le cas d'un squeeze-film dont la partie liée au rotor est centrée au moyen d'un ressort de centrage comme le montre le schéma ci-contre.

Par rapport au cas précédent, on introduit le paramètre de raideur adimensionné S défini comme $S = \frac{\sqrt{k/m}}{\Omega}$.

La courbe de réponse obtenue par Inayat-Hussain *et al.* pour les paramètres adimensionnés $B = 0.015$, $W = 0.05$, et $S = 0.3$ est reproduite figure 42. Celle-ci a été obtenue en utilisant une méthode de continuation (logiciel AUTO) permettant de "suivre" les branches solutions et de détecter les bifurcations. Elle montre la diversité des régimes qu'il est possible d'obtenir : 1, 2 ou 4-périodique, quasi-périodique et même chaotique. Ces régimes co-existent pour des valeurs de paramètres donnés et il est physiquement possible de "passer" de l'un à l'autre avec une simple perturbation extérieure.

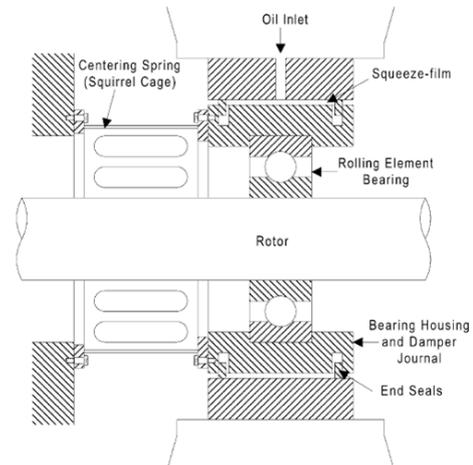


FIGURE 41 – Cas test de Inayat-Hussain

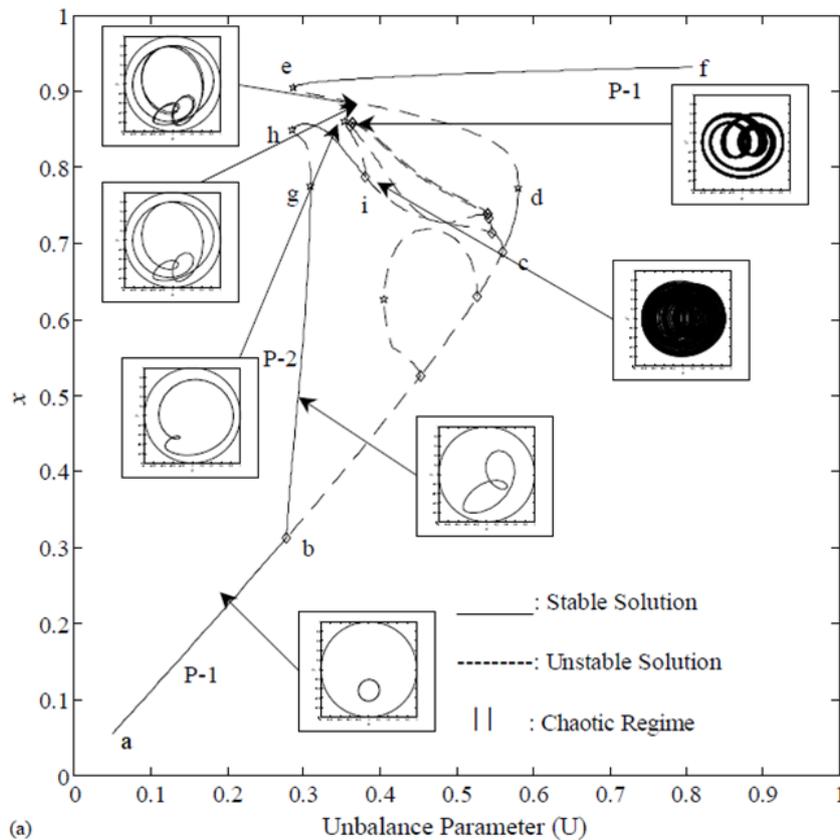


FIGURE 42 – Courbe de réponse obtenue par Inayat-Hussain *et al.* et une méthode de continuation

	Note Technique DEN	Page 48/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

En se positionnant à différente valeur de U et en jouant sur les conditions initiales, on parvient à reproduire dans DYNE la plupart des régimes stables comme le montre la figure 43.

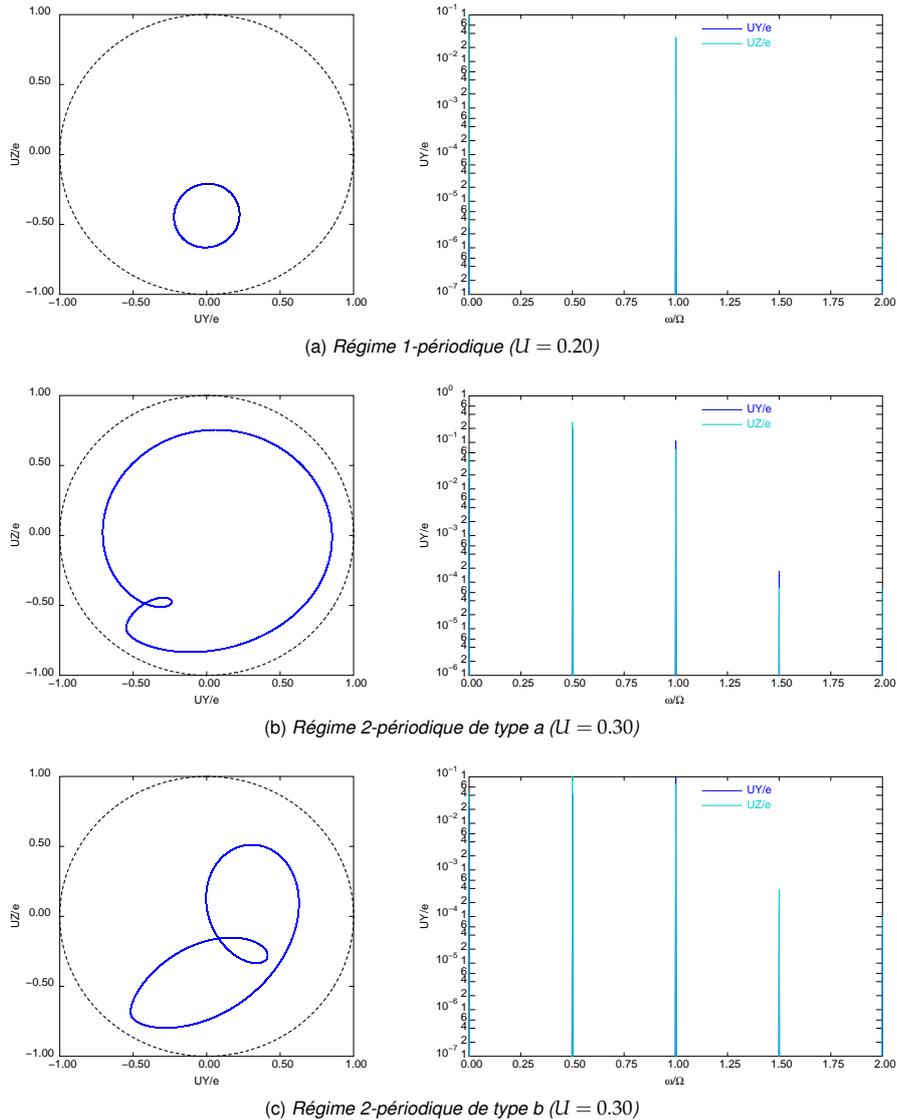
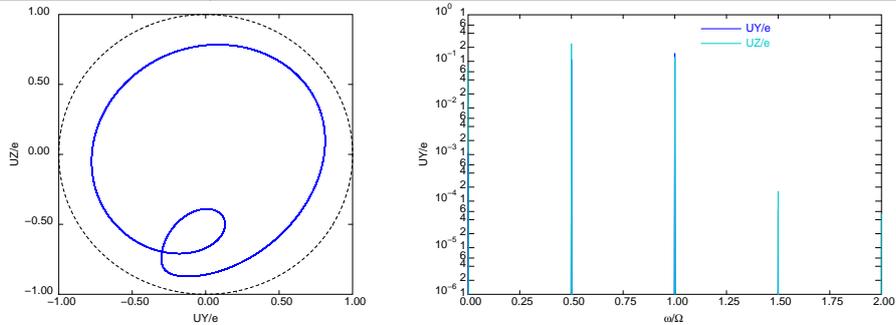


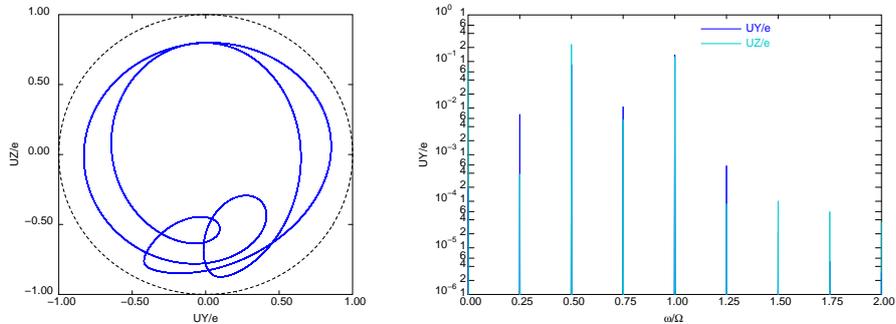
FIGURE 43 – Courbes de réponse obtenue par DYNE pour $B = 0.015$, $W = 0.05$ et $S = 0.3$ (début)



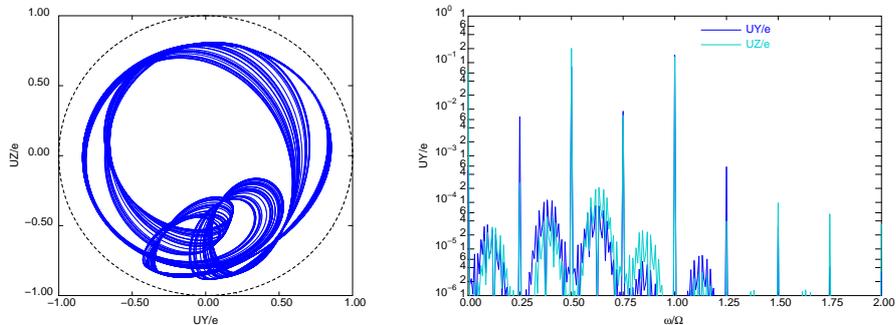
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M



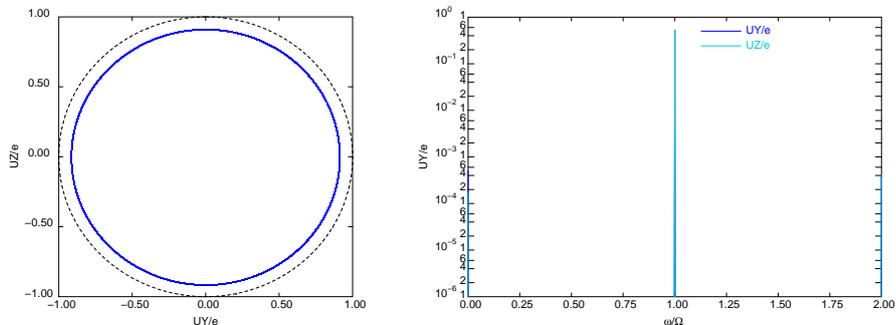
(d) Régime 2-périodique de type a ($U = 0.355$)



(e) Régime 4-périodique ($U = 0.355$)



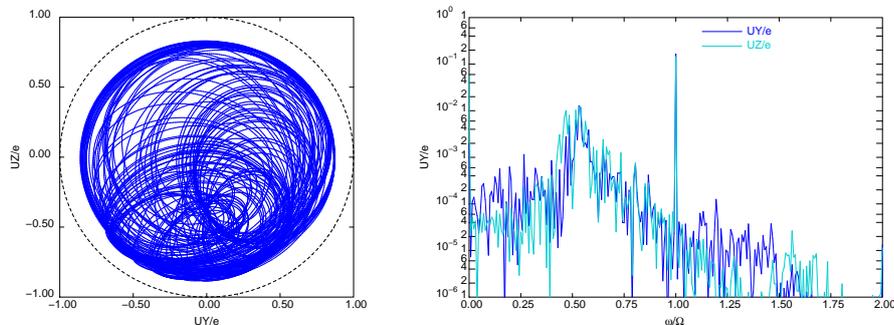
(f) Régime quasi-périodique ($U = 0.363$)



(g) Régime 1-périodique ($U = 0.363$)

FIGURE 43 – Courbes de réponse obtenue par DYNE pour $B = 0.015$, $W = 0.05$ et $S = 0.3$ (suite)

	Note Technique DEN	Page 50/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

(h) Régime chaotique ($U = 0.385$)FIGURE 43 – Courbes de réponse obtenue par DYNE pour $B = 0.015$, $W = 0.05$ et $S = 0.3$ (fin)

5.2.3 Cas test de Zhu *et al.* [3]

Ce dernier cas test est tiré de l'article de Zhu *et al.* [3] publié en 2002. Le système compte 4 degrés de liberté introduits par la flexibilité de l'arbre comme le montre la figure ci-contre et le balourd est évidemment généré au niveau du disque d'inertie de l'arbre. Seuls les mouvements de corps rigides cylindriques et de première flexion de l'arbre sont considérés.

La vitesse de rotation est adimensionnée par rapport à la première fréquence propre du système monté rigidement : $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, où $\omega_0 = \sqrt{k_{shaft}/m_{disk}}$.

Les autres paramètres d'adimensionnement définis par les auteurs sont : $B = \frac{\mu RL^3}{m_{bearing}\omega_0^2 C^3}$, $K = \frac{k_{spring}}{k_{shaft}}$, $\alpha = \frac{m_{bearing}}{m_{disk}}$, $\zeta = \frac{c_{disk}}{2m_{disk}\omega_0}$, et $U = \frac{e_{unbalance}}{C}$.

Dans cet article, les auteurs comparent trois méthodes de calcul de réponse au balourd lors de la montée en vitesse :

- *Synchronous circular centred-orbit motion solution* : la solution est supposée être une orbite circulaire dont l'amplitude est une fonction non-linéaire de la vitesse de rotation à cause des caractéristiques non-linéaires du squeeze-film. Cette méthode correspond à une simple analyse non-linéaire de réponse au balourd.
- *Numerical integration method* : la solution est le régime stabilisé d'une intégration temporelle directe à vitesse de rotation constante. L'opération est répétée pour une suite de vitesse croissante ou décroissante en prenant comme conditions initiales l'état final de la vitesse précédente. C'est la même méthode que celle visée par l'utilisation de DYNE.
- *Slow acceleration method* : le calcul temporel est réalisé en considérant une vitesse de rotation augmentant très lentement.

Les résultats obtenus par ces auteurs pour les paramètres $\zeta = 0.0005$, $\alpha = 0.10$, $K = 0.01$, $B = 0.025$ et $U = 0.3$ sont donnés figures 45 et 46. Sur les deux figures, Zhu *et al.* [3] distingue la montée en vitesse (première ligne) de la descente (deuxième ligne). Sur la figure 46, les trois colonnes représentent l'orbite, la DSP et une carte de Poincaré de la variable X dans l'espace des phases.

Les résultats de la référence sont comparés à ceux obtenus avec DYNE sur les mêmes figures 45 et 46. Contrairement à Zhu *et al.* qui travaille dans le plan X, Y , DYNE travaille nécessairement dans le plan Y, Z . Sur la figure 46, la DSP de DYNE est celle de la composante Y/C en fonction de la fréquence adimensionnée par ω_0 contrairement à Zhu *et al.* qui adimensionne la fréquence par rapport à la vitesse de rotation.

On constate in fine que DYNE permet d'obtenir des réponses incluses dans celles possibles, mais d'une variété moindre que celles de la référence. En particulier, la plage de vitesse où s'établit un régime quasi-périodique est nettement plus restreinte.

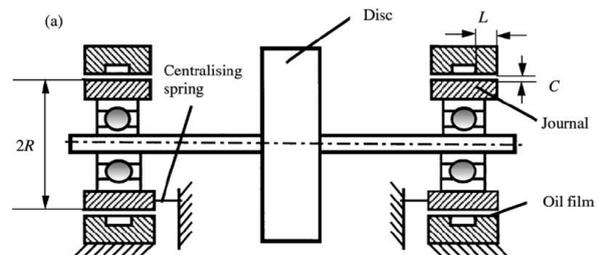
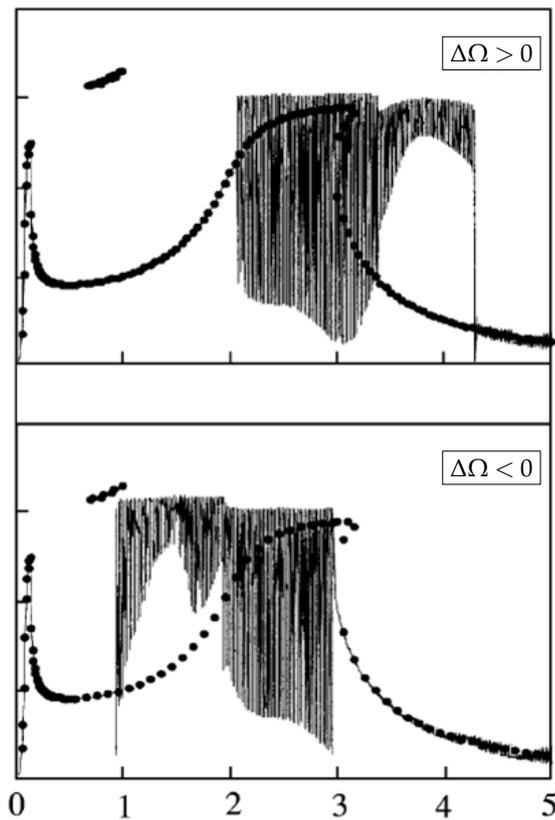


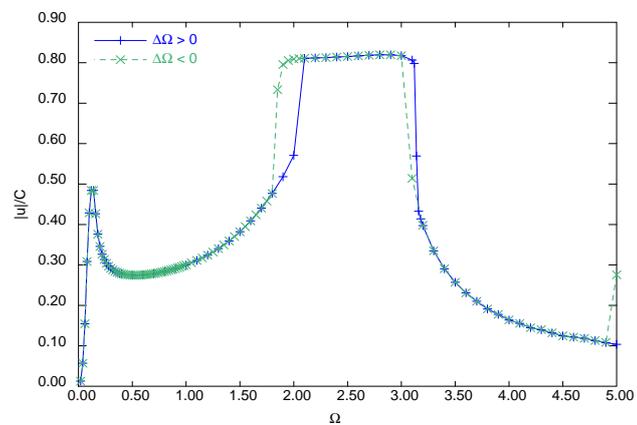
FIGURE 44 – Schéma du squeeze-film



Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M



(a) Réponse obtenue par Zhu et al. [3] (● : Circular motion, — : Numerical integration)



(b) Réponse obtenue par DYNE

FIGURE 45 – Courbe de réponse du cas test de Zhu et al.

	Note Technique DEN	Page 52/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

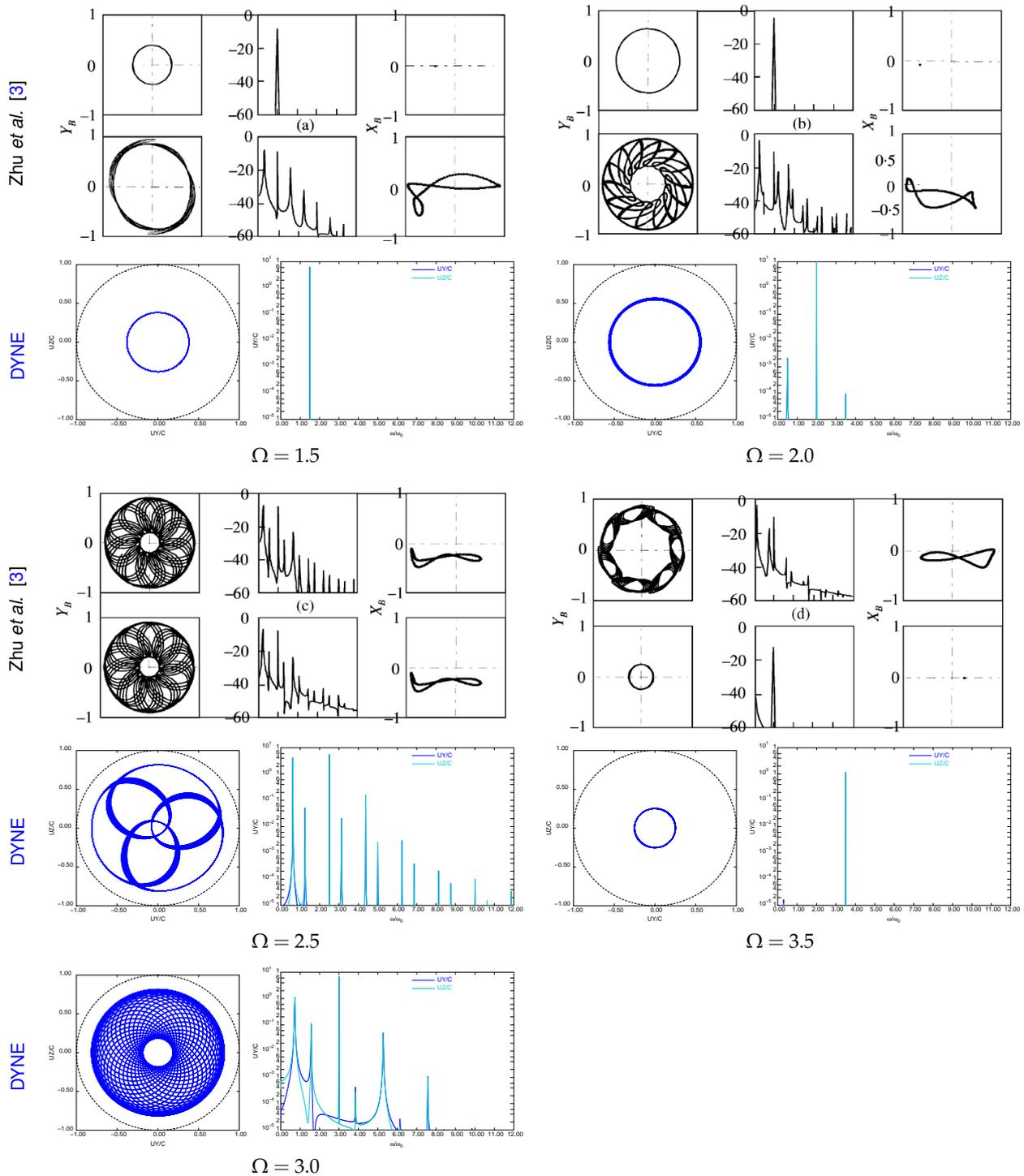


FIGURE 46 – Comparaison des orbites et DSP du cas test de Zhu et al. pour différentes vitesses de rotation obtenues par Zhu et al. [3] et par DYNE. Seules les cartes de Poincaré obtenues par [3] sont représentées.

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

		Note Technique DEN	Page 53/68
		Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
		Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M			

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Afin de permettre l'analyse temporelle non-linéaire de systèmes tournants au sein de Cast3M, les aspects théoriques des schémas d'intégration temporelle ainsi que leur implémentation numérique dans Cast3M ont été investigués avec en particulier :

- l'opérateur DYNE qui utilise des schémas explicites sur base modale,
- la procédure DYNAMIC qui utilise le schéma implicite de l'accélération moyenne.

Des problèmes d'instabilités numériques ont été rencontrés tant pour les schémas explicites qu'implicites. Pour le premier type de schéma (explicite), le problème a été résolu en rajoutant à l'opérateur qui calcule les accélérations les matrices liées à l'amortissement et aux effets gyroscopiques. Pour le second type de schéma (implicite), l'instabilité liée à la liaison rotor-stator a pu être maîtrisée en adoptant un schéma dissipatif (HHT ou α -généralisé) implémenté dans une procédure baptisée DYNAMOI dont les fonctionnalités sont appelées à être intégrées prochainement dans DYNAMIC.

Les méthodes de sous-structuration dynamique ont également fait l'objet de travaux afin d'être utilisables dans l'opérateur DYNE. Elles sont indispensables dans le cas d'ensembles rotor-stator modélisés en 3D ou 2D Fourier.

Enfin, la modélisation des paliers fluides dans l'opérateur DYNE a été reprise et validée, en particulier pour le cas des squeeze-films ($\Omega = 0$).

Pour les prochaines études de systèmes dynamiques avec non-linéarités localisées (comme celle du squeeze-film), on privilégiera l'utilisation de l'opérateur DYNE, du fait de ses performances pour ce type de calculs (dynamique sur base modale et de durée suffisante pour atteindre le régime stationnaire). L'ensemble des développements et validations présentés dans cette note permettront d'établir des cartes de montée en vitesse de machines tournantes plus complexes que celles traitées ici, et de détecter les éventuels changements de régime (bifurcations).

		Note Technique DEN	Page 54/68
		Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
		Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M			

RÉFÉRENCES

- [1] R. Cookson and S. Kossa, "The effectiveness of squeeze-film damper bearings supporting rigid rotors without a centralising spring," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 21, no. 11, pp. 639–650, 1979.
- [2] J. Inayat-Hussain, H. Kanki, and N. Mureithi, "On the bifurcations of a rigid rotor response in squeeze-film dampers," *Journal of fluids and structures*, vol. 17, no. 3, pp. 433–459, 2003.
- [3] C. Zhu, D. Robb, and D. Ewins, "Analysis of the multiple-solution response of a flexible rotor supported on non-linear squeeze film dampers," *Journal of sound and vibration*, vol. 252, no. 3, pp. 389–408, 2002.
- [4] T. J. Hughes, *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic - Finite Element Analysis*. Prentice-Hall International, Inc., 1987.
- [5] M. Géradin and D. Rixen, *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson Paris, 1993.
- [6] J. H. Argyris and H.-P. Mlejnek, *Dynamics of structures*. North-Holland Amsterdam, 1991.
- [7] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Zhu, *The Finite Element Method : Its Basis And Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6th edition ed., 2005.
- [8] J. R. Dormand and P. J. Prince, "A family of embedded Runge-Kutta formulae," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 19–26, 1980.
- [9] W. A. Lester, "De Vogelaere's method for the numerical integration of second-order differential equations without explicit first derivatives : Application to coupled equations arising from the Schrodinger equation," *Journal of Computational Physics*, vol. 3, no. 2, pp. 322–326, 1968.
- [10] C. Fu, "On the stability of explicit methods for the numerical integration of the equations of motion in finite element methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 95–107, 1972.
- [11] J. P. Coleman and J. Mohamed, "On de Vogelaere's Method for $y''=f(x,y)$," *Mathematics of Computation*, vol. 32, no. 143, pp. 751–762, 1978.
- [12] F. Axisa, E. De Langre, H. Bung, J. Antunes, and F. Doveil, "Méthodes d'analyse en dynamique non-linéaire des structures," Journées IPSI DMT/91.575, CEA, 1991.
- [13] L. Vivian and D. De Langre, Brochard, "Calcul non-linéaire dynamique - Description de l'opérateur DYNE de Castem 2000," Rapport Technique DMT/90.218, CEA, 1990.
- [14] H. M. Hilber, T. J. Hughes, and R. L. Taylor, "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics," *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 5, no. 3, pp. 283–292, 1977.
- [15] J. Chung and G. Hulbert, "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- α method," *Journal of applied mechanics*, vol. 60, no. 2, pp. 371–375, 1993.
- [16] M. Géradin and A. Cardona, *Flexible multibody dynamics : a finite element approach*. Wiley, 2001.
- [17] CEA, "Finite Element code Cast3M," 2013. [http ://www-cast3m.cea.fr](http://www-cast3m.cea.fr).
- [18] O. A. Bauchau, *Flexible multibody dynamics*, vol. 176. Springer, 2010.
- [19] R.-J. Gibert, *Vibrations des structures. Interactions avec les fluides, sources d'excitation aléatoires*. CEA-EDF-INRIA, Ecole d'été d'analyse numérique, 1988.
- [20] R. R. Craig Jr, "A brief tutorial on substructure analysis and testing," in *Proceedings of the International Modal Analysis Conference-IMAC*, vol. 1, pp. 899–908, 2000.
- [21] M. Corus, "Calcul modal par sous-structuration dynamique classique," R4.06.02, EDF - Code_Aster, 2013.
- [22] D. Combescure, "Eléments de dynamique des structures. Illustrations à l'aide de CAST3M," Support de cours, <http://www-cast3m.cea.fr/html/Combescure/DynamiqueCAST3MSeptembre2006.pdf>, CEA, 2006.

		Note Technique DEN	Page 55/68
		Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
		Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M			

- [23] D. Combescure, "Modélisation des arbres tournants dans cast3m. calculs avec des éléments de poutre dans le repère fixe," Rapport Technique SEMT/DYN/RT/03-007/A, CEA, 2003.
- [24] "Radioss theory manual," 10.0, Altair, 2009.
- [25] M. Herran, *Analyse et simulation du phénomène de perte de pales généralisée sur un turbomoteur d'hélicoptère*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2010.
- [26] A. Cardona and M. Géradin, "Time integration of the equations of motion in mechanism analysis," *Computers & Structures*, vol. 33, no. 3, pp. 801–820, 1989.
- [27] V. Boisson, "Adaptation et intégration de modules de calcul de paliers au sein du logiciel ROTOR," Rapport de stage réalisé au GEA/DRT/DMT/SEMT/DYN, LMS, Université de Poitiers, 1997.
- [28] S. Rohde and D. Li, "A generalized short bearing theory," *Journal of Tribology*, vol. 102, no. 3, pp. 278–281, 1980.
- [29] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, and M. Godet, *Lubrification hydrodynamique*. Eyrolles, 1990.
- [30] B. J. Hamrock, S. R. Schmid, and B. O. Jacobson, *Fundamentals of fluid film lubrication*, vol. 169. CRC press, 2004.



Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

A ORGANISATION INFORMATIQUE DE L'OPÉRATEUR DYNE

Liste non-exhaustive des sous-routines appelées par DYNE avec l'option 'DE_VOGELAERE'.

DYNE

LIRCHA	lecture de 'DE_VOGELAERE' ou 'DIFFERENCES_CENTREES'	
DYNPLX	Algo de Plexus (obsolète)	
DYNDIF	Algo des différences centrees (idem Plexus)	
DYNDIV	Algo Fu - de Vogelaere	
DEVLIR			
LIRTAB	lecture des tables :	
		'PASAPAS'	→ ITDYN, LMODYN=TRUE
		ou 'BASE_MODAL'	→ ITBAS
		ou 'ENSEMBLE_DE_BASES'	→ ITBAS
		ou 'RAIDEUR_ET_MASSE'	→ ITKM
		et si(non LMODYN) des tables :	
		'AMORTISSEMENT'	→ ITA
		'LIAISON'	→ ITLIA
		'CHARGEMENT'	→ ITCHAR
		'INITIAL'	→ ITINIT
		'REPRISE'	→ IREP
		'SORTIE'	→ ITSORT
LIRENT	lecture du nombre de pas	→ NP
LIRREE	lecture du pas de temps	→ PDT
DYNE13	Vérification des supports des objets ITBAS et ITKM	
		Appel à DYNE25	
		Création et remplissage de MPREF = liste des points de référence	
		→ KPREF	
DYNE25	Remplit l'ICPR des noeuds support des modes	
DEVALO	Création et dimensionnement des segments de travail :	
		MTNUM : pas de temps et temps de calcul	→ KTNUM
		MTQ : vecteurs Q, Q̇ et Q̈	→ KTQ
		MTKAM : matrices diagonales K, M et C	→ KTKAM
		LOCLFA :	
		MTLIAA : liaison sur la base A	→ KTLIAA
		MTLIAB : liaison sur la base B	→ KTLIAB
		MTPHI : déformées modales	→ KTPHI
		MTPAS : variables au cours d'un pas	→ KTPAS
		MTFEX : chargements en base A et B	→ KTFEX
		MTRES : via DYNE15	→ KTRES
DYNE21 et DYNE71	..	Dimensionne MTLIAA pour la Liaison sur la base A	
DYNE22 et DYNE72	..	Dimensionne MTLIAB pour la Liaison sur la base B	
DYNE15	Appelle DYNE12	
		Recherche dans la table ITSORT les sorties demandées	
		Dimensionne table des résultats MTRES.	
DYNE12	Ecriture des chaînes demandées comme indices dans les tables	
DYNE74, DYNE24, DYNE77, et DYNE27		Dimensionne les sorties des liaisons	
DYNE17	Création des CHPOINTS et LISTREELS résultats et des POINTS support des variables de liaison (nécessaires à la reprise)	



Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

(DYNE)

(DYNDEV)

.....	
DEVLIA	Remplissage de KTLIAA et KTLIAB décrivant les liaisons depuis ITLIA
DYNE20	Cas des liaisons en base B
DYNE28, DYNE29, DYNE30, DYNE33	
DYN201, DYN205, DYN202, DYN203, DYN204, DYN206, DYN207, DYN208	
DYNE19	Cas des liaisons en base A
DEVTRA	Remplissage des tableaux KTKAM, KTRES et KTPHI depuis ITBAS, ITKM, ITA ...
DYNE26	
DYNE41, DYNE42	
DEVFX0	Remplissage du tableau FEXA (force en base A) depuis ITCHAR
DEVINT	
DEVPSM	Traitement des pseudo-modes dans KTFEX
DEVPS2	Remplissage du tableau FEXPSM (forces associées aux pseudo-modes) de KTFEX
DEVRIg	Remplissage du tableau FTEXB (force en base B) de KTFEX
DEVINI	Initialisation de l'algorithme ou reprise de calcul
DYNE18	Remplit Q , \dot{Q} ou \ddot{Q} depuis le chpoint de reprise ICHP
DYNE23	
DYNA14	
DEVRCO	
DYNE14	
DEVLFA	
DEVLf2	
DEVALG	Mise en oeuvre de l'algorithme
DEVPAS	Calcul d'un pas
DEVFXA	Totalisation des forces extérieures en base A (\rightarrow FTOTA depuis FEXA) et cas corps rigide (\rightarrow FEXB depuis FTEXTB)
DEVEQ1	Déplacement au demi-pas $Q_{n+\frac{1}{2}}$ (\rightarrow Q1(;,2))
DEVLFA et DEVLfB	Ajout des forces de liaisons en base A et B
DEVLK0	Ajout des raideurs à l'issu du demi pas de temps à FTOTA
DEVEQ2	Vitesse au demi-pas $\dot{Q}_{n+\frac{1}{2}}$ (\rightarrow Q2(;,2))
.....	Accélération au demi-pas $\ddot{Q}_{n+\frac{1}{2}}$ (\rightarrow Q3(;,2))
DEVEne	Travaux d'un demi-pas (\rightarrow WEXT et WINT)
DEVEQ3	Déplacement au pas Q_{n+1} (\rightarrow Q1(;,1))
DEVLK0	Ajout des raideurs à l'issu du pas de temps à FTOTA
DEVLFA et DEVLfB	Ajout des forces de liaisons en base A et B
DEVEQ4	Vitesse au pas \dot{Q}_{n+1} (\rightarrow Q2(;,1))
DEVEne	
DEVTRI	Remplissage du tableau de sauvegarde avec les quantités initiales
DEVTR1	Remplissage du tableau de sauvegarde avec les quantités du pas
DYNE16	Décalage ou mise à 0 des tableaux pour le pas suivant
DEVSOR	Sortie de la table résultat et nettoyage de la mémoire
DEVSO2	
DEVSO4	

	Note Technique DEN	Page 58/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Liste non-exhaustive des sous-routines appelées par DYNE avec l'option 'DIFFERENCES_CENTREES'. Les sous-routines propres à cette option sont signalées en **bleu**). Elles sont principalement le fait de la non-utilisation des variables à l'instant $n + \frac{1}{2}$ et affectent finalement assez peu la structure informatique.

```

DYNE
├── DYNDIF
│   ├── DEVLIR
│   │   ├── DEVALO
│   │   ├── DEVLIA
│   │   ├── DEVTRA
│   │   ├── D2VFX0
│   │   │   └── D2VINT
│   │   ├── DEVPSM
│   │   ├── D2VRIG
│   │   ├── D2VINI
│   │   ├── DYNE18
│   │   ├── DYNE23
│   │   ├── DYNA14
│   │   ├── DEVRCO
│   │   ├── DYNE14
│   │   ├── D2VLFA
│   │   ├── D2VLF2
│   │   │   ├── D2VCOI
│   │   │   ├── DEVLB2
│   │   │   ├── D2VLB1
│   │   │   │   └── DEVFB1 à DEVFB7
│   │   │   ├── DEVMOM
│   │   │   └── DEVPRO
│   │   └── D2VALG
│   │       ├── D2VPAS
│   │       │   ├── D2VFXA
│   │       │   ├── DEVLK0
│   │       │   ├── D2VLFA et D2VLFB
│   │       │   │   ├── DEVRCO
│   │       │   │   ├── D2VLB1
│   │       │   │   ├── DEVMOM
│   │       │   │   └── DEVPRO
│   │       └── D2VENE
│   ├── D2VTRI
│   ├── DEVTR1
│   ├── D2NE16
└── DEVSOR

```

B CAS-TESTS CAST3M APPELANT L'OPÉRATEUR DYNE

On décrit ici les cas-tests de la base des cas-tests Cast3M utilisant l'opérateur DYNE. On ne répertorie donc pas les cas-tests des outils métiers (tels que GERBOISE, etc ...).

	Note Technique DEN	Page 60/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

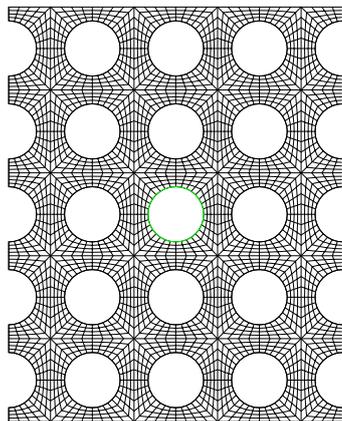
C EXEMPLES D'APPLICATION DE DYNAMOI À D'AUTRES DOMAINES DE LA MÉCANIQUE

Il existe d'autres applications pour lesquelles la non-dissipation du schéma de Newmark de l'accélération moyenne est un point faible, et pour lesquels il peut être intéressant d'utiliser les schémas HHT ou α -généralisé.

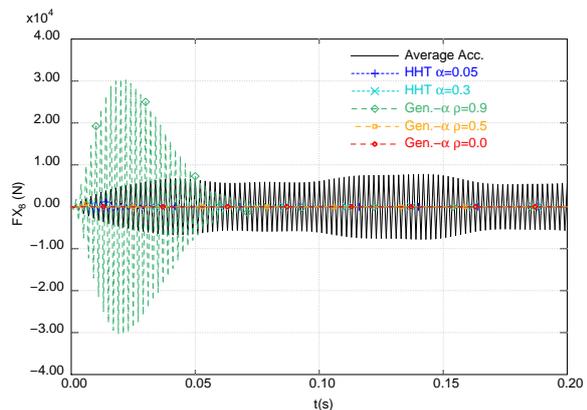
C.1 Interaction Fluide-Structure

On considère par exemple le cas d'un tube immergé auquel on impose un mouvement sinusoïdal. Le modèle liquide est celui dit de "U-P- π " (modèle de fluide acoustique).

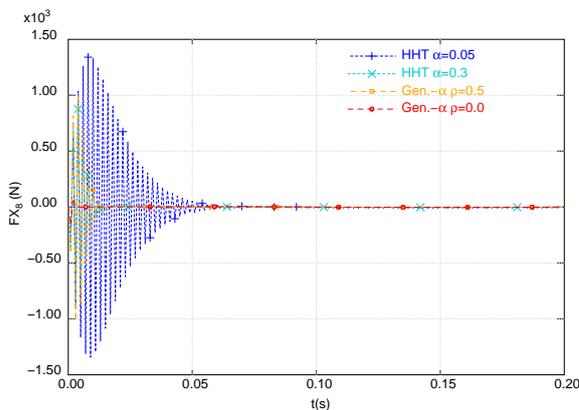
L'utilisation du Newmark "classique" de l'accélération moyenne conduit à des oscillations à chaque pas de temps de la force exercée par le fluide sur l'un des tubes comme le montre la courbe noire de la figure 47d. Ce type de résultat nécessite un post-traitement particulier (lissage ou filtrage) avant d'être exploitable.



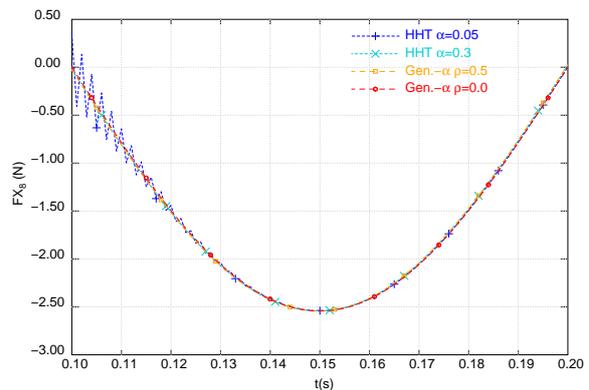
(a) Maillage du liquide : le tube central (en vert) est en mouvement



(b) Résultats de l'intégration temporelle



(c) Résultats de l'intégration temporelle des schémas dissipatifs



(d) Résultats de l'intégration temporelle des schémas dissipatifs : zoom

FIGURE 47 – Problème d'Interaction Fluide Structure : intégration temporelle

On constate que la dissipation numérique nécessaire pour amortir en une demi-période les oscillations parasites des efforts est non-négligeable. Pour le HHT, il faut $\alpha_F > 0.1$, et pour le α -généralisé, il faut $\rho^\infty \leq 0.5$

	Note Technique DEN	Page 61/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

C.2 Impact élastique

Les impacts sont également très sensibles au schéma d'intégration numérique du fait de la discontinuité des vitesses dans le temps au moment de l'impact. Généralement, cela se traduit par de fortes oscillations des accélérations et, par conséquent, des efforts.

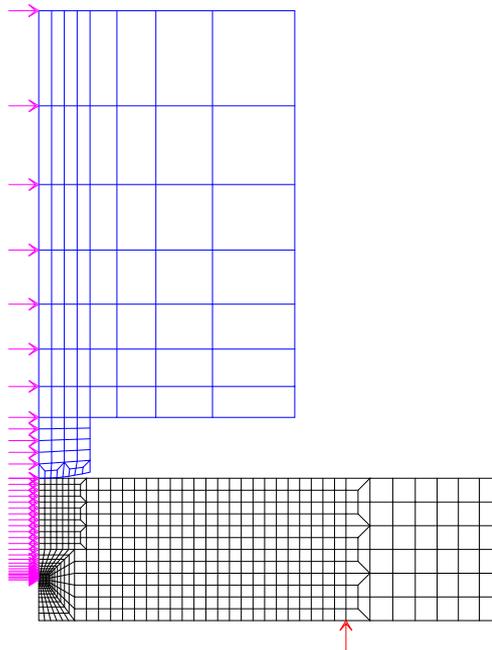


FIGURE 48 – Maillage du barreau (en noir) et de l'impacteur (en bleu) qui a une vitesse initiale de 10m/s vers le bas. Les flèches indiquent les CL (en rose $UX=0$ et en rouge $UY \geq 0$)

On considère le cas d'un barreau entaillé sur deux appuis qui vient être percuté en son centre par un impacteur (cf. figure 48), le mettant en flexion de manière dynamique.

Le calcul avec un schéma de Newmark classique de l'accélération moyenne de cet essai dynamique de flexion 3 points sur éprouvette préfissurée est réalisé, et les résultats sont donnés figure 49. On constate que l'utilisation la procédure VITEUNIL (dans PASAPAS ou DYNAMIC) introduit rapidement des hautes fréquences dans la solution. Cela est dû à la volonté de conserver l'énergie du système comme on peut le voir sur la figure 53.

Les calculs avec les schémas dissipatifs HHT et α -généralisé ont également été menés. On constate sans surprise sur la figure 53 que l'énergie mécanique décroît plus ou moins rapidement selon le schéma considéré, et que le schéma de Newmark de l'accélération moyenne non-modifié par VITEUNIL introduit aussi ponctuellement quelques dissipations ou gain d'énergie.

A contrario, les forces de réaction obtenues avec le schéma HHT et un fort amortissement numérique (figure 50) et avec le α -généralisé et un faible amortissement numérique (figure 51) sont plus surprenantes car elles surpassent largement celles obtenues avec le schéma de l'accélération moyenne.

Concernant l'évolution temporelle des déplacements (figure 52), elle s'écarte progressivement de la solution non-amortie avec l'augmentation de l'amortissement numérique.

 <p>DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE</p>	Note Technique DEN	Page 62/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A

Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M

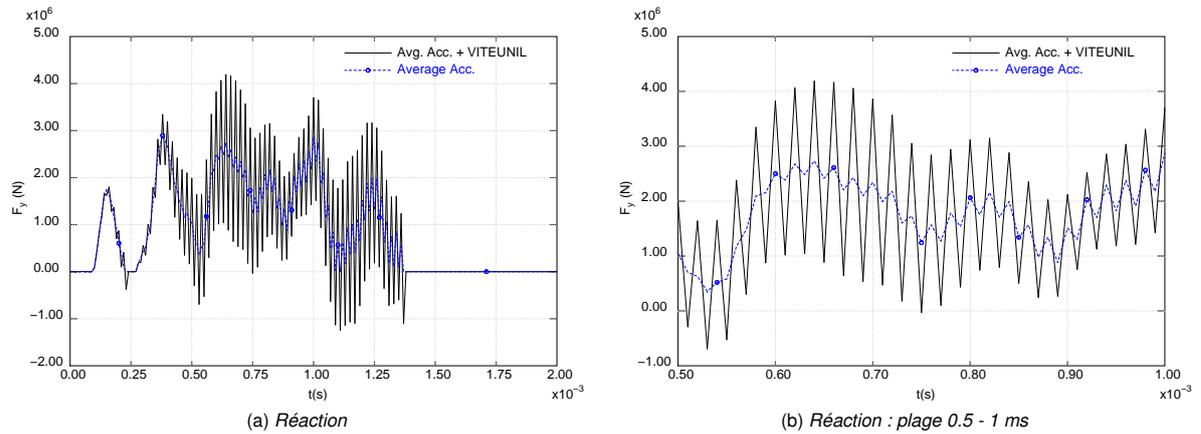


FIGURE 49 – Problème d'impact : intégration temporelle par le schéma de Newmark

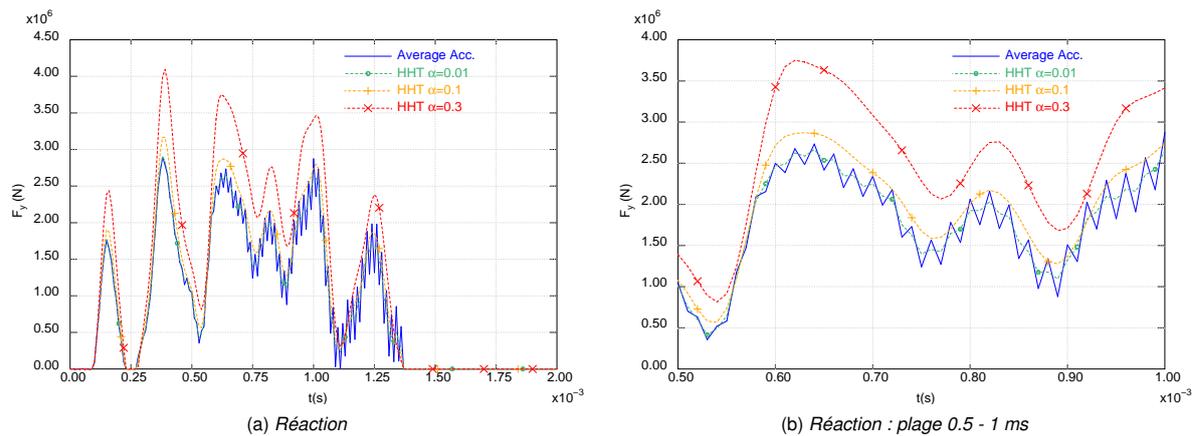


FIGURE 50 – Problème d'impact : intégration temporelle par le schéma HHT

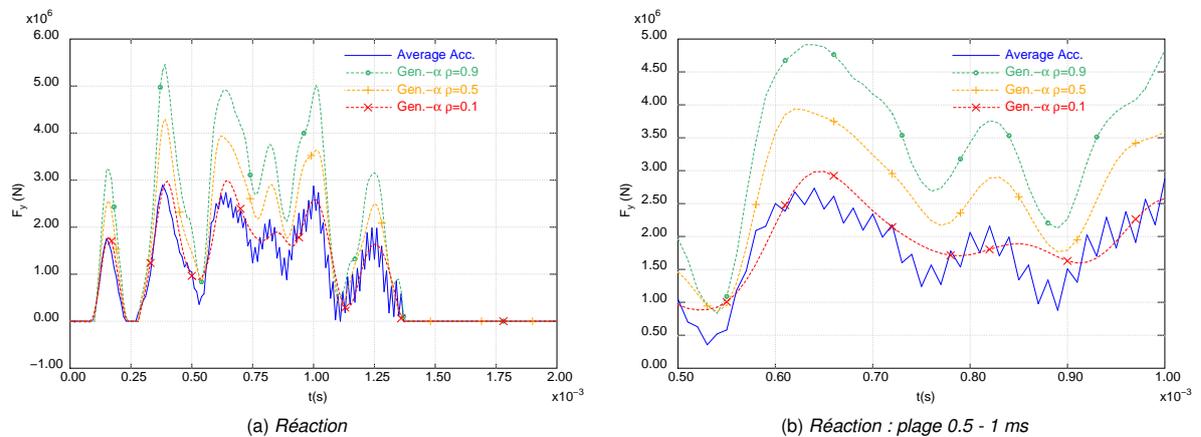


FIGURE 51 – Problème d'impact : intégration temporelle par le schéma α -généralisé

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

 <p>DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE</p>	Note Technique DEN	Page 63/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

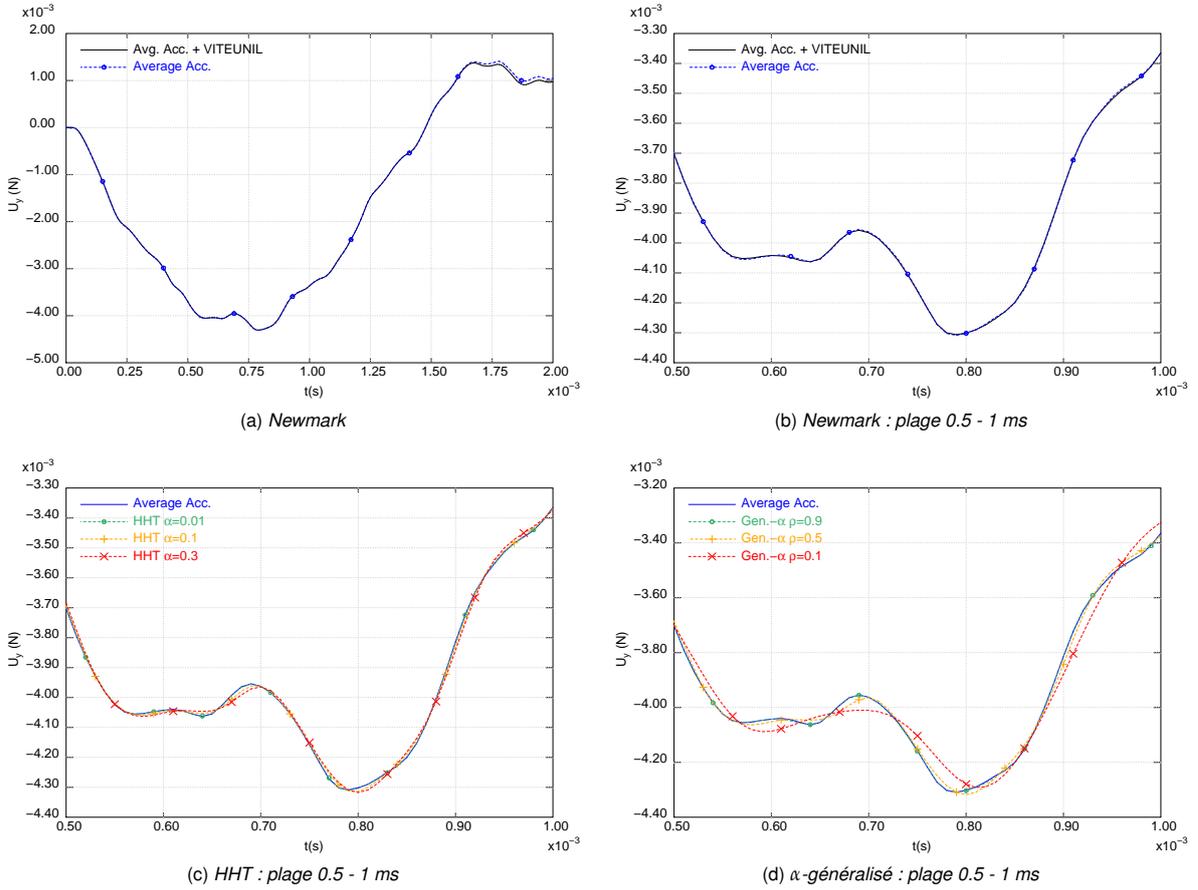


FIGURE 52 – Problème d'impact : déplacements

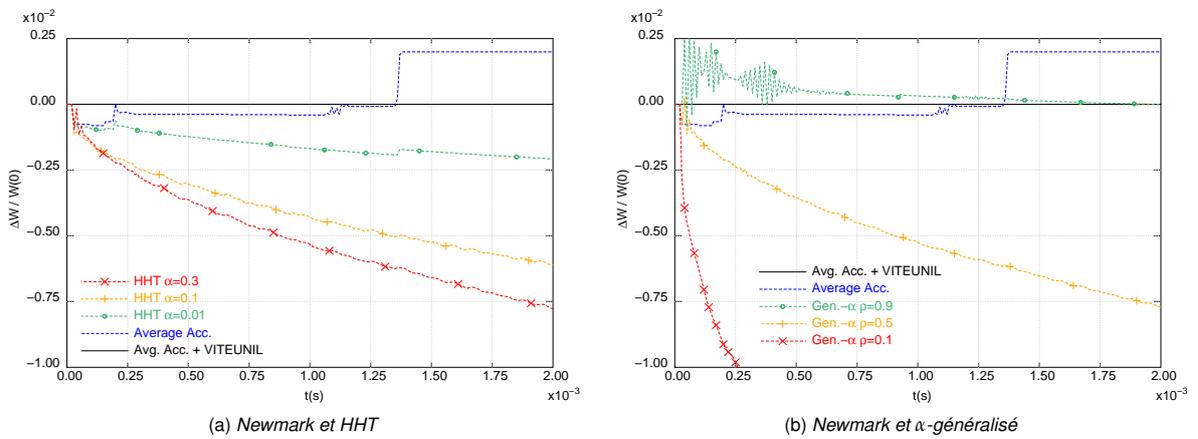


FIGURE 53 – Problème d'impact : bilan d'énergie

Document propriété du CEA - Reproduction et diffusion externe au CEA soumises à l'autorisation de l'émetteur

	Note Technique DEN	Page 64/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

D EQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES APPLIQUÉE AUX FILMS MINCES

D.1 Equation de Reynolds

On considère un fluide Newtonien, c'est à dire un fluide dont l'équation constitutive exprime une relation linéaire entre les contraintes et le taux de déformation :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \\ &= -(p + \lambda \operatorname{tr} D)\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}}\end{aligned}\quad (54)$$

où le taux de déformation s'exprime comme : $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + \nabla^{sym} \underline{v})$.

Remarque : un fluide est dit parfait si $\lambda = \mu = 0$.

Injectant cette loi de comportement (54) dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\underline{v}}{dt} &= \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} \\ \rho \frac{d\underline{v}}{dt} &= -\nabla p + \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} + \underline{f} \\ \rho \frac{d\underline{v}}{dt} &= -\nabla p + \nabla(\lambda \operatorname{tr} D) + \operatorname{div}(2\mu\underline{\underline{D}}) + \underline{f}\end{aligned}\quad (55)$$

dont la i^{ime} ligne peut s'écrire de manière plus détaillée sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + f_i \quad (56)$$

Considérant les valeurs caractéristiques du problème (cf. figure 54), on peut effectuer une analyse dimensionnelle permettant de simplifier les équations (56).

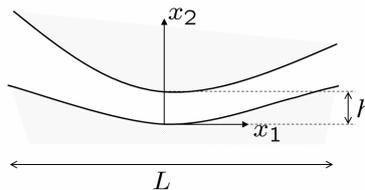


FIGURE 54 – Schéma du film

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{x_1}{L} & x_2^* &= \frac{x_2}{h} & x_3^* &= \frac{x_3}{L} \\ u_1^* &= \frac{u_1}{V} & u_2^* &= \frac{u_2 L}{V h} & u_3^* &= \frac{u_3}{V} \\ t^* &= \frac{t V}{L} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\lambda_0}\end{aligned}\quad (57)$$

Remarquons que V est définie en hydrodynamique comme la vitesse de l'une des parois, et on peut alors aussi poser $p^* = \frac{p h^2}{\mu_0 V L}$. Par contre, en hydrostatique, c'est la pression d'alimentation qui va nous permettre l'adimensionnement avec $p^* = \frac{p}{p_{alim}}$ et par conséquent $V = \frac{p_{alim} h^2}{\mu_0 L}$.

On met alors en évidence 3 nombres sans dimension caractéristiques :

	Note Technique DEN	Page 65/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

- $\Re = \frac{\rho_0 V h}{\mu_0}$: le nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement,
- $\epsilon = \frac{h}{L}$: le paramètre d'échelle ($\sim 10^{-3}$ en lubrification),
- $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$: le rapport de viscosité (~ 1 en général).

Introduisant cet adimensionnement dans l'équation (56) où l'on néglige les efforts volumiques extérieurs f_i , on peut faire l'hypothèse de "film" mince et négliger les termes en ϵ^2 et en $\epsilon^3 \Re$. Il vient ainsi après quelques lignes de calcul :

$$\text{pour } i = 1, 3 \quad \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} = -\epsilon \Re \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right) + \mu^* \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial \mu^*}{\partial x_2^*} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} \quad (58)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} = 0$$

Les termes en $\epsilon \Re$ sont les termes d'inertie, composés d'une partie temporelle et d'une partie advective. Selon les cas, on peut choisir de négliger le premier ($t^* \gg 1$), le second ($t^* \ll 1$) ou les deux termes d'inertie ($\epsilon \Re \ll 1$). Dans ce dernier cas, on privilégie les termes associés à la viscosité et, en considérant une viscosité constante dans l'épaisseur du film, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \quad (59)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$$

La double intégration selon x_2 avec les conditions aux limites :

$$v(x_2 = 0) = \begin{pmatrix} v_1 = V_{10} \\ v_2 = 0 \\ v_3 = V_{30} \end{pmatrix} \quad v(x_2 = h) = \begin{pmatrix} v_1 = V_{1h} \\ v_2 = V_{2h} \\ v_3 = V_{3h} \end{pmatrix} \quad (60)$$

permettent d'obtenir :

$$v_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2(x_2 - h) + (V_{1h} - V_{10}) \frac{x_2}{h} + V_{10} \quad (61)$$

$$v_3 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2(x_2 - h) + (V_{3h} - V_{30}) \frac{x_2}{h} + V_{30}$$

où l'on reconnaît les termes de Poiseuille (dus au gradient de pression) et les termes de Couette (associés aux vitesses des surfaces).

Reportant les expressions (61) dans l'équation de continuité (62) et procédant à l'intégration selon x_2 avec l'aide de la formule de Leibniz, on aboutit finalement à l'équation de Reynolds (63) (qu'on trouve aussi dans [29, eq. 3.37]) :

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = 6\rho(V_{10} - V_{1h}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(V_{30} - V_{3h}) \frac{\partial h}{\partial x_3} \quad (63)$$

$$+ 6h \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho(V_{10} + V_{1h})) + 6h \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho(V_{30} + V_{3h}))$$

$$+ 12\rho V_{2h} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

	Note Technique DEN	Page 66/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

On retrouve dans [30, eq. 7.45] cette équation générale sous la forme équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho h \frac{V_{10} + V_{1h}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\rho h \frac{V_{30} + V_{3h}}{2} \right) \quad (64)$$

$$+ \rho(V_{2h} - V_{20}) - \rho V_{1h} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \rho V_{3h} \frac{\partial h}{\partial x_3} + h \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Comme cela est résumé dans l'ouvrage de Frene [29], on rappelle que pour obtenir cette équation, il a été nécessaire de poser que :

1. L'épaisseur du film est très faible devant les autres dimensions du contact, c'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique.
2. Le milieu est continu, l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film.
3. Le fluide est newtonien : il y a proportionnalité entre le taux de cisaillement et les contraintes de cisaillement dans le film.
4. Le régime est laminaire ; en régime non laminaire il faudra utiliser une autre modélisation.
5. L'une des surfaces du contact est parfaitement plane et ne présente pas de rugosité, ce qui permet de placer l'origine des axes sur cette surface. Ainsi, la courbure générale du film est négligée.
6. Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact : la vitesse du fluide à la paroi est égale à celle de la paroi.
7. Les forces d'inertie sont négligeables ce qui peut ne pas être toujours vérifié.
8. Les forces massiques extérieures sont négligées.
9. La viscosité et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film. Ceci revient à poser que la température ne varie pas à travers l'épaisseur du film.

D.2 Cas des géométries cylindriques

Le film de fluide compris entre deux cylindres est représenté sur la figure 55.

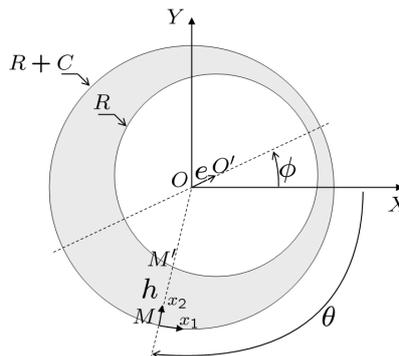


FIGURE 55 – Schéma du squeeze film

On considère le repère cylindrique :

$$\theta = \arctan \frac{Y}{X} \quad (65)$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$z = Z$$

	Note Technique DEN	Page 67/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

Le point M appartenant la surface du cylindre externe est ainsi défini dans ce repère par :

$$\begin{aligned}x_1 &= R\theta \\x_2 &= 0 \\x_3 &= Z\end{aligned}\quad (66)$$

Le vecteur $\underline{e} = \underline{OO}'$ définit l'excentricité relative du cylindre interne. Quelques considération géométriques et formules trigonométriques dans le triangle $OO'M'$ permettent d'écrire la hauteur du film comme :

$$\begin{aligned}h &= OM - OM' \\&= R + C - R\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R}\sin(\phi - \theta)\right)^2} - e\cos(\phi - \theta) \\&\simeq C - e\cos(\phi - \theta) \\&\simeq C - e(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) \\&\simeq C - X_e\cos\theta - Y_e\sin\theta\end{aligned}\quad (67)$$

et ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \theta} &= -e\sin(\phi - \theta) \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -\dot{e}\cos(\phi - \theta) + e\dot{\phi}\sin(\phi - \theta) = -\dot{e}\cos(\phi - \theta) - \dot{\phi}\frac{\partial h}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (68)$$

On ré-écrit l'équation de Reynolds en coordonnées cylindriques en supposant la masse volumique constante et utilisant le fait que $V_{10} = V_{20} = V_{30} = V_{3h} = 0$:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial Z}\right) = -6V_{1h}\frac{1}{R}\frac{\partial h}{\partial \theta} + 6h\frac{1}{R}\frac{\partial V_{1h}}{\partial \theta} + 12V_{2h}\quad (69)$$

Avec $V_{1h} = R\Omega\cos\alpha \simeq R\Omega$ et $V_{2h} = R\Omega\sin\alpha + \frac{\partial h}{\partial t} \simeq R\Omega\frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t}$, on obtient in fine :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial Z}\right) &= 6\Omega\frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\frac{\partial h}{\partial t} \\ &= -6e(\Omega - 2\dot{\phi})\sin(\phi - \theta) - 12\dot{e}\cos(\phi - \theta) \\ &= 6\Omega(X_e\sin\theta - Y_e\cos\theta) - 12(\dot{X}_e\cos\theta + \dot{Y}_e\sin\theta)\end{aligned}\quad (70)$$

On retrouve l'équation 6.1 et 6.2 de [29] (qu'on peut aussi trouver dans le rapport [27]) aux changements de variable près : $\theta_{Frene} = \pi + \theta - \phi$ et $\theta^*_{Frene} = \pi + \theta$.

Le second membre de l'équation 70 fait apparaître trois termes correspondant aux trois mouvements élémentaires :

- terme en Ω : mouvement de rotation de l'arbre sur lui-même,
- terme en $\dot{\phi}$: mouvement de rotation du centre de l'arbre.
- terme en \dot{e} : mouvement de translation de l'arbre,

	Note Technique DEN	Page 68/68
	Réf : SEMT/DYN/NT/15-012	
	Date : 01/09/2015	Indice : A
Intégration temporelle directe des réponses transitoires des machines tournantes dans Cast3M		

D.3 Approximation de type "palier court"

On néglige le gradient de pression circonférentiel dans (70) et on intègre selon Z pour obtenir :

$$p(Z, \theta) = \left(1 - \left(\frac{Z}{L/2}\right)^2\right) \underbrace{\frac{L^2 3\mu}{4 h^3} ((\Omega - 2\dot{\phi})e \sin(\phi - \theta) + 2\dot{e} \cos(\phi - \theta))}_{p(0, \theta)} \quad (71)$$

Cette équation correspond à celle donnée par Frene [29, §6.3].

Remarque : au vu des identités précédemment établies, il est possible d'utiliser une expression de $p(0, \theta)$ différente en utilisant l'égalité suivante : $(\Omega - 2\dot{\phi})e \sin(\phi - \theta) + 2\dot{e} \cos(\phi - \theta) = -\Omega (X_e \sin \theta - Y_e \cos \theta) + 2(\dot{X}_e \cos \theta + \dot{Y}_e \sin \theta)$

Enfin, les efforts résultants peuvent être déduits des pressions par intégration sur Z (analytique) et θ (numérique) :

$$F_X = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \{p(\theta, Z)\}^+ R \cos \theta d\theta dZ = -\frac{2L}{3} R \int_{-\pi}^{\pi} \{p(0, \theta)\}^+ \cos \theta d\theta \quad (72)$$

$$F_Y = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \{p(\theta, Z)\}^+ R \sin \theta d\theta dZ = -\frac{2L}{3} R \int_{-\pi}^{\pi} \{p(0, \theta)\}^+ \sin \theta d\theta$$

On présente ici le calcul des efforts avec l'hypothèse de cavitation de Gumbel, c'est à dire en supposant que $p \geq 0$, et donc en n'intégrant que la partie positive de la pression $\{p\}^+ = \frac{1}{2}(|p| + p)$.

Remarque : On ne traite pas ici l'approximation de type "palier long", car l'expression analytique de la pression est plus difficile à établir.

B.3 Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise

		
	NOTE TECHNIQUE DEN	Page 1/46

Direction de l'Energie Nucléaire
 Direction des Activités Nucléaires de Saclay
 Département de Modélisation des Systèmes et Structures
 Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques

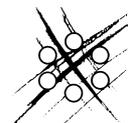
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise

Benoit PRABEL

DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/2019-65358/A

Document émis dans le cadre de l'accord tripartite CEA-EDF-AREVA Institut 2017-F27166

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
 Centre de Saclay - SEMT/DYN - Bâtiment 607 - Point Courrier 116
 91191 Gif sur Yvette Cedex - FRANCE
 Tél. : +33 (0)1 69 08 23 60 - Mél. : dominique.heil@cea.fr
 Établissement public à caractère industriel et commercial
 RCS PARIS B 775 685 019



Réf du formulaire : F1-DM2S/DIR/PR/003 classe L^AT_EX docDM2S version C

Document émis par le CEA dans le cadre de l'accord tripartite CEA-EDF-AREVA Institut 2017-F27166 - Reproduction et diffusion soumises aux termes de l'accord

	Note Technique DEN	Page 2/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

NIVEAU DE CONFIDENTIALITÉ				
DO	DR	CCEA	CD	SD
X				

PARTENAIRES/CLIENTS	ACCORD	TYPE D'ACTION
FRAMATOME	tripartite CEA-EDF-AREVA Institut 2017-F27166	20-00-80

RÉFÉRENCES INTERNES CEA			
DIRECTION D'OBJECTIFS	DOMAINE	PROJET	EOTP
DISN	GEN2&3	SIMEX	A-PERFO-03-01-08
JALON	INTITULÉ DU JALON	DÉLAI CONTRACTUEL DE CONFIDENTIALITÉ	CAHIERS DE LABORATOIRE

SUIVI DES VERSIONS			
INDICE	DATE	NATURE DE L'ÉVOLUTION	PAGES ET CHAPITRES MODIFIÉS
A	13/09/2019	Document initial	

	NOM	FONCTION	VISA	DATE
RÉDACTEUR	Benoit PRABEL	Ingénieur-chercheur		
VÉRIFICATEUR	Philippe PITEAU	Ingénieur-chercheur		
APPROBATEUR	Claire GAUTHIER	Chef de Laboratoire		
AUTRE VISA				
ÉMETTEUR	Valérie VANDENBERGHE	Chef de Service		

		Note Technique DEN	Page 3/46
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
		Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise			

MOTS CLEFS

Cast3M, Gerboise, vibrations, tubes de generateur de vapeur, frottement, pré-chargement.

RÉSUMÉ/CONCLUSIONS

Gerboise est l'outil de référence du CEA et de FRAMATOME pour l'analyse vibratoire des tubes de Générateur de Vapeur. En 2018, FRAMATOME a sollicité le CEA pour expertiser les calculs de cintres de GV lorsque ceux-ci sont soumis à de fortes pré-contraintes initiales.

Dans cette note, on rappelle dans un premier temps les éléments de modélisation des contacts frottants utilisés par l'opérateur DYNE de Cast3M et basés sur le modèle d'Antunes.

Ensuite, trois exemples de complexité croissante sont utilisés pour illustrer que :

- en présence de contacts frottants, une pré-charge initiale statique ne conduit pas à une solution unique, mais les régimes dynamiques dépendent de l'histoire du système,
- pour un chargement donné, les algorithmes utilisés dans DYNE et Gerboise convergent vers une solution stable à condition d'utiliser un pas de temps suffisamment petit,
- cette convergence permet d'avoir confiance dans les grandeurs mécaniques déduites (en particulier la puissance d'usure) pour la configuration calculée, mais la variabilité des résultats peut aussi être physique (existence de plusieurs régimes par exemple) et liée au système (non-linéaire, aléatoire, ...).

La sensibilité des résultats aux paramètres numériques est expliquée et de nouvelles recommandations (concernant la raideur, l'amortissement tangentiels de contact et le pas de temps) sont données. Pour ces cas sensibles, une étude de convergence reste recommandée.

	Note Technique DEN	Page 4/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

DIFFUSION INITIALE

(Diffusion par email)

Diffusion interne CEA

B. Prabel	Auteur	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
P. Piteau	Vérificateur	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
X. Delaune		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
J. Cardolaccia		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
P. Bouda		DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
M. Breuzé		DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S
C. Gauthier	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN
V. Vandenberghe	Chef de Service	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
Y. Kayser	Adjoint du Chef de Service	DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
C. Santucci	Chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
D. Caruge	Adjoint du Chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
J.L. Fayard	Chef de projet SIMEX	DEN/DANS/DM2S/DIR
P. Dumaz	Chef de programme GEN2&3	DEN/DISN/GEN2&3
T. Forgeron	Adjoint au chef de programme	DEN/DISN/GEN2&3
A. Li Puma	Ingénieur Programme	DEN/DPIE/SA2P
V. L'Hostis	Chef de projet COLMA	DEN/DANS/DPCC/DIR
S. Naury	Chef de projet SITHY	DEN/DANS/DM2S/DIR
D. Schneider	Chef de Laboratoire	DEN/DANS/DM2S/STMF/LMEC

Diffusion externe

S. Ochandiano	Framatome
M. Bernion	Framatome
A. Nicoli	Framatome
P. Alvarez	Framatome

Diffusion résumé

DEN/DANS/DM2S/DIR
 DEN/DANS/DM2S/SEMT/DIR
 DEN/DANS/DM2S/SERMA/DIR
 DEN/DANS/DM2S/STMF/DIR
 DEN/DANS/DM2S/SEMT/Chefs de Laboratoire

	Note Technique DEN	Page 5/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

SOMMAIRE

Sommaire	5
1 Introduction	6
2 Modélisation des contacts frottants	7
2.1 Position du problème	7
2.2 Loi adoptée pour les efforts normaux	7
2.3 Loi adoptée pour les efforts tangentiels de frottement	8
2.4 Aspects numériques	9
2.5 Effet du pré-chargement	10
3 Système à 2 degrés de liberté	12
3.1 Définition du problème	12
3.2 Solutions statiques	12
3.3 Solutions dynamiques	14
3.4 Solutions dynamiques suivant un équilibre statique	14
3.5 Conclusion	14
4 Hassan and Rogers' example	18
4.1 Problem description	18
4.2 Numerics	19
4.3 Convergence with the timestep	20
4.4 Convergence of the Oden model	23
4.5 Comparison of time evolutions with published results of Hassan and Rogers [1]	27
5 Simulation avec Gerboise d'un tube de générateur de vapeur pré-contraint	30
5.1 Problème considéré	30
5.2 Analyses linéaires	33
5.3 Analyses non-linéaires	33
5.3.1 Chargement par la turbulence	33
5.3.2 Paramètres numériques de simulation	34
5.3.3 Préchargement de la BAV 12 ⁺	34
5.3.4 Préchargement de l'étrier anti-envol 12	42
6 Conclusions et perspectives	45
Références	46

		Note Technique DEN	Page 6/46
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
		Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise			

1 Introduction

Gerboise est l'outil-métier sur base Cast3M [2] utilisé par Framatome pour l'étude des vibrations des tubes de Générateur de Vapeur (GV) sous écoulement fluide. Dans le contexte industriel, une bonne maîtrise des phénomènes de vibro-impact des tubes de GV est nécessaire pour assurer la durée de vie de ces composants critiques.

Dans sa partie non-linéaire, Gerboise s'appuie sur des méthodes d'intégration temporelle sur base modale établies de longue date [3, 4] et codées dans l'opérateur DYNE de Cast3M.

Certaines études applicatives récentes menées à Framatome ont montré que dans certaines situations, les paramètres numériques choisis pour modéliser le contact frottant, bien que tenant compte des recommandations "historiques", influençaient notablement les résultats obtenus. Il s'agit notamment du choix des paramètres de l'oscillateur d'adhérence et du pas de temps lorsque l'on considère des cas avec une forte pré-contrainte initiale entre les tubes et leurs appuis. Ce type de situations où les jeux nominalemt ouverts se referment et introduisent des pré-charges peut être rencontré en présence de défauts de fabrication ou d'assemblage, de gradients thermiques ou de déformations en service non prévus lors de la conception.

Cette note vise à synthétiser les analyses réalisées au CEA depuis que ces observations lui ont été rapportées et à en dégager de nouvelles recommandations d'utilisation de l'outil Gerboise.

En particulier, les aspects relatifs à la modélisation du contact frottant sont rappelés dans la partie 2. Puis, trois exemples de complexité croissante constituent les parties suivantes de la note et permettent d'aboutir aux conclusions données finalement.

	Note Technique DEN	Page 7/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

2 Modélisation des contacts frottants

2.1 Position du problème

Le choix de modélisation de Gerboise est d'utiliser la base modale du tube de GV dont les dimensions sont de l'ordre de plusieurs mètres (rayon des grands cintres $\simeq 1.5$ m).

Il ne s'agit donc pas ici de décrire finement les contacts dont les dimensions sont inférieures au mm avec des modèles sophistiqués, mais de rendre compte des principaux phénomènes vus depuis l'échelle de la structure et permettant de restituer la dynamique du système, ainsi que d'évaluer l'usure des composants.

Au point de contact, on utilise l'indice n pour les grandeurs normales et t pour les grandeurs tangentielles.

2.2 Loi adoptée pour les efforts normaux

De manière générale, en mécanique, l'effort normal F_n est celui qui permet de vérifier la non-pénétration d'un solide à travers une surface tel que représenté figure 1 où l'on a adopté le choix de la normale vers l'intérieur du plan limitant le déplacement.

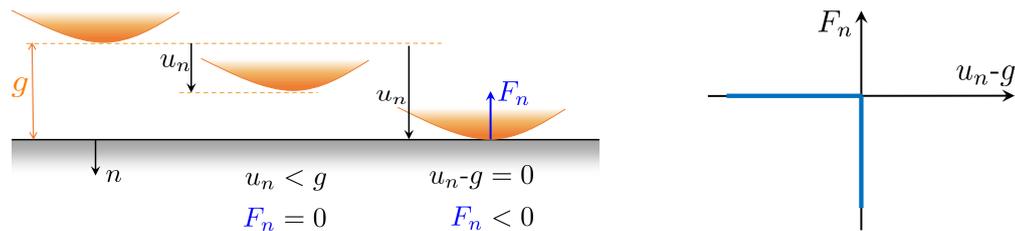


Figure 1 – Conditions de contact "parfaites"

Ces conditions unilatérales de contact, aussi appelées conditions de Signorini, s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_n &\leq 0 \\ u_n - g &\leq 0 \\ F_n \cdot (u_n - g) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Ces conditions de contact "idéales" sont celles utilisées par les méthodes utilisant des multiplicateurs de Lagrange pour traiter les contacts (comme le solveur implicite PASAPAS de Cast3M ou le code explicite Europlexus). Elles ne sont pas "naturelles" dans le cadre explicite pur où les forces non-linéaires sont le plus souvent déduites du déplacement courant et nécessitent un traitement particulier. De plus, cette modélisation nécessite généralement une description spatiale plus fine du contact, ce qui n'est pas cohérent avec notre discrétisation modale où chaque contact est localisé en un seul point.

Ainsi, dans l'opérateur DYNE de Cast3M (et donc dans Gerboise), on utilise une loi régularisée du contact formulée par l'équation (2), où la pénétration est pénalisée par une raideur de choc K_n . Cette raideur peut être identifiée comme la raideur négligée dans le modèle éléments finis. Ici, il s'agit des modes négligés (notamment l'ovalisation) et de la souplesse des appuis non modélisés.

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n - g \leq 0 \\ -K_n(u_n - g) & \text{si } u_n - g > 0 \end{cases} \quad (2)$$

D'autres modèles (comme celui de Hertz par exemple) n'observent pas une loi linéaire entre les efforts normaux et l'enfoncement.

	Note Technique DEN	Page 8/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

2.3 Loi adoptée pour les efforts tangentiels de frottement

Une modélisation correcte des effets liés au frottement est une affaire délicate car de nombreux phénomènes physiques y participent : thermique, chimie, déformation non-linéaire, tribologie, etc. Pour Berger [5] les ingrédients suivants peuvent intervenir dans le modèle :

- dépendance à la vitesse,
- effet de mémoire, de retard ou longueur critique de glissement,
- possible multiplicité du frottement à vitesse nulle,
- seuil de glissement,
- etc.

Marques *et al.* [6] ou Pennestri *et al.* [7] donnent une revue assez exhaustive des modèles de frottement, dont s'inspire ce paragraphe.

Le modèle le plus simple pour décrire les efforts tangentiels est celui de Coulomb. Il suppose que la force tangentielle ne peut pas dépasser une fraction de l'effort normal. Une représentation graphique est donnée figures 2a et 2b.

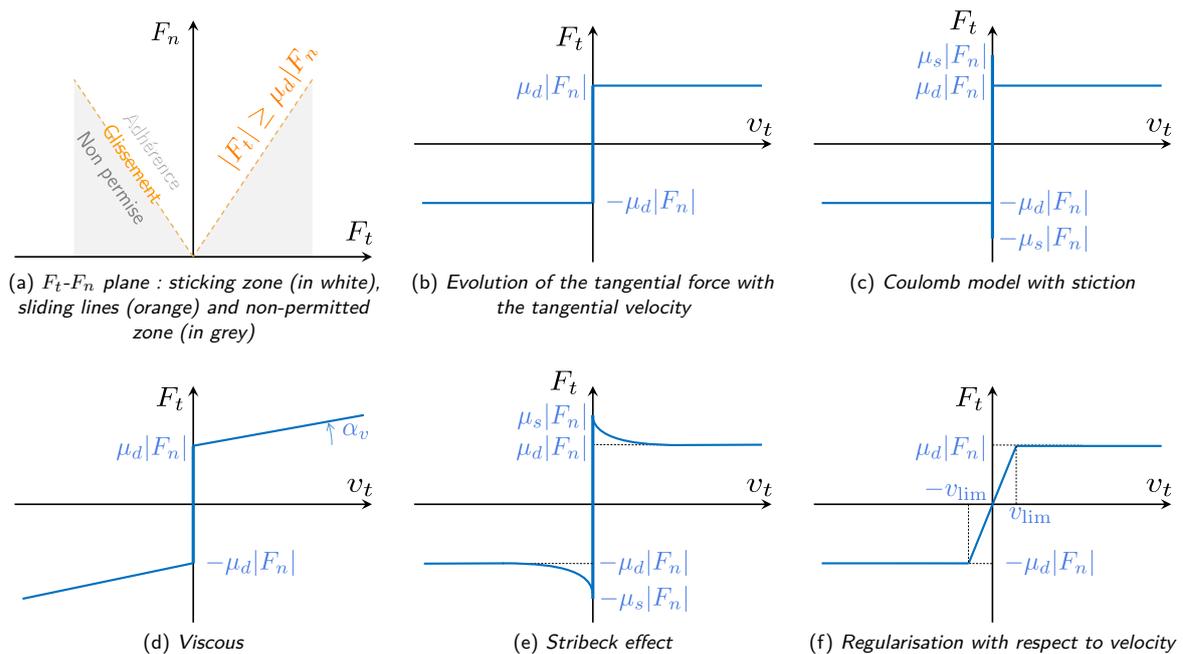


Figure 2 – Coulomb friction models

Les adaptations du modèle de Coulomb sont nombreuses. Principalement, on peut introduire :

- une force limite permettant le passage de l'adhérence statique vers le glissement dynamique. Cet effet dit de *stiction* est souvent introduit par l'utilisation de coefficients de frottement statique et dynamique différents (respectivement μ_s et μ_d). C'est le modèle adopté dans DYNE, représenté figure 2c et résumé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_t = \mu_d |F_n| \frac{v_t}{|v_t|} & \text{if } |v_t| > 0 \text{ (sliding)} \\ |F_t| < \mu_s |F_n| & \text{if } |v_t| = 0 \text{ (sticking)} \end{cases} \quad (3)$$

	Note Technique DEN	Page 9/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

- une dépendance à la vitesse de glissement via :
 - un effet *visqueux* illustré figure 2d,
 - ou une loi de *Stribeck* représentée figure 2e et décrite par l'équation (4) :

$$\mu = \mu_s + (\mu_s - \mu_d) \exp\left(-\left(\frac{v_t}{v_S}\right)^\alpha\right) \quad (4)$$

où v_S est une vitesse caractéristique et α une constante souvent fixée à 1 ou 2.

- une régularisation aux faibles vitesses de manière à éviter l'indétermination de $F_t(v_t = 0)$ en adhérence. La technique la plus simple consiste à supposer une variation linéaire de la force en deçà d'une valeur limite de vitesse tangentielle v_{lim} comme illustré figure 2f.

D'autres modèles de frottement plus complexes existent et pourraient permettre, selon [6], une meilleure description des phénomènes. En particulier, les *modèles de frottement dynamiques* permettent de prendre en compte l'histoire du comportement tangent par l'introduction de nouvelles variables d'état. Cela doit permettre une meilleure représentation du frottement pour des situations plus variées. Evidemment, ces modèles impliquent l'identification de plus de paramètres. Par exemple, le modèle *LuGre* [8, 9] est une extension du modèle de Dahl basé sur la variable d'état z représentant la déflexion moyenne de micro-pics présents sur les surfaces en contact. Il est régi par :

$$\dot{z} = v_t - \sigma_0 \frac{|v_t|}{g(v_t)} z \quad (5a)$$

$$F_t = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(v_t) \quad (5b)$$

$$f(v_t) = \sigma_2 v_t \quad (5c)$$

où est utilisée la fonction prenant en compte l'effet de Stribeck : $g(v_t) = F_d + (F_s - F_d) \exp\left(-\left|\frac{v_t}{v_S}\right|^\alpha\right)$.

On dénombre pour ce modèle les sept paramètres suivants :

Paramètre	Signification	Ordre de grandeur
σ_0	stiffness of the bristle	$3.10^3 - 10^5$ N/m
σ_1	damping of the bristle	$10^2 - 10^3$ Ns/m
σ_2	macro-damping	0-0.4 Ns/m
$F_s = \mu_s F_n$	stiction force	$\mu_s \in [0 - 1]$
$F_d = \mu_d F_n$	Coulomb sliding force	$\mu_d \in [0 - 1]$
v_S	Stribeck velocity	10^{-3} m/s
α	Stribeck coefficient	0.5-2 (souvent 1)

Tableau 1 – Paramètres du modèle LuGre

Si on néglige l'amortissement macro ($\sigma_2 = 0$) et l'effet de Stribeck ($\alpha = 1$, $v_S \rightarrow 0$), il reste seulement quatre paramètres à identifier, soit autant que le modèle d'Antunes (μ_s, μ_d, K_t et C_t) décrit au paragraphe suivant.

2.4 Aspects numériques

Le calcul de la composante normale de l'effort de contact ne pose pas de problème particulier. Par contre, plusieurs méthodes numériques sont possibles pour représenter le modèle de Coulomb. En effet, la composante tangentielle des efforts n'est pas une simple fonction du déplacement.

Ainsi, l'algorithme utilisé par DYNE est basé sur le modèle d'Antunes [10] et décrit par exemple dans la note de De Gayffier [11]. On le reproduit ci-après.

D'abord au pas de temps courant t^i , le déplacement \underline{u}^i est décomposé selon les directions normale et tangentielle :

$$\underline{u}_n^i = \underline{u}^i \cdot \underline{n} \quad (6a)$$

$$\underline{u}_t^i = \underline{u}^i - \underline{u}_n^i \cdot \underline{n} \quad (6b)$$

	Note Technique DEN	Page 10/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

L'effort normal est ensuite évalué :

$$F_n^i = \begin{cases} -K_n \cdot (u_n^i - g) - C_n \cdot \frac{u_n^i - u_n^{i-1/2}}{\Delta t/2} & \text{if } u_n^i - g \geq 0 \\ 0 & \text{if } u_n^i - g < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Finalement, la force tangentielle est obtenue par l'algorithme 1.

Algorithm 1: Calcul de la force tangentielle

if sliding at $t^{i-\frac{1}{2}}$ then

 Compute $P = v_t^i \cdot v_t^{i-\frac{1}{2}}$

 if $P \geq 0$ then

 sliding :

$$\underline{F}_t^i = -\mu_d \cdot |F_n^i| \cdot \frac{v_t}{|v_t|} \quad (8)$$

 return

 else

 go to *sticking*

else

sticking :

$$\underline{F}_t^i = \underline{F}_t^{sl} - K_t \cdot (u_t^i - u_t^{ad}) - C_t \cdot v_t^i \quad (9)$$

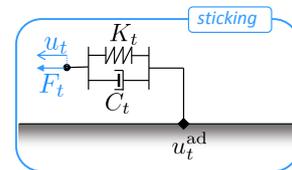
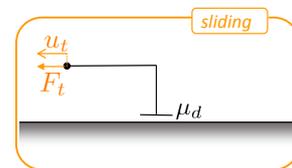
 verification of the sticking hypothesis :

 if $|\underline{F}_t^i| > \mu_s \cdot F_n^i$ then

 go to *sliding*

 else

 return



g est le jeu normal ("gap"), u_t^{ad} est le déplacement depuis le point de début d'adhérence et \underline{F}_t^{sl} est la dernière force calculée pendant une phase de glissement.

En particulier, on remarque que :

- la transition de *sticking* vers *sliding* se produit lorsque la force tangentielle dépasse la limite statique,
- la transition de *sliding* vers *sticking* se produit lorsque la vitesse tangentielle change de direction.

La justification de ces critères est donnée dans [11]. Un point faible de cet algorithme est la non-continuité des forces de frottement pendant la transition de *sticking* vers *sliding*.

2.5 Effet du pré-chargement

Eléments bibliographiques

Il est important de souligner que, dès le papier de Antunes *et al.* [10], l'effet d'une pré-contrainte sur les vibrations et l'usure du tube a été étudiée. Dans ce papier, les auteurs observent que :

- sans pré-charge, la dynamique des tubes met en jeu des impacts et des contacts frottants courts,
- quand la pré-charge est du même ordre de grandeur que les efforts de turbulence ($\simeq 1$ N), le tube reste majoritairement en contact avec son support ("tube is most of the time in contact with the support"),

	Note Technique DEN	Page 11/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

- quand la pré-charge atteint 10 N, les impacts laissent place à un contact permanent avec des phases de glissement et d'adhérence,
- enfin, pour une pré-charge de 50 N, la turbulence est toujours inférieure à la limite d'adhérence et le tube reste bloqué dans sa position, rendant impossible l'usure.

Il est clair que le coefficient de frottement influence grandement la dynamique, et, in fine, l'usure du tube.

A la suite des travaux de Tan et Rogers concernant les vibration en situation de contact permanent, Degayffier et Politopoulos [11] ont étudié en détail le modèle d'Antunes. Ils démontrent notamment que K_t (et donc Δt) doit être adapté au cas traité. Les recommandations formulées dans [10] sur les paramètres numériques à utiliser s'appliquent uniquement au cas d'impacts intermittents.

En 2005, Hassan et Rogers [1] ont de nouveau étudié le cas des vibrations d'un tube avec une force de pré-charge. On se propose de reproduire ce cas à la section 4.

Mise en oeuvre dans DYNE et Gerboise

Pour les liaisons "en base B" (c'est à dire définies sur les ddls éléments finis et pas modaux), le déplacement normal au point de contact \underline{x}_j vaut : $\underline{u}_{n,j} = \Phi(\underline{x}_j) \cdot q$. Pour ce type de liaison, il est possible de fournir à DYNE un jeu négatif. Considérant l'équation (2), il pourrait sembler qu'appliquer un jeu négatif pour la $j^{\text{ème}}$ liaison ($g_j < 0$) avec un déplacement initialement nul $u_{n,j} = 0$ génère en ce point une force normale égale à :

$$F_{n,j} = -K_n \cdot g_j \quad (10)$$

Cependant, il faut insister tout de suite sur le fait que cette valeur de pré-charge est approximative. Elle suppose que :

- la raideur de choc est grande devant celle de la structure : $K_n \gg K$,
- il n'y a qu'une seule liaison active ou que les liaisons actives (pour lesquelles la force n'est pas nulle) sont indépendantes (directions différentes par exemple).

Ces conditions ne sont généralement pas vérifiées pour des structures multi-supportées comme les GV, et l'équilibre mécanique statique pré-chargé est solution du système complet contraint par des relations unilatérales :

$$\begin{aligned}
 Ku &= \sum_j F^{\text{lia},j} \\
 &= \sum_j N(x_j) \cdot (-K_n \{u_{n,j} - g_j\}^+)
 \end{aligned} \quad (11)$$

où le déplacement apparaît à gauche et à droite du signe d'égalité. Il n'y a donc pas de relations simples entre le jeu négatif et la force de pré-charge.

Malgré tout, pour des raisons de simplicité, les pré-charges annoncées dans la suite de la présente note sont celles calculées naïvement par l'équation (10).

	Note Technique DEN	Page 12/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

3 Système à 2 degrés de liberté

On considère dans cette section un système très simple afin de montrer que de multiples solutions sont souvent possibles en présence de frottement. Le lecteur conscient de ce fait est invité à rejoindre directement le paragraphe 4.

3.1 Définition du problème

On considère le système à 2 degrés de liberté représenté figure 3. Les efforts appliqués f_1 et f_2 sont respectivement une charge normale appliquée sur la masse m_1 et un chargement tangentiel excitant m_2 .

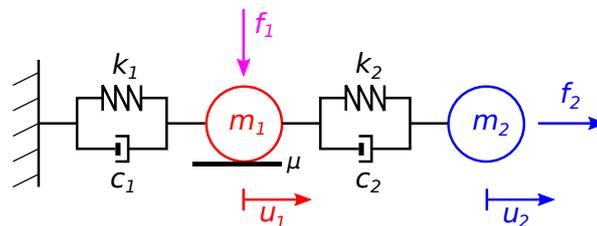


Figure 3 – Schéma du système à 2 ddl

Le système d'équations différentielles associé est donné par (12) :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{fr} \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

où le frottement obéit à la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} \text{If } \dot{u}_1 \neq 0 & \text{(sliding), } f_{fr} = -\mu f_1 \text{ sign}(\dot{u}_1) \\ \text{If } \dot{u}_1 = 0 & \text{(sticking), } |f_{fr}| < \mu |f_1| \end{cases} \quad (13)$$

On définit le chargement par :

$$f_1(t) = F_1 \cdot \varphi_1(t) \quad (14)$$

$$f_2(t) = F_2 \cdot \varphi_2(t) \quad (15)$$

$$(16)$$

Différents cas sont étudiés selon les valeurs et formes de F_1 , F_2 , φ_1 et φ_2 .

Les valeurs numériques sans unité utilisées par défaut ici sont :

m_1	m_2	k_1	k_2	μ	F_1	F_2
1	1	1	1	1	5	1

Tableau 2 – Parameters of the 2-dof system

Un amortissement modal de 5% est retenu pour les 2 modes.

Le schéma explicite de De Vogelaere est utilisé avec un pas de temps de $\Delta t = \frac{200}{2^{13}} \simeq 24.4 \cdot 10^{-3}$. L'algorithme d'Antunes permet de calculer f_{fr} pendant les phases d'adhérence avec les paramètres numériques de l'oscillateur d'adhérence : $K_t = 1000k_1$, $C_t = 2\sqrt{K_t m_1}$.

3.2 Solutions statiques

On utilise ici des fonctions "rampes" pour φ_1 et φ_2 (figure 4). L'amortissement permet d'atteindre une solution statique.

Deux chargements sont considérés :

	Note Technique DEN	Page 13/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

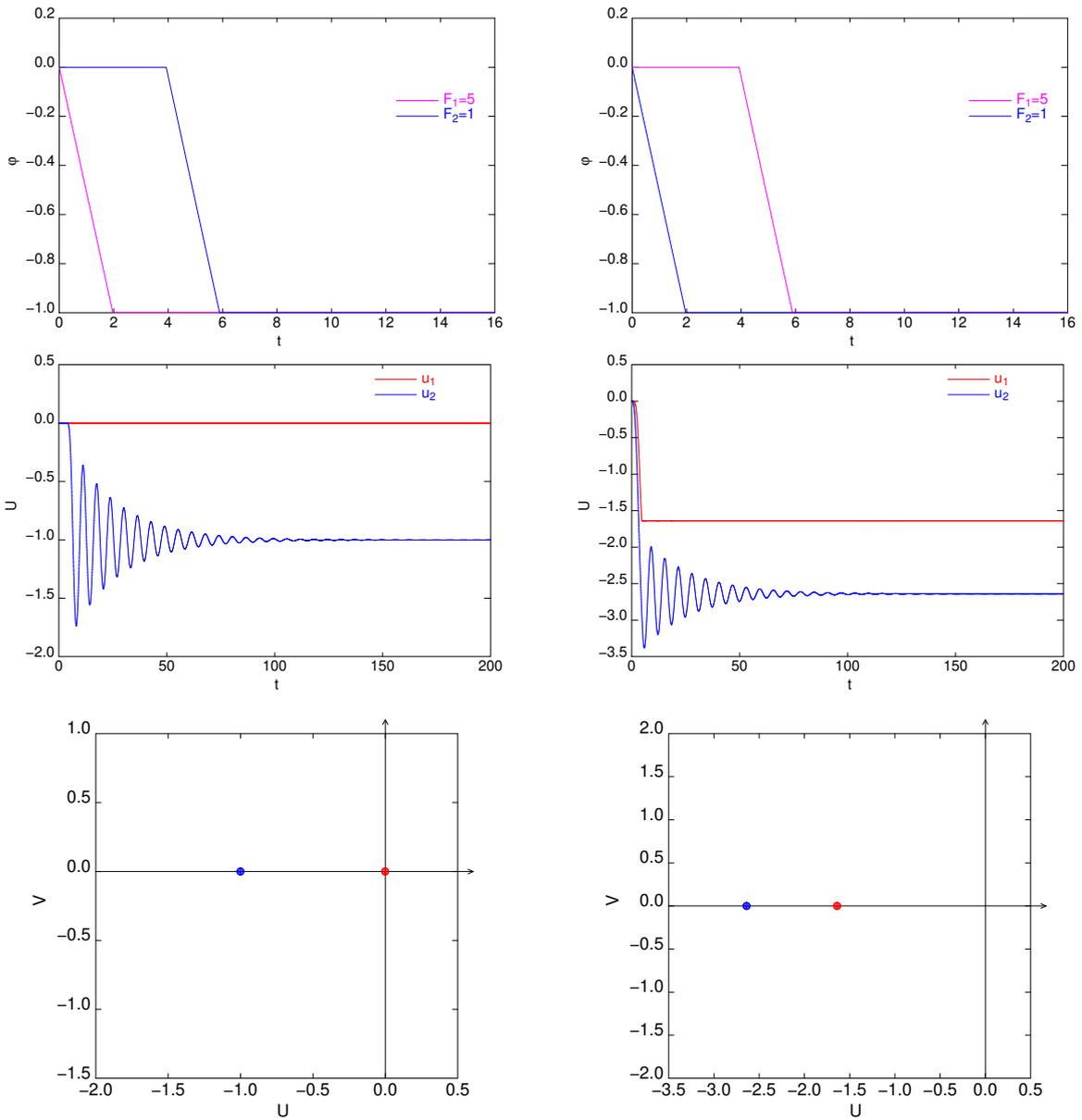


Figure 4 – Solutions statiques du système à 2 ddl (évolutions temporelles des efforts, déplacements et portrait de phase)

		Note Technique DEN	Page 14/46
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
		Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise			

- (a) la masse m_1 est d'abord mise en charge, puis la force sur m_2 est appliquée.
 (b) pour le second cas, les opérations sont inversées.

On trouve deux solutions statiques, car la force normale appliquée sur m_1 "bloque" ce point grace au frottement. Si on avait négligé le frottement, une unique solution statique ($u_1 = -1, u_2 = -2$) aurait été trouvée. La position finales des masses est résumée table 3.

Chargement	(a) $\mu = 1$	(b) $\mu = 1$	(a) $\mu = 0$	(b) $\mu = 0$
Position de m_1	-0.0010	-1.6393	-0.99853	-1.0023
Position de m_2	-1.0009	-2.6393	-1.9976	-2.0037

Tableau 3 – Position finale des masses pour les chargements "statiques"

3.3 Solutions dynamiques

On considère désormais un chargement harmonique sur m_2 tandis que f_1 subit toujours une rampe appliquée plus ou moins tôt et avec un niveau plus ou moins élevé.

Pour les cas (c) et (d) dont les résultats sont donnés figure 5, l'amplitude est maintenue à $F_1 = 5$. Pour ces configurations, m_1 trouve un équilibre statique alors que m_2 suit un mouvement périodique. Un décalage sur la position moyenne est observé entre (c) et (d) dû au moment d'application de la force f_1 . Cela pourrait avoir des conséquences importantes sur la structure. On peut en effet imaginer que la masse m_2 vienne impacter ou non un autre plan changeant radicalement la dynamique et l'usure du système.

Pour les cas (e) et (f) dont les résultats sont donnés figure 6, les mêmes évolutions temporelles que pour le cas (c) sont utilisées, mais à des amplitudes différentes. F_1 passe de 5 à 2 pour (e) et à 1 pour (f). Pour la plus faible valeur, la masse m_1 converge vers une solution périodique. La vitesse relative de m_2 montre que (c) et (d) sont des cas d'adhérence, et que (e) possède des phases d'adhérence et de glissement ("stick & slip"). Enfin, (f) est toujours en glissement.

3.4 Solutions dynamiques suivant un équilibre statique

Afin de minimiser l'effet de la pré-charge, on peut être tenté de calculer d'abord un état d'équilibre statique unique (donc sans frottement) avant de "lancer" le calcul dynamique. Les cas (g), (h) et (i) dont les résultats sont donnés figure 7, suivent cette approche.

Utilisant comme point de départ l'équilibre statique des cas (a) ou (b) avec $\mu = 0$, le frottement est ensuite inclus sur la masse 1 et trois cas de chargements dynamiques sont considérés :

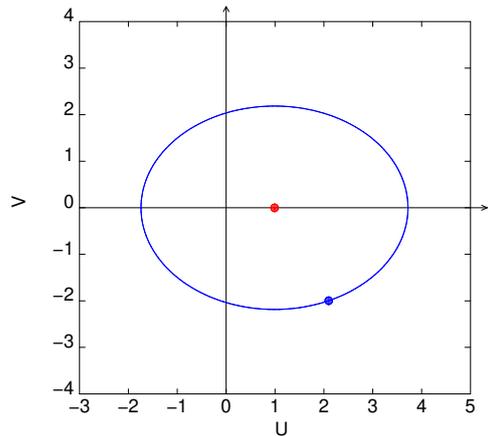
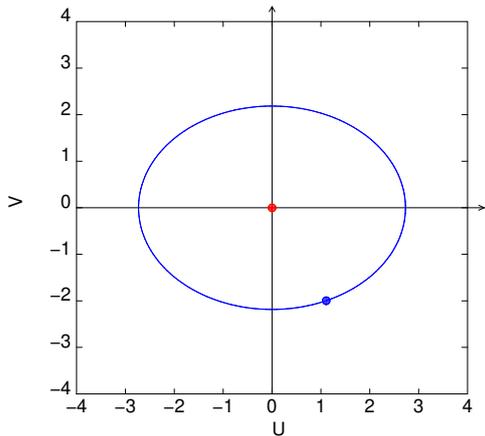
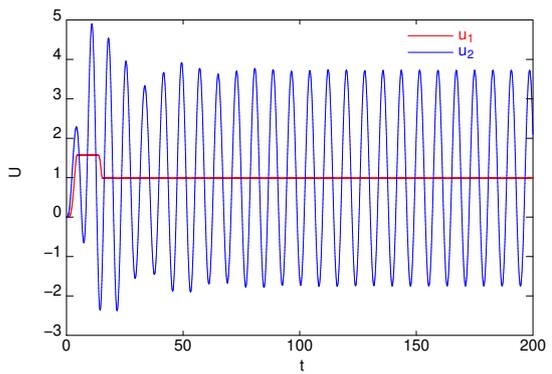
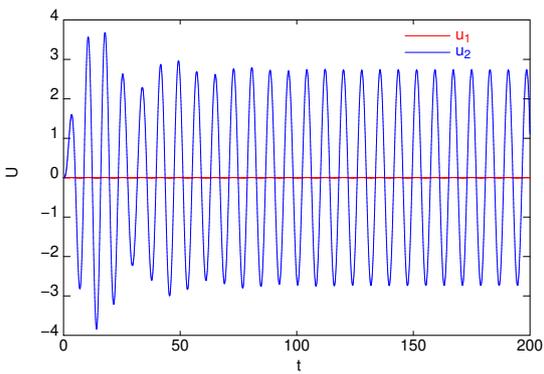
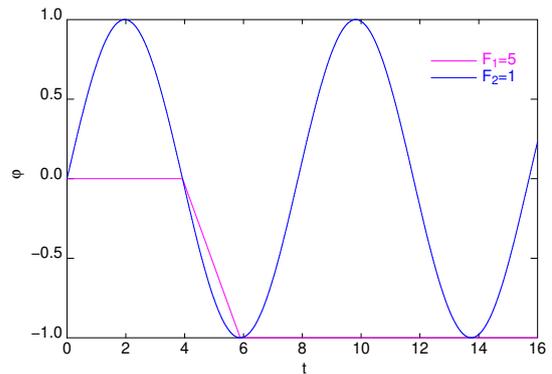
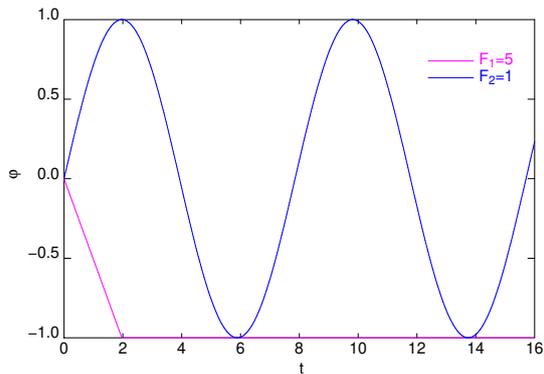
- (g) un chargement harmonique sur la masse 2 pour le cas (g),
 (h) une excitation aléatoire pour le cas (h),
 (i) la même excitation aléatoire mais avec une pré-charge plus faible ($F_1 = 2$ au lieu de of 5) pour le cas (i).

Figure 7a, le chargement harmonique est appliqué progressivement et la position statique de m_1 reste ainsi inchangée. Au contraire, la figure 7b montre des phases de glissement de m_1 . Diminuer la pré-charge augmente le nombre de glissements observés (figure 7c).

3.5 Conclusion

Cet oscillateur à 2 ddl montre que la pré-charge a un effet notable sur les solutions (statiques et dynamiques) pouvant être observées. Même pour les simulations utilisant comme conditions initiales un équilibre statique, l'aspect aléatoire de l'excitation (ou du système) peut changer brusquement le régime observé. Ainsi, prédire la dynamique des systèmes exhibant un frottement important est difficile, car celle-ci dépend fortement de l'histoire du système et de ses aléas. Dans ce contexte, les approximations inhérentes aux méthodes numériques employées sont également des sources d'aléas qu'il convient de réduire à un ordre de grandeur inférieur à celui des aléas physiques.

	Note Technique DEN	Page 15/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

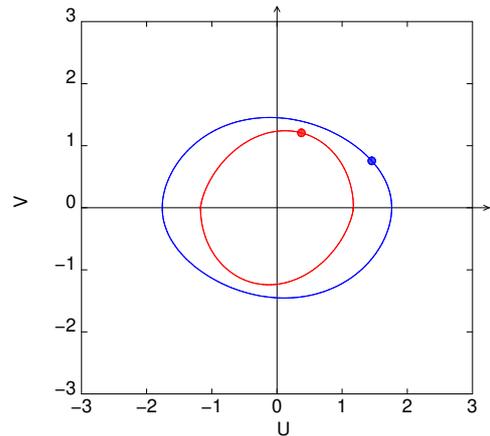
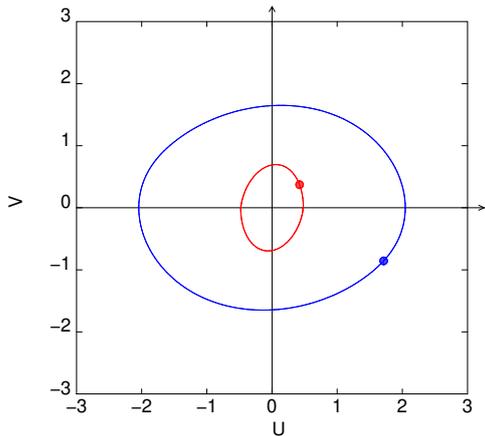
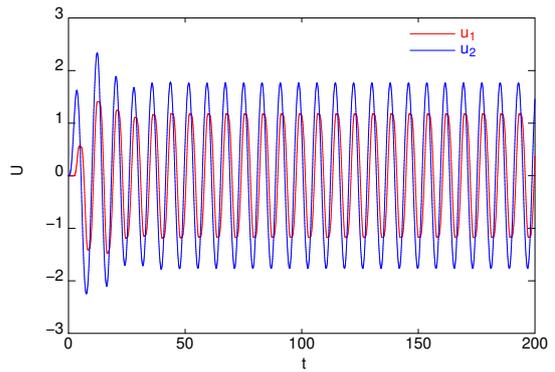
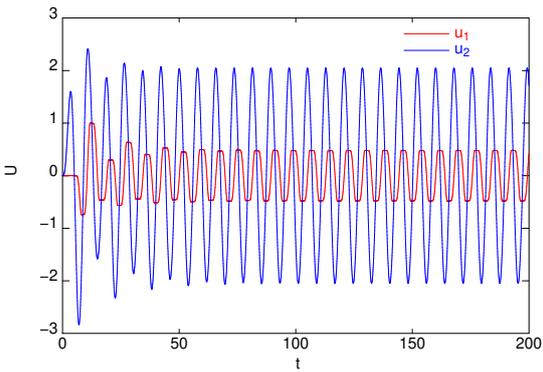
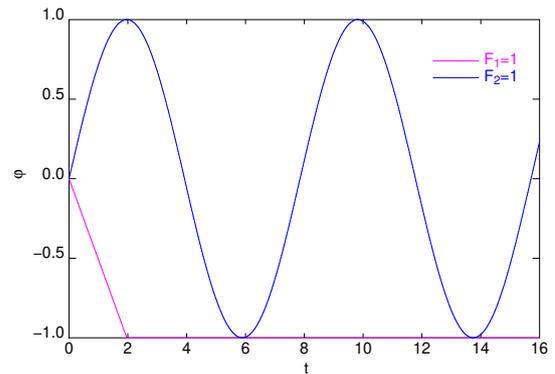
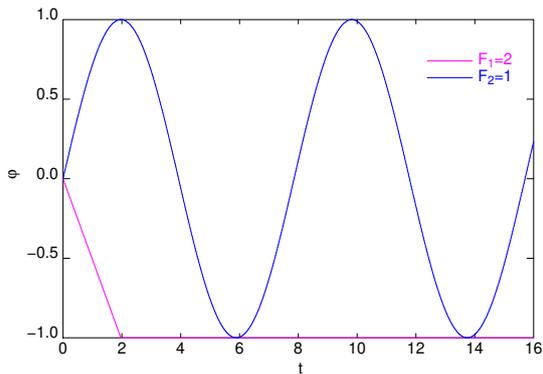


Cas (c) : première solution dynamique (sticking)

Cas (d) : seconde solution dynamique (sticking)

Figure 5 – Solutions dynamiques du système à 2 ddl (évolutions temporelles des efforts, déplacements et portrait de phase)

	Note Technique DEN	Page 16/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

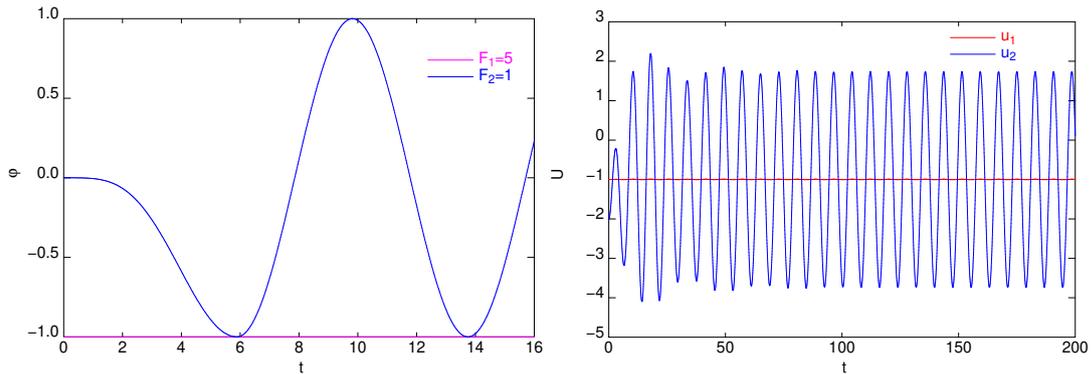


Cas (e) : troisième solution dynamique (stick & slip)

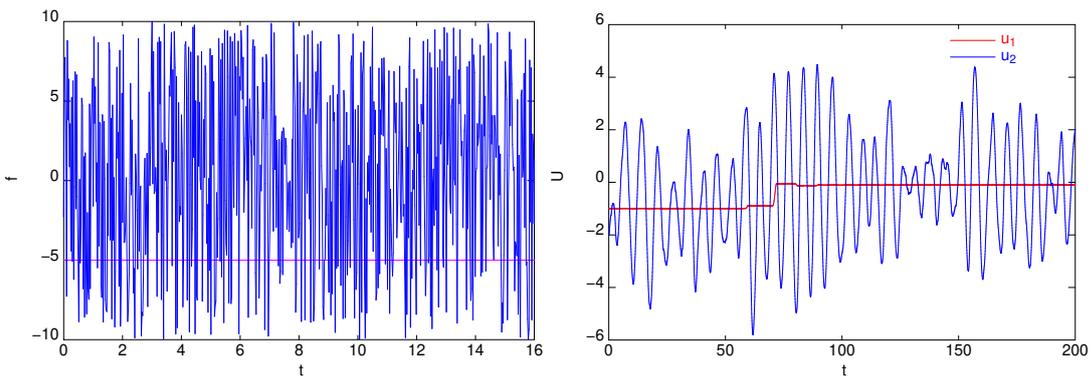
Cas (f) : quatrième solution dynamique (sliding)

Figure 6 – Solutions dynamiques du système à 2 ddl (évolutions temporelles des efforts, déplacements et portrait de phase)

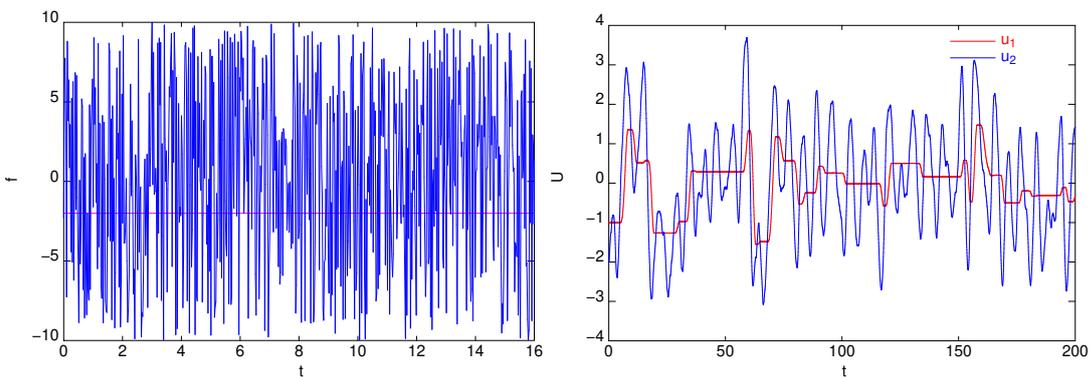
	Note Technique DEN	Page 17/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		



Cas (g) : solution à un chargement harmonique



Cas (h) : solution à une excitation aléatoire



Cas (i) : solution à une excitation aléatoire et une pré-charge plus faible

Figure 7 – Solutions dynamiques du système à 2 dds (évolutions temporelles des efforts et des déplacements)

	Note Technique DEN	Page 18/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

4 Hassan and Rogers' example

4.1 Problem description

Following the experimental work of Yetisir and Fisher [12], Hassan and Rogers considered in [1] the case of a fuel element preloaded at mid-point (see figure 8 and table 4).

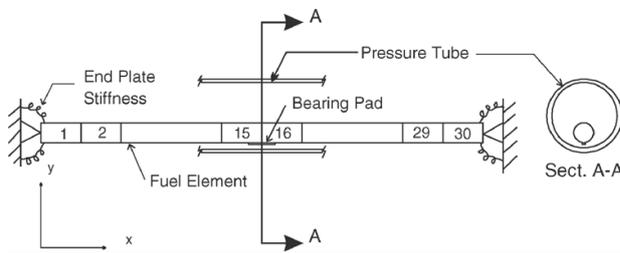


Figure 8 – Scheme of the fuel element (from [1])

Geometric properties	
Length	$L = 495 \text{ mm}$
Outside diameter of fuel element	$d_o = 13.1 \text{ mm}$
Inside diameter of fuel element	$d_i = 12.2 \text{ mm}$
Inside radius of pressure tube	$r_p = 51.5 \text{ mm}$
Contact properties	
Contact stiffness	$k_{\text{contact}} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$
Contact damping coefficient	$\gamma = 0.3 \text{ s/m}$
Kinetic friction coefficient	$\mu = 0.5$
Material properties	
Modulus of elasticity at 265 °C	$E = 80.0 \text{ GPa}$
Poisson's ratio at 265 °C	$\nu = 0.35$
Density of tube material	$\rho_{\text{tube}} = 6500 \text{ kg/m}^3$
Density of internal material	$\rho_i = 10500 \text{ kg/m}^3$
Density of surrounding fluid	$\rho_f = 775 \text{ kg/m}^3$
Modulus damping ratio	$\zeta = 3.0\%$
End rotational stiffnesses	$k_{\text{rot}} = 40 \text{ N m/rad}$

Tableau 4 – Numerical data of the fuel element (from [1])

Considering different values of gap between the tube and the bearing pad, the effect of preload on the response and on the work rate responsible for wear was evaluated for different modellings. Three friction models were compared :

- a) a velocity-limited friction model proposed by Oden in 1985 [13] for which :

$$|F_t| = \begin{cases} \mu_d F_n & \text{if } |v_t| > v_{\text{lim}} \text{ (sliding)} \\ \frac{|v_t|}{v_{\text{lim}}} \mu_d F_n & \text{if } |v_t| \leq v_{\text{lim}} \text{ (sticking)} \end{cases} \quad (17)$$

- b) a force-balance friction model given by Karnopp in 1985 [14] for which :

$$|F_t| = \begin{cases} \mu_d F_n & \text{if } |v_t| > v_{\text{lim}} \text{ (sliding)} \\ F_{\text{stick}} \text{ so that } v_t = 0 & \text{if } |v_t| \leq v_{\text{lim}} \text{ (sticking)} \end{cases} \quad (18)$$

- c) the spring-damper friction model of Antunes *et al.* [10] for which :

$$|F_t| = \begin{cases} \mu_d F_n & \text{if sliding} \\ K_f \delta u_t + C_f v_t & \text{if sticking} \end{cases} \quad (19)$$

All these three methods aim at integrating the *static Coulomb model of friction* as described at § 2.3. For the two last models, sticking holds if $|F_t| < \mu_s F_n$, where μ_s is the static coefficient of friction, greater or equal to the dynamic one μ_d (stiction effect).

The authors showed that preload changes the response, because tangential displacement exhibiting long period of sticking. Hassan and Rogers also find that an iterative correction procedure is necessary to avoid numerical chattering of the sliding velocity and then correctly predict the sticking force. This conclusion is justified by the convergence curves reproduced on figure 9 where the model with iterative procedure are named "-C" for Closed-loop.

	Note Technique DEN	Page 19/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

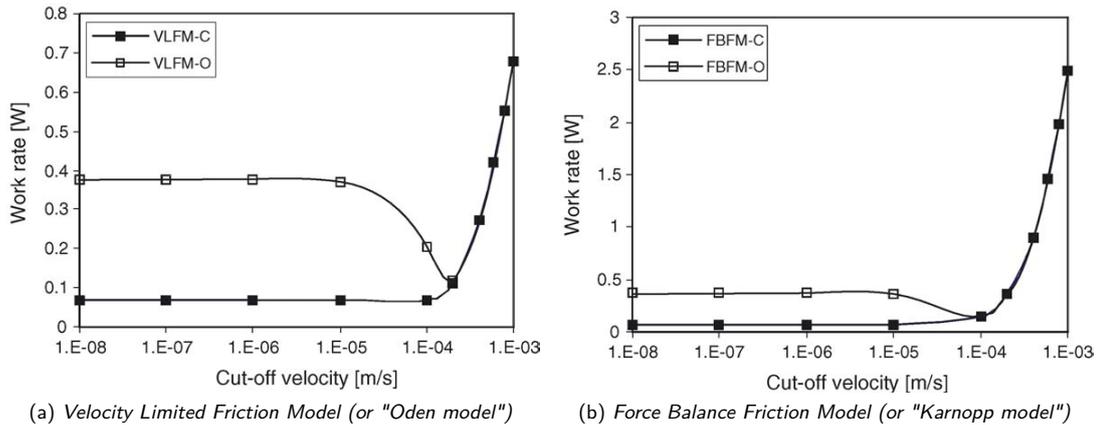


Figure 9 – Comparison of the work rate for open-loop (-O) and closed-loop (-C) algorithms [1]

4.2 Numerics

To benchmark this problem in Cast3M and establish the convergence curve for the Antunes algorithm, the following numerical model is considered. 32 Euler-Bernoulli beam finite elements are used. The frequencies of the first 2×15 modes found in the y and z directions are given table 5 and compared to the one given by Yetisir and Fisher [12].

Mode	Frequency (Hz)		
	32 elements	960 elements	[12]
1	32.03	32.03	31.98
2	117.63	117.63	116.8
3	259.55	259.54	255.8
4	457.21	457.20	445.2
5	709.72	709.69	681.9
6	1015.95	1015.87	959.1
7	1374.55	1374.33	1274
8	1784.00	1783.53	1617
9	2242.63	2241.70	1687
10	2748.67	2746.95	2373
11	3300.28	3297.27	2775
12	3895.56	3890.56	3181
13	4532.61	4524.66	3596
14	5209.54	5197.37	4004
15	5924.52	5906.47	4413

Tableau 5 – Frequencies of the first eigenmodes of the unconstrained system

Differences are probably due to a modelling of the tube different from the one adopted by [12].

Following [1], the loading is applied at the point located at $x/L = 0.25$. For each transverse direction y and z , a white noise is generated and filtered with a third-ordered Butterworth filter at a cut-off frequency of 70 Hz. The amplitude of the loading is calibrated so that the RMS value of the unconstrained system reach 0.1 mm.

Then time-integration on modal basis is performed with a fourth-order De Vogelaere algorithm.

The possible contact is considered at the mid-point of the tube and the Antunes model of friction is adopted with the numerical parameters :

$$\frac{K_t}{K_n} = \{10, 40, 1000, 4000, 100000\} \quad C_t = 2\sqrt{K_t M} \quad (20)$$

The timestep is chosen less than the critical timestep evaluated from the linear system ($\Delta t \leq \Delta t_c \simeq 76 \mu\text{s}$) and is a

	Note Technique DEN	Page 20/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

given parameter for all simulations hereafter. A value about $\frac{\Delta t_c}{10}$ is recommended in [15]. When Δt is very small, it has been found that the results of the computation can be stored at a lower frequency, typically every $\Delta t^{\text{save}} \simeq 10 \mu\text{s}$, to get a sufficient accuracy and to save memory usage. Convergence with the timestep is studied in § 4.3. Finally, the damping in the normal direction is here considered linear, unlike [1], and it has been verified that this doesn't change the results obtained.

4.3 Convergence with the timestep

To get sufficiently solid statistics, a physical time about 10 s is simulated. For practical reason, this duration vary slightly with value of Δt (see. table 6).

Δt (μs)	70	30	20	60	3	1	0.6	0.3	0.07
T_{final} (s)	9.1750	7.8643	10.486	12.583	12.583	8.3886	10.066	10.066	9.3952

Tableau 6 – Physical duration of simulations for timestep used

For the preloaded cases (1 N and 3.5 N), the mean wear work rate (computed for the last 62% of the simulation to avoid transient effect) is plotted versus the parameter Δt on figure 10 for various values of $\frac{K_t}{K_n}$.

This demonstrates that converged value of wear work rate can always be achieved when considering a sufficiently small Δt . However the highest $\frac{K_t}{K_n}$ is, the smallest Δt must be. Crucial question is how to choose Δt . On figure 10b $\Delta t_c^{\text{nl}}/10$ has been plotted where Δt_c^{nl} results from the tentative equation of critical timestep for contact phases :

$$\Delta t_c^{\text{nl}} = \frac{2\sqrt{2}}{\max_j\{\omega_j^{\text{nl}}\}} \quad \text{with } \omega_j^{\text{nl}} = \sqrt{\frac{\phi_j^T (K + K^{\text{nl}}) \phi_j}{\phi_j^T M \phi_j}} = \sqrt{w_j^2 + \frac{\phi_j^T K^{\text{nl}} \phi_j}{m_j}} \quad (21)$$

Equation (21) neglects the reduction of the critical timestep due to viscosity, but for this example and a preload of 3.5 N, it seems to be a good first choice for computation. Obviously, it is difficult to generalize and it is still recommended to do a convergence analysis.

Time evolutions of the tangential displacement and sliding velocity for some parameters ($\frac{K_t}{K_n}, \Delta t$) are given on figure 11.

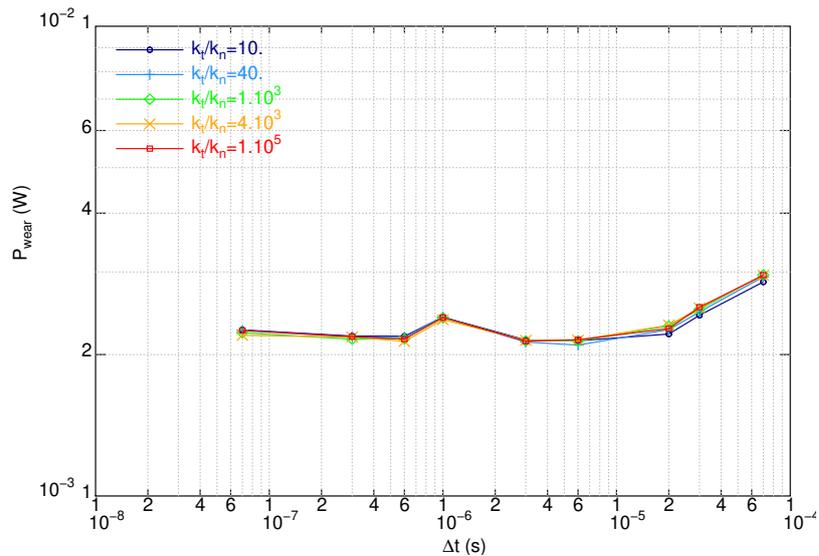
Figure 11 shows that increasing K_t enables to reduce chattering of the tangential displacement, but a smaller timestep is also needed. Increasing K_t alone leads to bad results.

Then it demonstrates that, when quasi-permanent contact occurs, a tangential stiffness larger than the one initially recommended by Antunes *et al.* [10] for short impacts problem is needed. This also implies a smaller timestep.

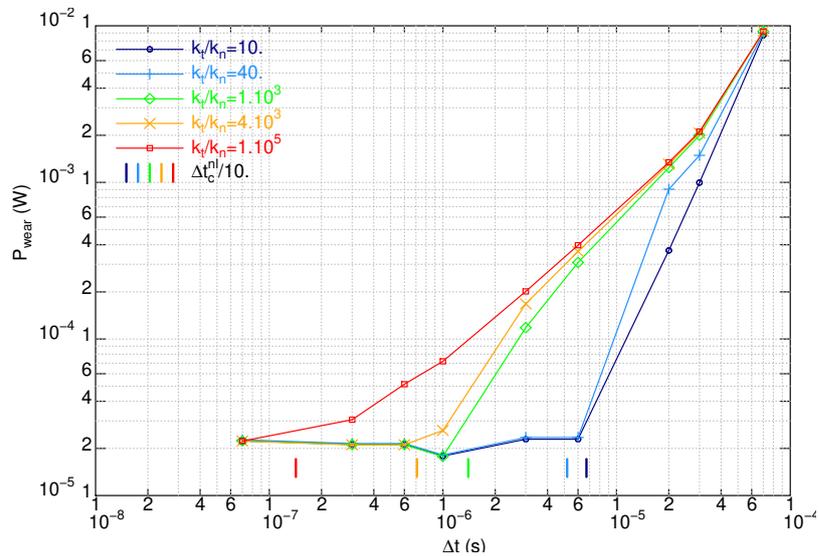
Finally it should be noted that convergence observed here does not necessary mean convergence to a correct value as suggested by figure 9 from [1] where open-loop ("-O") and closed-loop ("-C") algorithms both converge but to different values of wear rate.

	Note Technique DEN	Page 21/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A

Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise



(a) Preload of 1 N



(b) Preload of 3.5 N

Figure 10 – Convergence with Δt of the mean wear work rate

	Note Technique DEN	Page 22/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A

Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise

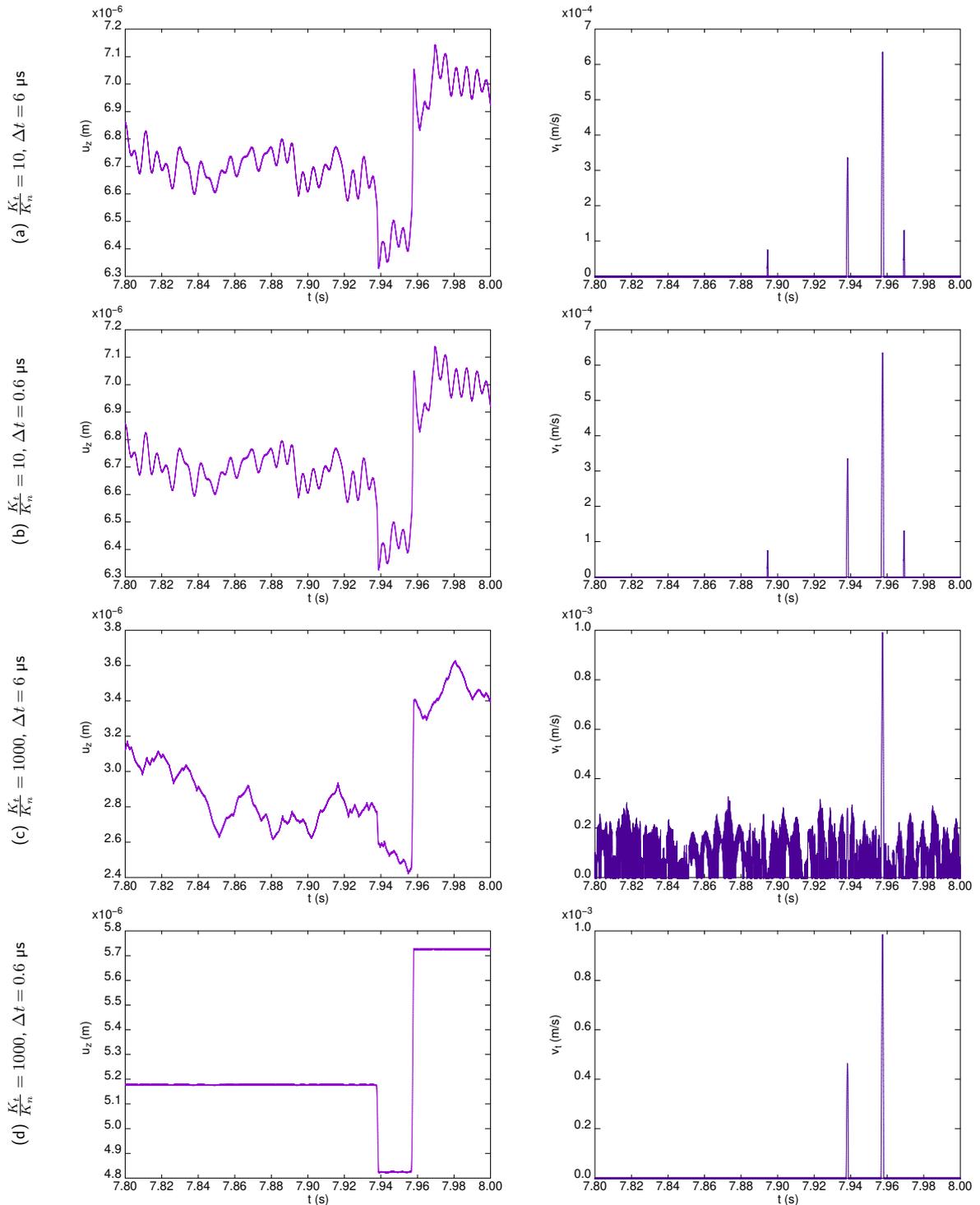
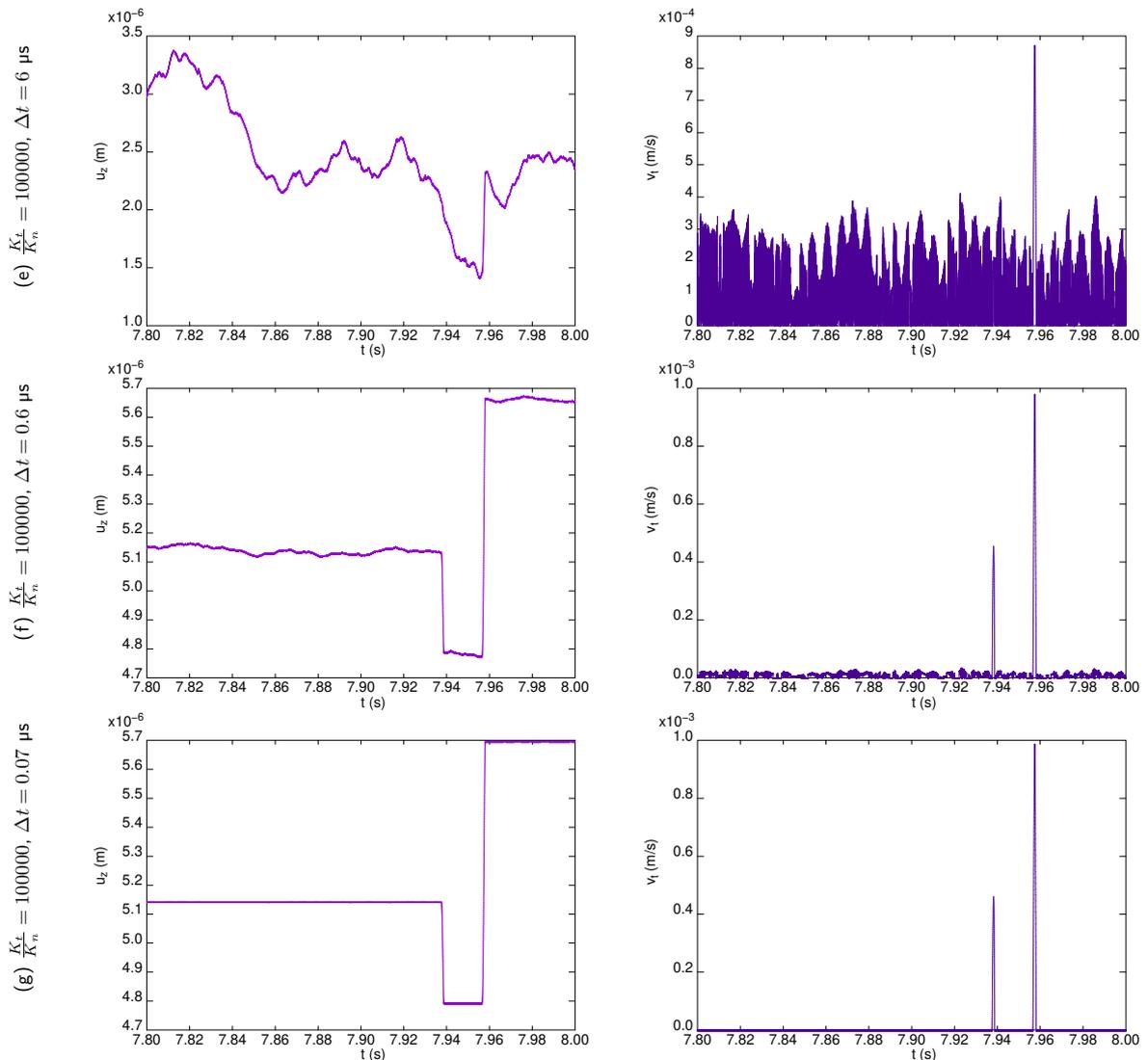


Figure 11 – Tangential displacement and sliding velocity for 3.5 N preload

Document émis par le CEA dans le cadre de l'accord tripartite CEA-EDF-AREVA Institut 2017-F27166 - Reproduction et diffusion soumises aux termes de l'accord

	Note Technique DEN	Page 23/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		



Suite Figure 11 – Tangential displacement and sliding velocity for 3.5 N preload

4.4 Convergence of the Oden model

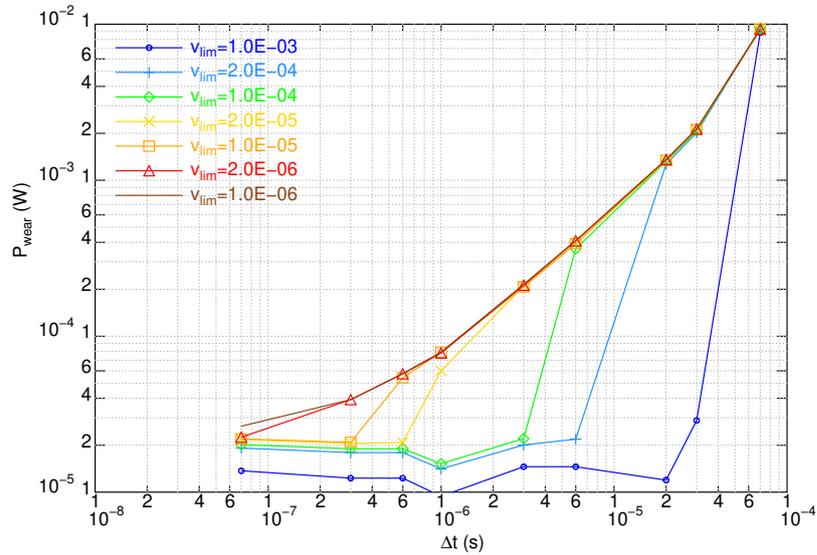
In [1], the convergence of the velocity-limited-model (or "Oden-model") has been established versus the cut-off velocity as shown on figure 9a. The absence of indication about the timestep used is regrettable.

Hence, a convergence study similar to the one done for the Antunes model in previous paragraph is done here for the Oden model, also available in Cast3M, with respect to Δt and v_{lim} . To compute wear it is stipulated that no wear occurs in the regularized zone.

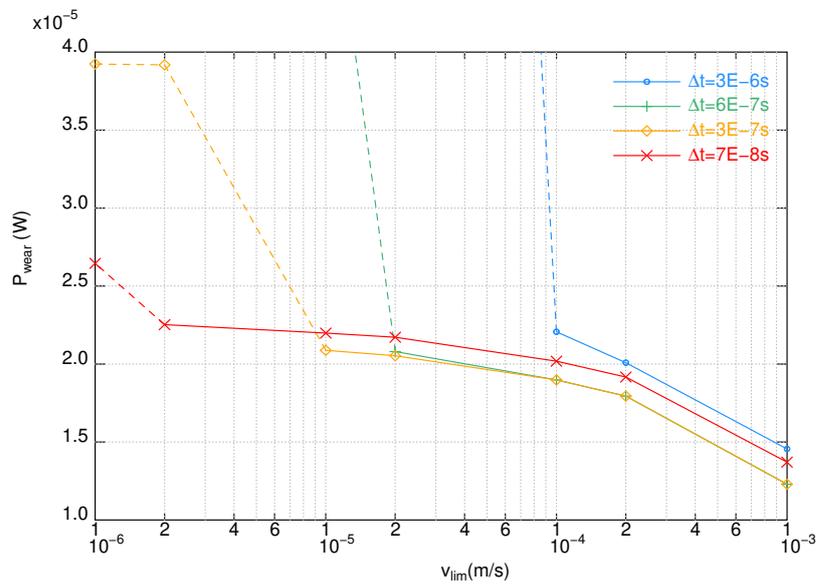
Results on figure 12 exhibit a convergence similar to the one of the Antunes model. Figure 13 shows that accurate results need very small values of both Δt and v_{lim} .

Comparing figures 13e-g to figures 11e-g, it is worth noticing that temporal results obtained with the Oden model for

	Note Technique DEN	Page 24/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		



(a) Convergence with Δt



(b) Convergence with v_{lim} (dashed line for spurious results)

Figure 12 – Convergence of the mean wear work rate for a preload of 3.5 N

$v_{lim} = 2 \mu\text{m/s}$ are almost the same than the one obtained with the Antunes model for $\frac{K_t}{K_n} = 100000$ for the different values of Δt tested (6, 0.6 and 0.07 μs).

	Note Technique DEN Page 25/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358
	Date : 13/09/2019 Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise	

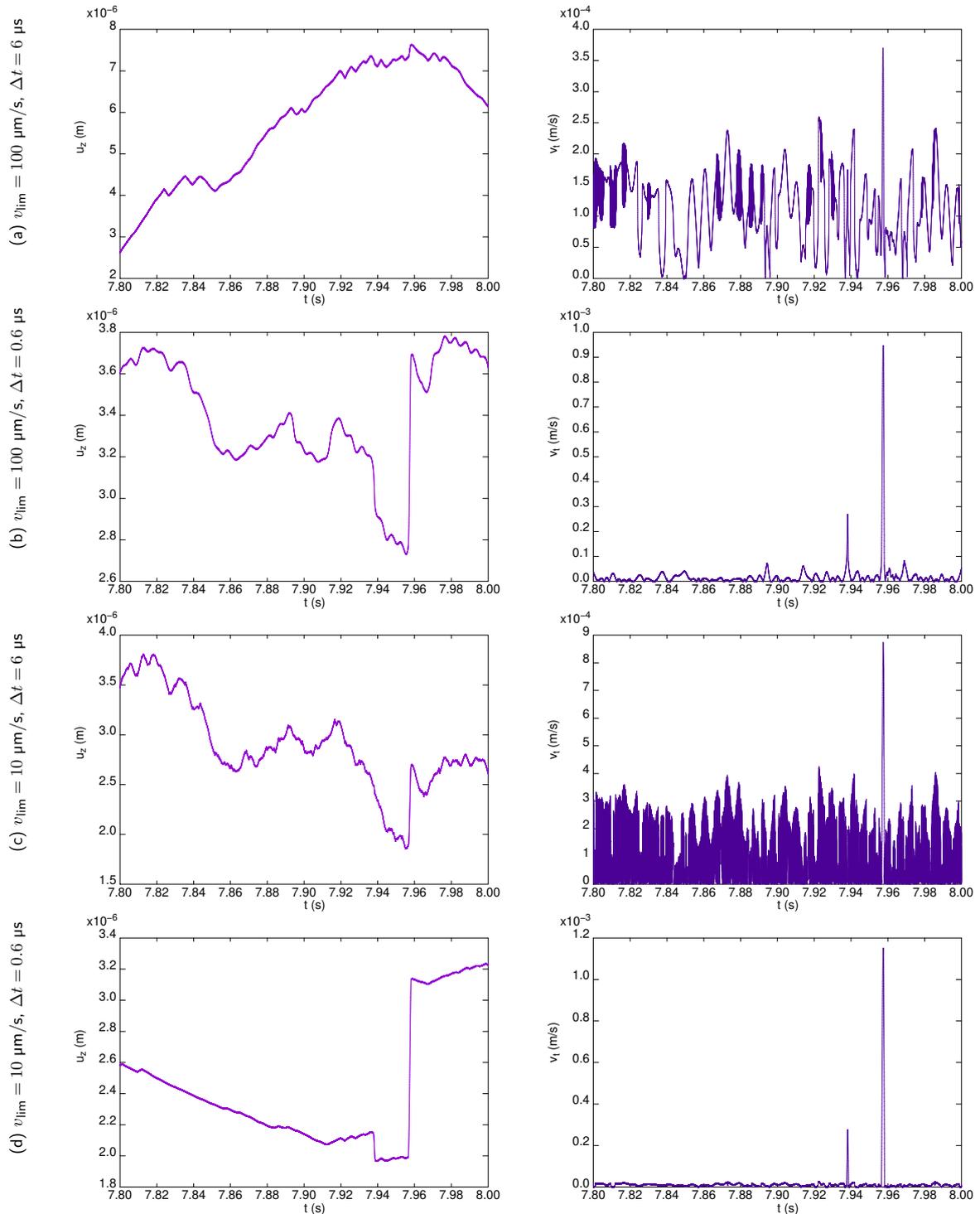
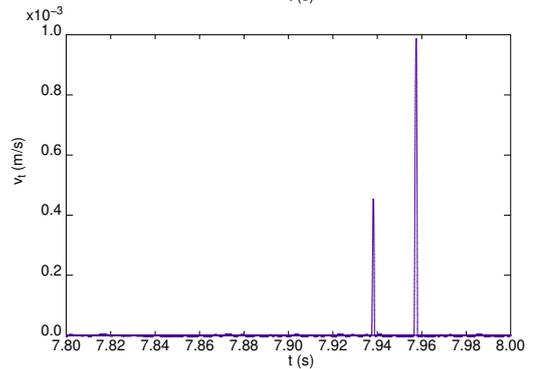
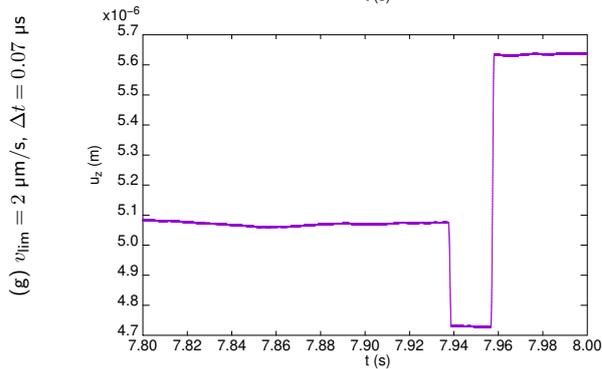
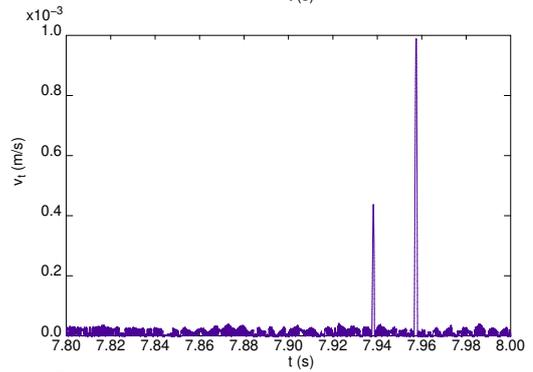
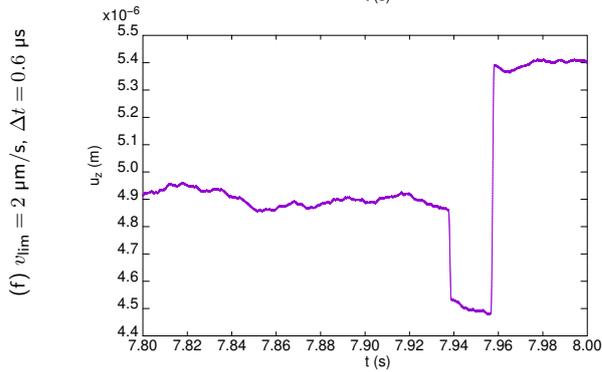
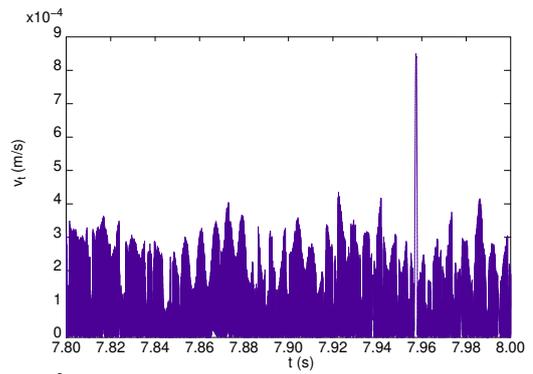
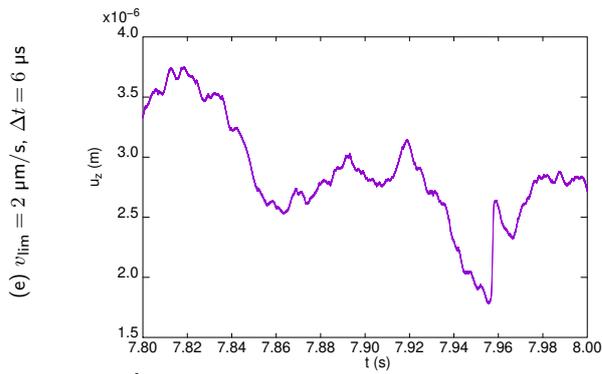


Figure 13 – Tangential displacement and sliding velocity for 3.5 N preload

Document émis par le CEA dans le cadre de l'accord tripartite CEA-EDF-AREVA Institut 2017-F27166 - Reproduction et diffusion soumises aux termes de l'accord

	Note Technique DEN	Page 26/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		



Suite Figure 13 – Tangential displacement and sliding velocity for 3.5 N preload

	Note Technique DEN	Page 27/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

4.5 Comparison of time evolutions with published results of Hassan and Rogers [1]

Unloaded case

Figure 14 presents the results for the unloaded case (0 N) obtained by the reference [1] and by Cast3m for 2 sets of numerical parameters : $K_t/K_n = 10$, $\Delta t = 6 \mu s$ and $K_t/K_n = 1000$, $\Delta t = 0.6 \mu s$.

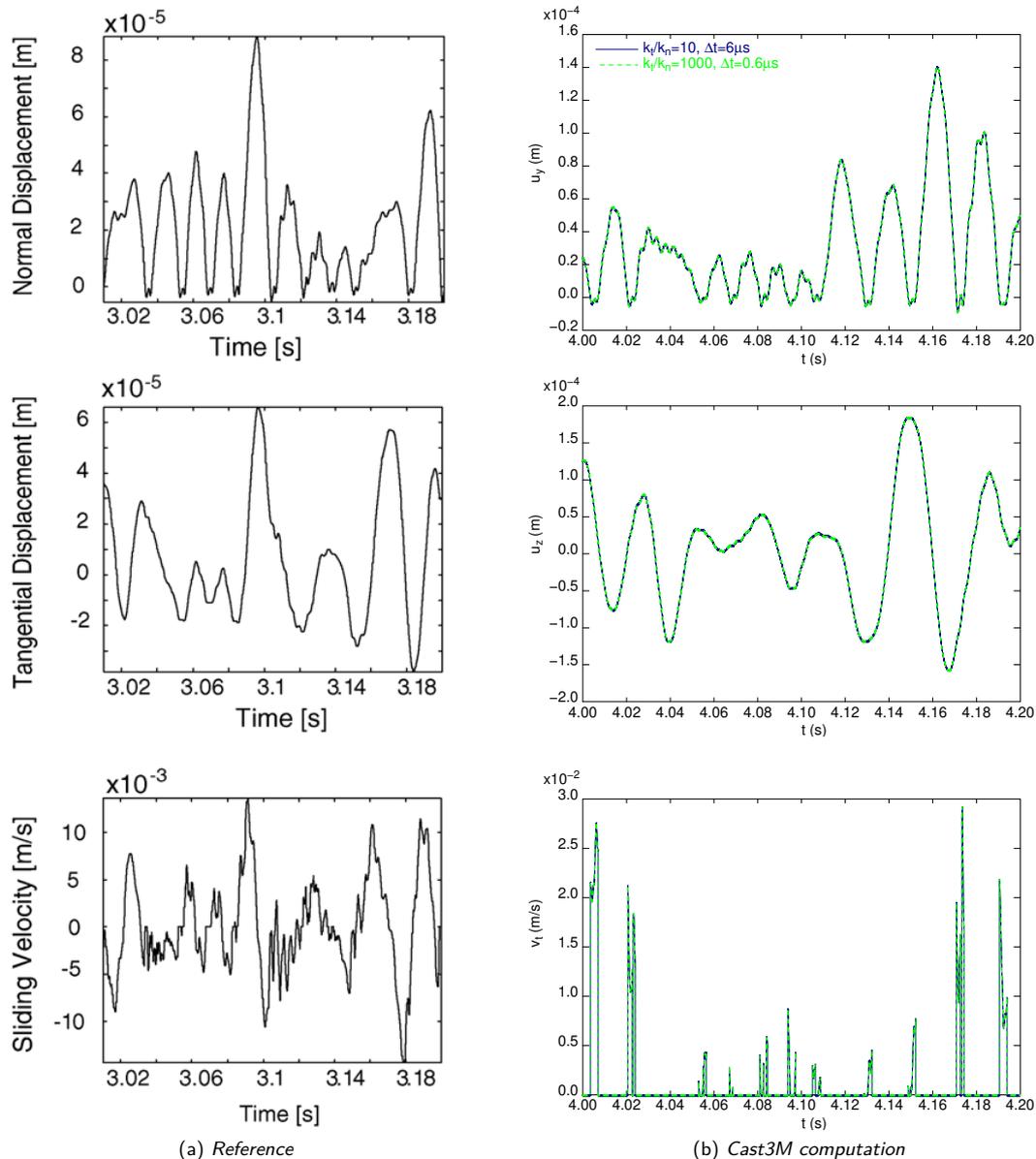


Figure 14 – Tube response (Normal, tangential displacement and sliding velocity) at the contact node for 0 N preload. Qualitatively, normal and tangential displacements are well-reproduced. In particular, the "half-sinus" shape of u_y due

		Note Technique DEN	Page 28/46
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
		Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise			

to the null-gap is found quite similar to the one of [1]. However, the amplitude of the tangential displacement looks larger in the present simulations, and sliding occurs for small and discrete time intervals unlike the previous results of [1] where sliding seems quasi-continuous.

Cast3M computations made with two different numerical parameters give exactly the same results.

Preloaded case

Results for the preloaded case (3.5 N) are presented figure 15.

For this simulation, comparison with [1] shows : a smaller amplitude of the normal displacement, similar discrete but less frequent sliding phases (tangential quantities are plotted for 1 s). These differences (like the ones observed for the unloaded case) may probably be caused by somehow different loadings even if care has been taken to use a white noise filtered at 70 Hz uncorrelated in both directions and producing a RMS displacement of 100 μm at the beam's center.

The only difference between the Cast3M computations made with two different numerical parameters is the smaller chattering observed with higher value of $\frac{K_t}{K_n}$, but the tangential velocity remains identical and then also the work rate of wear.

	Note Technique DEN	Page 29/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

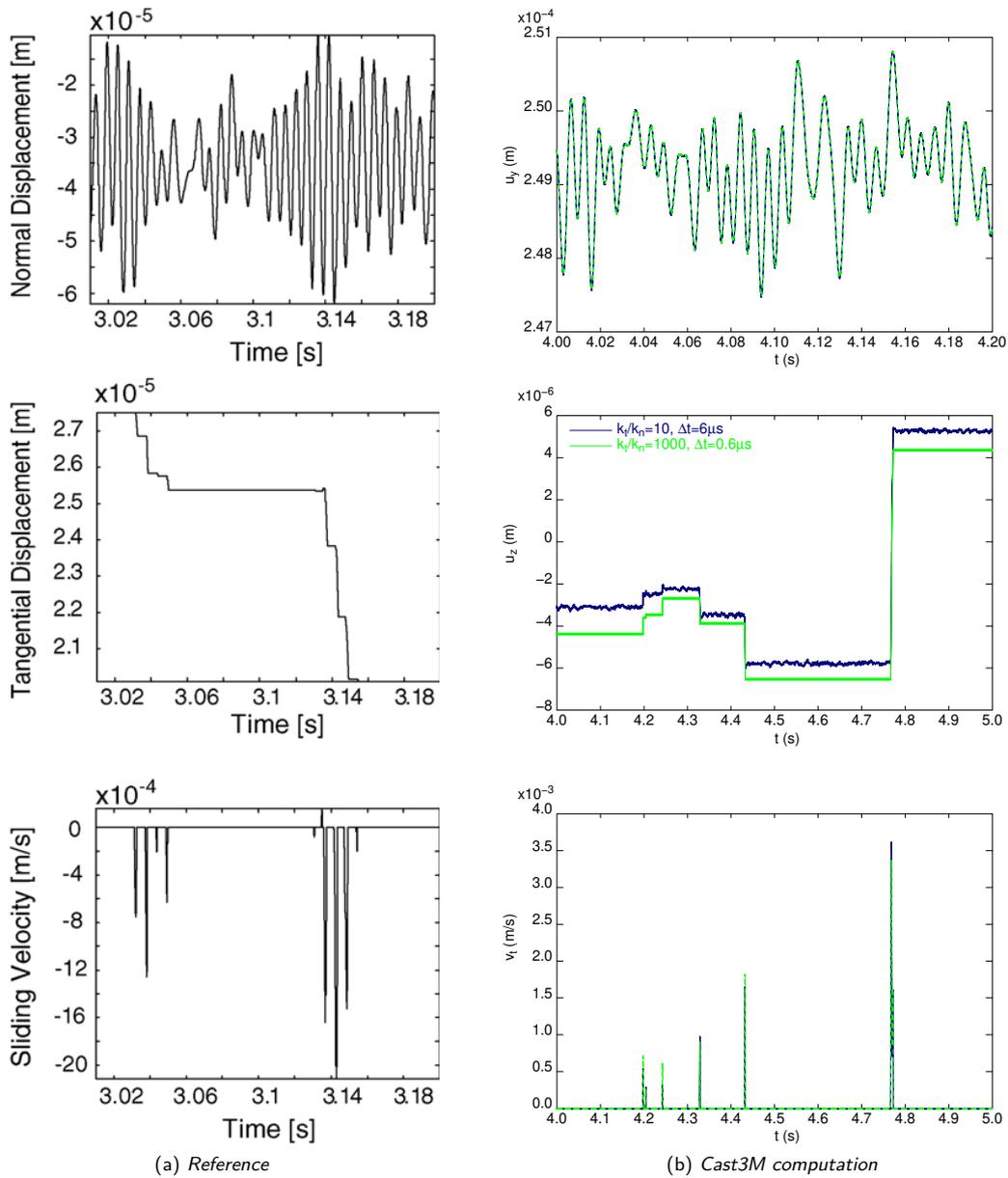


Figure 15 – Tube response (Normal, tangential displacement and sliding velocity) for 3.5 N preload

	Note Technique DEN	Page 30/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-contraints dans Gerboise		

5 Simulation avec GERBOISE d'un tube de générateur de vapeur pré-contraint

5.1 Problème considéré

On considère un tube de GV représenté figure 16 avec les caractéristiques résumées table 7.

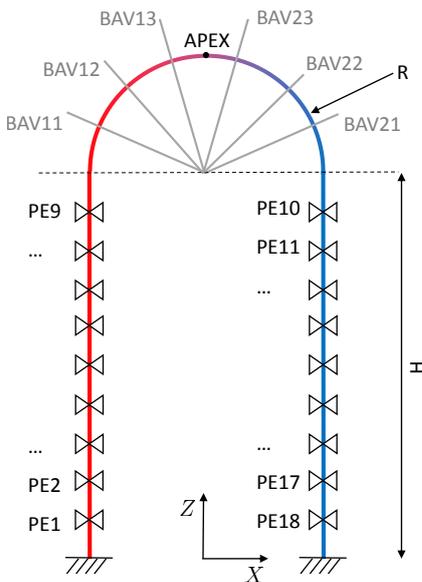


Figure 16 – Modèle du GV

Grandeur	Valeur (en unités SI le cas échéant)
hauteur droite	10.0
rayon du cintre	1.5
diamètre ext. tube	0.02
épaisseur tube	0.001
module d'Young	200. 10 ⁹
coef. de Poisson	0.3
masse volumique	8100.
amortissement modal	0.02
angle des BAV	20.21° 47.78° 75.96°
jeu nominal des BAV	0.240 10 ⁻³
raideur normale BAV	1. 10 ⁶
amortissement normal BAV	0.00
coef. de frottement BAV	0.4
inclinaison des étriers	30.°
jeu nominal des étriers	1. 10 ⁻³
raideur normale étriers	1. 10 ⁶
amortissement normal étriers	0.00
coef. de frottement étriers	0.4

Tableau 7 – Caractéristiques du GV étudié

L'orientation des BAV et des étriers obéit aux repères indiqués figure 17 (différente de celle adoptée classiquement par Framatome).

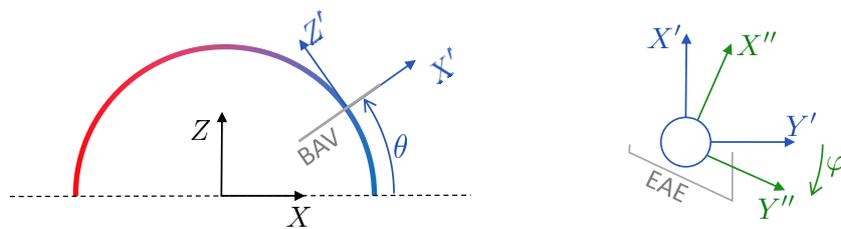


Figure 17 – Repères locaux des BAV et étriers

On a donc :

$$(e'_X \ e'_Y \ e'_Z) = (e_X \ e_Y \ e_Z) \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{22a}$$

$$(e''_X \ e''_Y \ e''_Z) = (e'_X \ e'_Y \ e'_Z) \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (e_X \ e_Y \ e_Z) \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{22b}$$

	Note Technique DEN	Page 31/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

Ainsi, les normales au contact exprimées dans le repère (X, Y, Z) sont :

$$\underline{n}^{\text{BAV}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{n}^{\text{EAE}} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ -\sin\theta \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (23)$$

La raideur normale de choc des BAV et étriers est choisie égale à 1.10^6 N/m, ce qui est inférieur à la valeur de la raideur d'ovalisation (8.510^6 N/m), afin de prendre en compte du mieux possible la souplesse inconnue de la BAV. Dans la direction tangentielle, on a choisit de considérer une raideur d'adhérence pénalisée :

$$K_t = 10K_n \quad (24)$$

suivant les recommandations originales de [10]. Cependant, un autre choix serait, à l'image de ce qui est fait pour les composantes normales, de déduire de la géométrie réelle la souplesse tangentielle du système physique. L'amortissement tangential est purement numérique avec une valeur historiquement calculée comme :

$$C_t = 2\sqrt{K_t M_t} \quad (25)$$

où le paramètre M_t , évident dans le cas à 1 degré de liberté, est estimé dans le cas multi-modal par la nouvelle formule proposée ici :

$$M_t(x, N) = \frac{1}{\sum_{i=1..N} \frac{\phi_i^2(x)}{\phi_i^2 M \phi_i}} \quad (26)$$

Il est important de noter que M_t dépend du ddl x considéré et décroît avec le nombre de modes utilisés N . Ici, afin d'avoir les mêmes caractéristiques sur toutes les liaisons, on choisit d'utiliser :

$$M_t(N) = \min_{x \in x_{\text{BAV}}} (M_t(x, N)) \quad (27)$$

Avec la base modale calculée, on trouve :

$$C_t = \begin{cases} 8333 \text{ Ns/m} & \text{pour 3 modes} \\ 3028 \text{ Ns/m} & \text{pour 100 modes} \\ 2302 \text{ Ns/m} & \text{pour 200 modes} \end{cases} \quad (28)$$

L'expérience a montré qu'il est important de ne pas utiliser de valeur de C_t trop grande en cas de contact permanent car cela pénalise fortement le pas de temps critique.

On utilise la modélisation représentée figure 16 avec un maillage constitué de 1240 éléments de poutre de Timoshenko qui permet d'avoir convergé à 1 Hz près sur les fréquences propres des 100 premiers modes. La liste de ceux-ci est donnée table 8.

	Note Technique DEN	Page 32/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

Mode	Fréq. (Hz)	Direction	Mode	Fréq. (Hz)	Direction	Mode	Fréq. (Hz)	Direction
1	2.786	Hors-Plan	35	82.496	Hors-Plan	68	198.103	Plan
2	7.025	Plan	36	87.157	Hors-Plan	69	198.197	Hors-Plan
3	8.625	Hors-Plan	37	87.216	Plan	70	205.929	Hors-Plan
4	16.778	Plan	38	88.712	Plan	71	206.017	Plan
5	18.571	Hors-Plan	39	89.056	Hors-Plan	72	210.914	Plan
6	31.603	Plan	40	94.108	Plan	73	210.979	Hors-Plan
7	32.351	Hors-Plan	41	94.113	Hors-Plan	74	216.492	Plan
8	44.784	Hors-Plan	42	94.904	Plan	75	216.556	Hors-Plan
9	44.867	Plan	43	95.007	Hors-Plan	76	224.618	Plan
10	45.272	Plan	44	98.583	Plan	77	224.623	Hors-Plan
11	45.289	Hors-Plan	45	98.628	Hors-Plan	78	228.299	Plan
12	47.191	Hors-Plan	46	98.755	Plan	79	228.444	Hors-Plan
13	47.239	Plan	47	98.765	Hors-Plan	80	238.380	Hors-Plan
14	49.178	Plan	48	101.133	Plan	81	238.447	Plan
15	49.201	Hors-Plan	49	107.486	Hors-Plan	82	241.397	Plan
16	50.780	Plan	50	108.541	Plan	83	241.496	Hors-Plan
17	51.057	Hors-Plan	51	112.049	Plan	84	251.197	Hors-Plan
18	54.858	Hors-Plan	52	132.659	Hors-Plan	85	251.407	Plan
19	54.888	Plan	53	134.356	Hors-Plan	86	254.364	Plan
20	56.242	Plan	54	137.429	Plan	87	254.404	Hors-Plan
21	56.612	Hors-Plan	55	140.732	Hors-Plan	88	260.317	Hors-Plan
22	61.584	Hors-Plan	56	169.021	Plan	89	262.012	Plan
23	61.699	Plan	57	169.158	Hors-Plan	90	265.097	Hors-Plan
24	63.200	Plan	58	178.089	Plan	91	265.461	Plan
25	63.478	Hors-Plan	59	178.092	Hors-Plan	92	265.469	Hors-Plan
26	68.776	Hors-Plan	60	178.715	Plan	93	268.893	Plan
27	68.863	Plan	61	178.753	Hors-Plan	94	271.234	Hors-Plan
28	71.043	Plan	62	185.447	Hors-Plan	95	271.690	Hors-Plan
29	71.166	Hors-Plan	63	185.459	Plan	96	272.257	Plan
30	75.544	Plan	64	186.991	Plan	97	272.258	Hors-Plan
31	75.833	Hors-Plan	65	187.073	Hors-Plan	98	272.640	Plan
32	79.233	Hors-Plan	66	195.351	Hors-Plan	99	273.499	Hors-Plan
33	79.244	Plan	67	195.419	Plan	100	307.666	Plan
34	81.922	Plan						

Tableau 8 – Premiers modes propres du GV étudié

	Note Technique DEN	Page 33/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

5.2 Analyses linéaires

Un profil de vitesse transverse analytique, inventé de toutes pièces, ne tenant pas compte des obstacles (i.e. BAV) et défini seulement sur la partie cintrée est considéré ici :

$$V(s) = V_{\max} \cdot \left(1 - \left(\frac{2s}{\pi R}\right)^2\right) \quad (29)$$

où $s \in \left[-\frac{\pi}{2}R : \frac{\pi}{2}R\right]$ est l'abscisse curviligne du cintre. On choisit $V_{\max} = 4$ m/s.

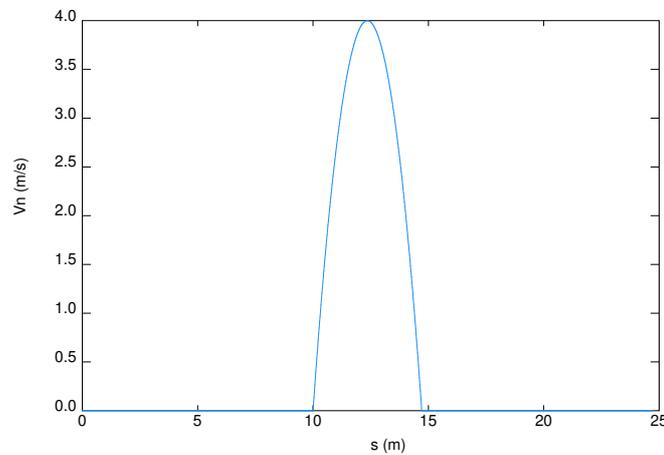


Figure 18 – Profil de vitesse transverse du cintre GV

Le spectre monophasique dit "ENVELOPPE_DEMT" définit le chargement par la turbulence utilisé. On réalise le calcul linéaire de l'écart-type du déplacement à l'APEX. On trouve :

$$\sigma(UY, APEX)^{\text{lin}} = 11.11 \text{ mm} \quad (30)$$

5.3 Analyses non-linéaires

5.3.1 Chargement par la turbulence

Le chargement par la turbulence en monophasique adopté ici suit l'équation (42) de [16]. En conséquence, les chargement modaux sont parfaitement corrélés pour chaque direction (par ex. le chargement du mode 1 est proportionnel à chaque instant à celui appliqué au mode 3 qui est aussi hors-plan). Cette hypothèse historique conduit à des résultats surprenants et parfois difficiles à soutenir (par exemple, la réponse dépend de la normalisation des modes!). Adopter des approches récentes plus pertinentes comme celle proposée dans [17] semble incontournable dans un futur proche afin d'assurer la qualité du code. Néanmoins, un certain rééquilibrage de la distribution des efforts est observé grâce aux impacts.

Le même tirage de chargement est utilisé pour tous les calculs avec un nombre de modes donnés. Il est généré avec un pas de temps $\Delta t = 1$ ms et les calculs utilisant un pas de temps de calcul plus petit interpolent linéairement les valeurs d'effort.

	Note Technique DEN	Page 34/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

5.3.2 Paramètres numériques de simulation

On rappelle que le pas de temps critique du schéma de De Vogelaere pour un système linéaire à 1 degré de liberté non-amorti de fréquence propre f_m vaut :

$$\Delta t_c^m = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_m} = \frac{\sqrt{2}}{\pi f_m} \quad (31)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \Delta t_c^3 \simeq 52.19\text{ms} & \text{si l'on considère 3 modes,} \\ \Delta t_c^{100} \simeq 1.46\text{ms} & \text{si l'on considère 100 modes,} \\ \Delta t_c^{200} \simeq 0.516\text{ms} & \text{si l'on considère 200 modes.} \end{cases} \quad (32)$$

Les paramètres temporels de simulation décrits dans le tableau 9 sont ainsi choisis.

Pas de temps de calcul	$\Delta t = \frac{10^{-3}}{2^p}$ s (avec $p = \{0, 1..6\}$)
Pas de temps de sortie	$= \Delta t$
Durée d'1 bloc	4.096 s
Nombre de blocs	80
Durée de simulation	327.68 s
Nombre de pas sauvés	163840
Statistiques sur les blocs	20 à 80

Tableau 9 – Paramètres numériques d'intégration temporelle

5.3.3 Préchargement de la BAV 12⁺

Résultats pour 3 modes

Une étude de convergence avec le pas de temps a été menée pour un modèle constitué des 3 premiers modes. Plusieurs cas de pré-charge sur la BAV 12 ont été considérés, les autres BAV ayant le jeu nominal égal à : $j^+ = 0.24$ mm, $j^- = 0.24$ mm. Ces cas sont récapitulés ci-après :

- jeu nominal (ouvert et symétrique),
- jeu ouvert et non-symétrique de $j^+ = 0.12$ mm, $j^- = 0.36$ mm,
- jeu nul et non-symétrique de $j^+ = 0$ mm, $j^- = 0.48$ mm,
- jeu négatif et non-symétrique de $j^+ = -0.1$ mm, $j^- = 0.58$ mm, ce qui correspond à une pré-charge de 100 N.

Il a été vérifié que le cas d'une pré-charge de 10 N est très proche du cas (c) et n'est donc pas présenté ici par souci de concision.

Les courbes de la figure 19 montrent que les quantités d'intérêt suivantes :

- nombre moyen de chocs par seconde,
- moyenne des maximum des forces de chocs,
- puissance d'usure moyenne,

convergent toutes rapidement à partir de $\Delta t \leq 0.125$ ms pour les quatre valeurs de précontrainte considérées. Il est à noter que cette valeur de pas de temps est 50 fois plus petite que la recommandation historique de $\frac{\Delta t_c}{10} \simeq 5$ ms. Cependant, le pas de temps critique calculé sur le système linéaire (c'est à dire sans contact) est surestimé. En effet, lorsque l'on considère les phases de contact, la raideur apparente du système est nettement supérieure, et donc le pas de temps critique inférieur. Par exemple, une estimation du pas de temps critique lors des phases de contact s'inspirant de l'équation (21) donne pour les 3 premiers modes :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{k^1 + K_n}{m^1}}} \simeq 2.8 \text{ ms} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{k^2 + K_t}{m^2}}} \simeq 1.2 \text{ ms} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{k^3 + K_n}{m^3}}} \simeq 2.1 \text{ ms} \quad (33)$$

		Note Technique DEN	Page 35/46
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
		Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise			

La stabilité est une condition nécessaire à la convergence du schéma. Ainsi, il est cohérent d'observer la convergence en puissance d'usure à partir de $\Delta t \leq 0.125$ ms, ce qui est proche d'un dixième du pas de temps critique estimé sur le système non-linéaire.

La figure 21 montre comment l'asymétrie introduite par la précontrainte sur la BAV12 dissymétrise les contacts et, in fine, la puissance d'usure. On constate aussi que, pour 3 modes, la puissance d'usure ne semble pas évoluer significativement pour les cas de précontrainte considérés.

Résultats pour 100 modes

Les courbes de convergence avec Δt ne sont pas reproduites car leur allure est très similaire à celles obtenues pour 3 modes avec une stabilisation des résultats (notamment de la puissance d'usure) pour $\Delta t \leq 0.125$ ms.

Par contre, les quantités relatives aux chocs et leur répartition entre les BAV varient sensiblement par rapport au calcul avec 3 modes. La figure 22 est à comparer avec la figure 21. Avec 100 modes, on constate notamment que les chocs sont moins nombreux, de moindre amplitude selon la composante normale, mais conduisent à une usure du même ordre de grandeur. Cela est probablement dû à une plus grande mobilité transverse.

Résultats pour 200 modes

Afin de vérifier la convergence avec le nombre de modes, on reproduit l'analyse précédente avec 200 modes. La fréquence propre du 200^{ème} mode vaut 871.8 Hz, ce qui amène un pas de temps critique du système linéaire d'environ 0.5 ms. Sur la figure 20, les courbes de puissance d'usure en fonction de Δt montrent une convergence atteinte pour un pas de temps environ 2 fois plus petit qu'avec 3 ou 100 modes, ce qui semble indiquer que la raideur de ces modes élevés est plus grande que celle des contacts.

Les distributions des quantités d'intérêt, reportées figure 23, indiquent un comportement très proche de celui obtenu avec 100 modes, traduisant une bonne convergence du modèle dès 100 modes, si ce n'est la moyenne des pics de force normale qui semble encore légèrement diminuer avec le nombre de modes utilisés. En contrepartie, le temps de choc (non indiqué ici) augmente légèrement. La force tangentielle, quant à elle, ne semble pas varier entre 100 et 200 modes.

Les évolutions temporelles du déplacement au point de la BAV précontrainte sont données figure 24 pour trois valeurs de précontraintes. On constate que, même pour les conditions de précontraintes les plus élevées, les temps de choc et donc, in fine, les durées de glissement sont courts (durée de glissement moyenne d'environ 1 ms pour un jeu symétrique et de 1.46 ms pour une pré-charge de 100 N). Ce comportement diffère du cas de Hassan et Rogers, où la précontrainte maintenait le contact de manière quasi-permanente.

	Note Technique DEN	Page 36/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A

Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise

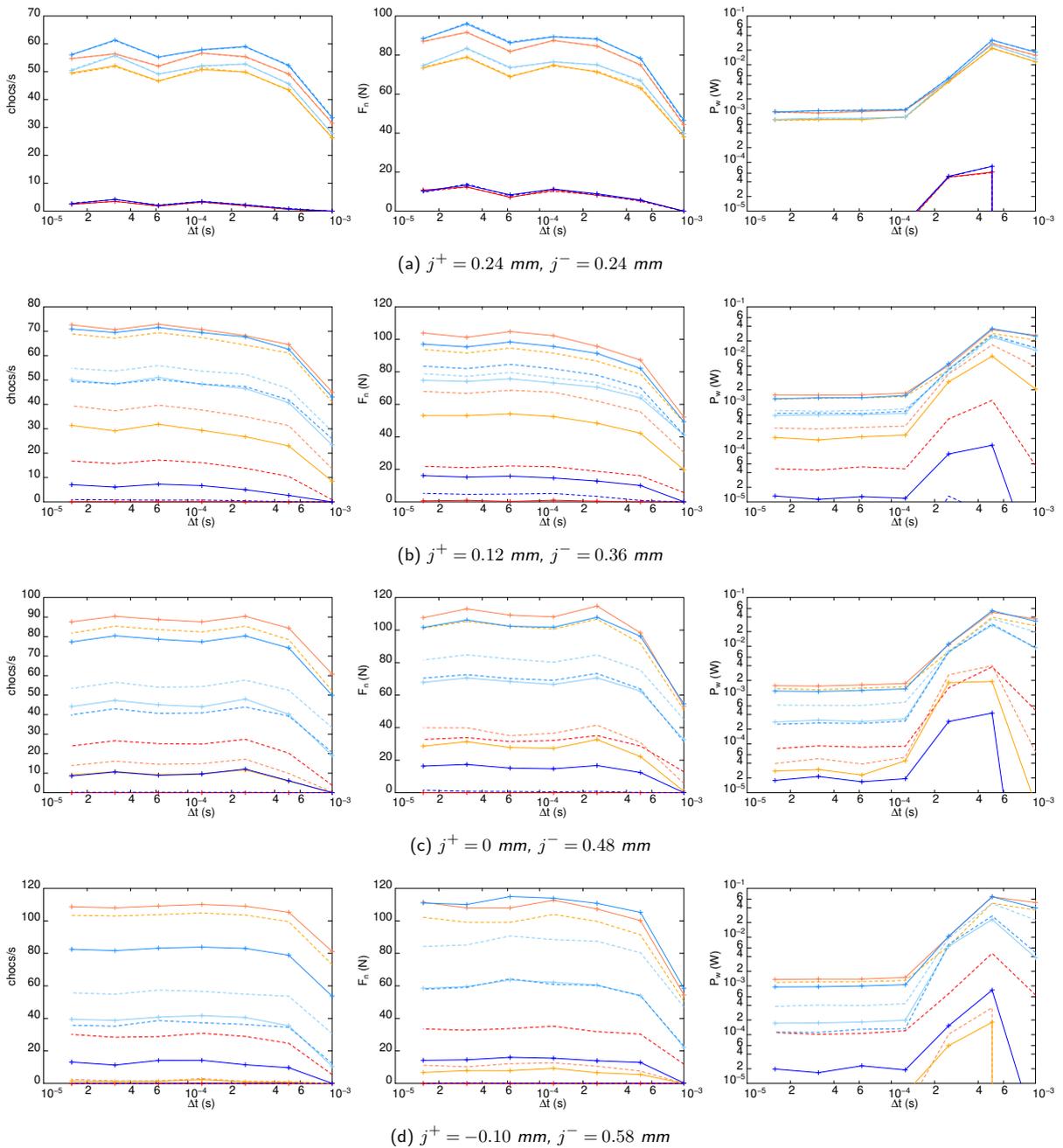


Figure 19 – Convergence avec Δt des quantités d'intérêt pour 3 modes et quatre conditions de pré-chargement
 - : 11+, -- : 11-, - : 12+, -- : 12-, - : 13+, -- : 13-, - : 23+, -- : 23-, - : 22+, -- : 22-, - : 21+ et -- : 21-

	Note Technique DEN	Page 37/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

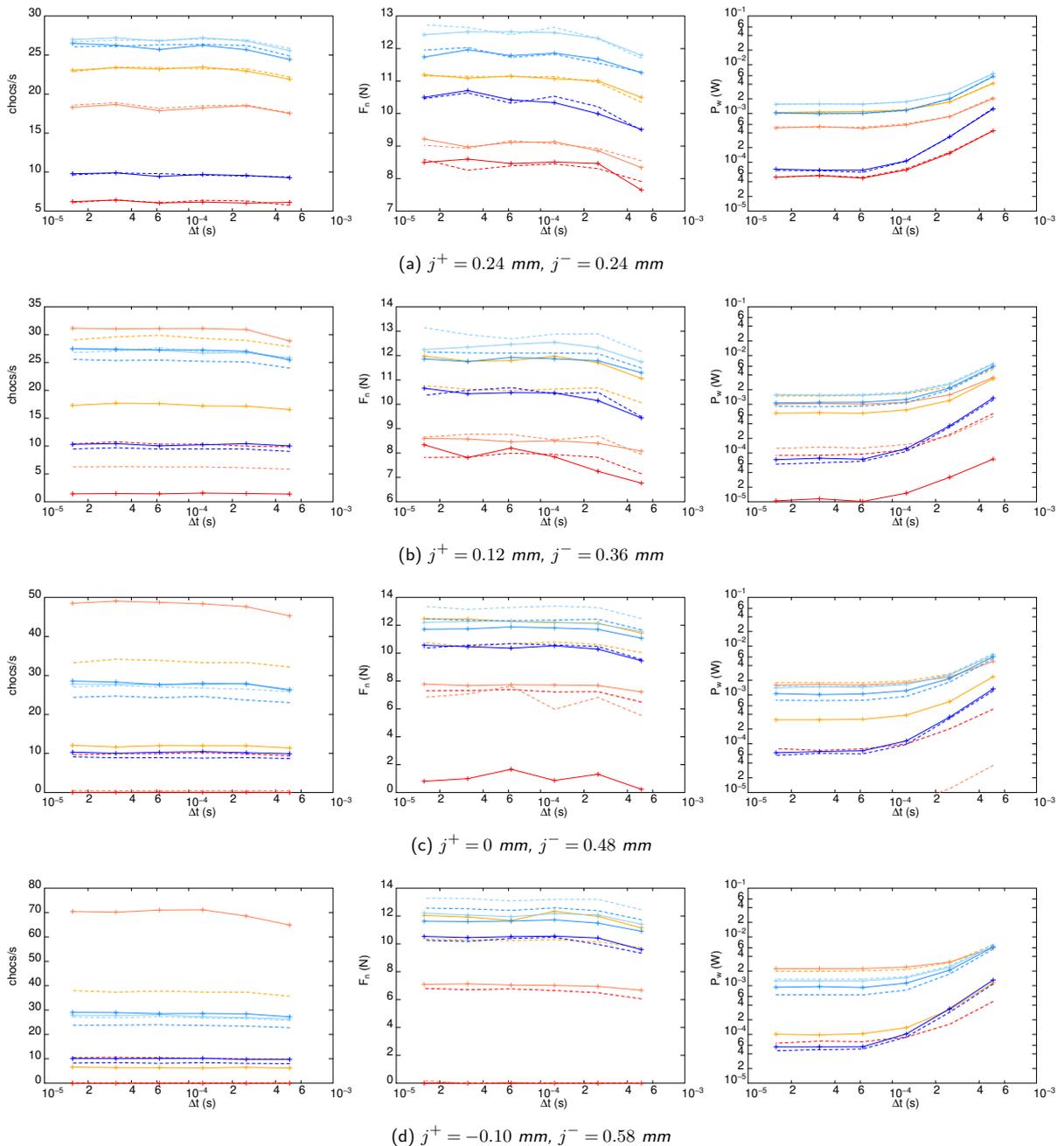
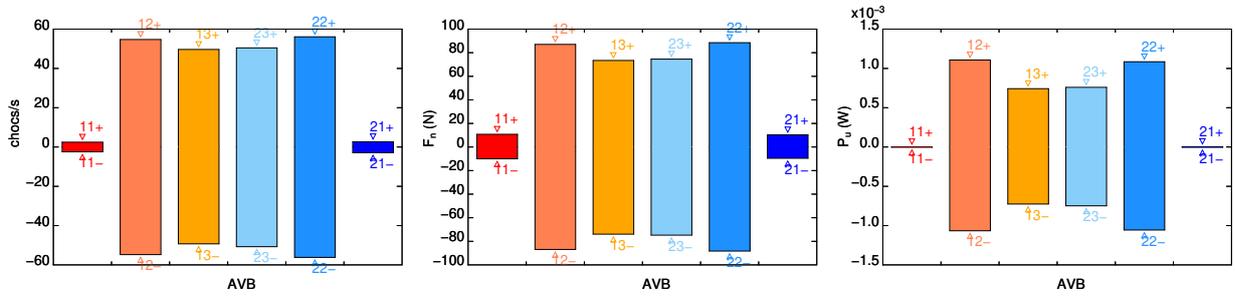
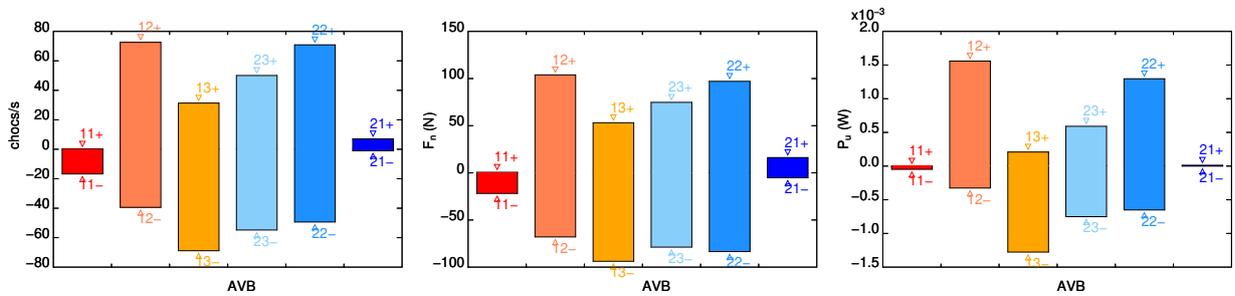


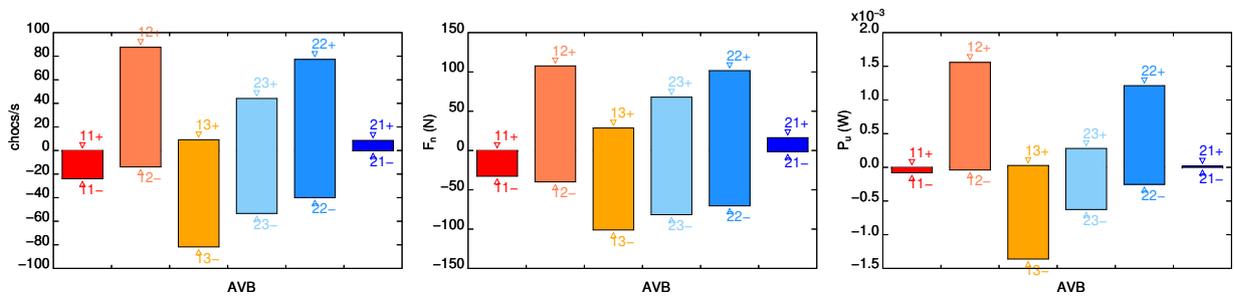
Figure 20 – Convergence avec Δt des quantités d'intérêt pour 200 modes et quatre conditions de pré-chargement
 - : 11+, -- : 11-, - : 12+, -- : 12-, - : 13+, -- : 13-, - : 23+, -- : 23-, - : 22+, -- : 22-, - : 21+ et -- : 21-



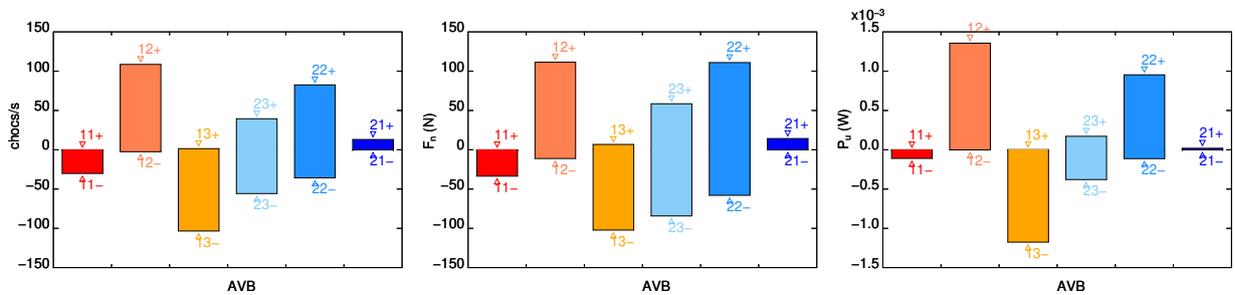
(a) $j^+ = 0.24 \text{ mm}$, $j^- = 0.24 \text{ mm}$



(b) $j^+ = 0.12 \text{ mm}$, $j^- = 0.36 \text{ mm}$



(c) $j^+ = 0 \text{ mm}$, $j^- = 0.48 \text{ mm}$

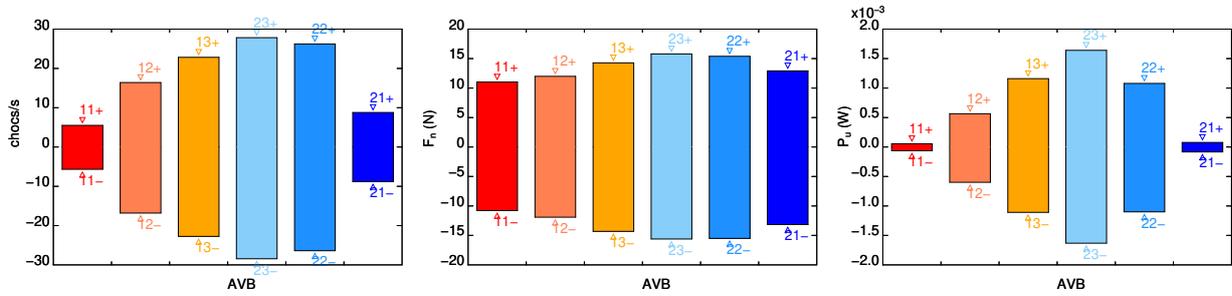


(d) $j^+ = -0.10 \text{ mm}$, $j^- = 0.58 \text{ mm}$

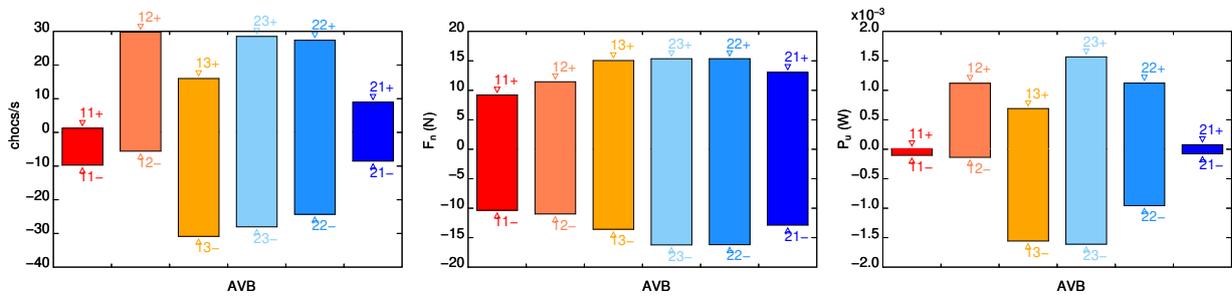
Figure 21 – Quantités d'intérêt pour $\Delta t = 15.625 \mu\text{s}$, 3 modes et pour quatre conditions de pré-chargement

	Note Technique DEN	Page 39/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A

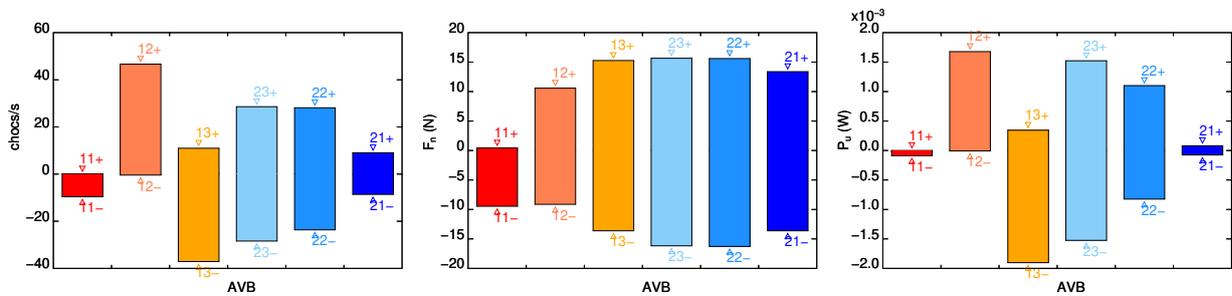
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise



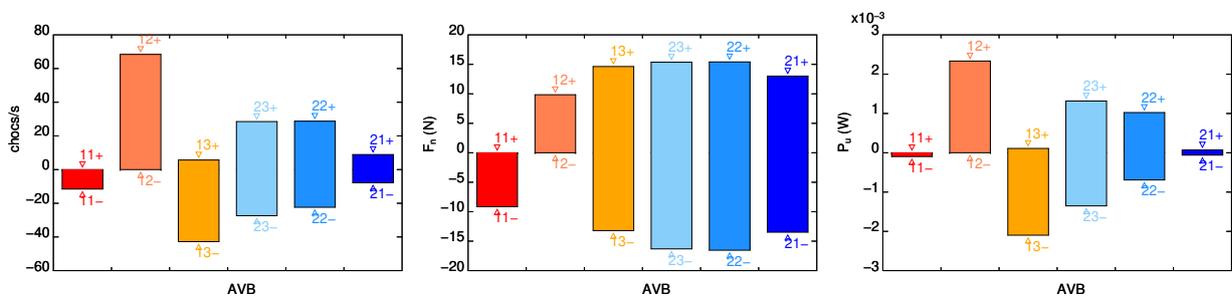
(a) $j^+ = 0.24 \text{ mm}$, $j^- = 0.24 \text{ mm}$



(b) $j^+ = 0.12 \text{ mm}$, $j^- = 0.36 \text{ mm}$

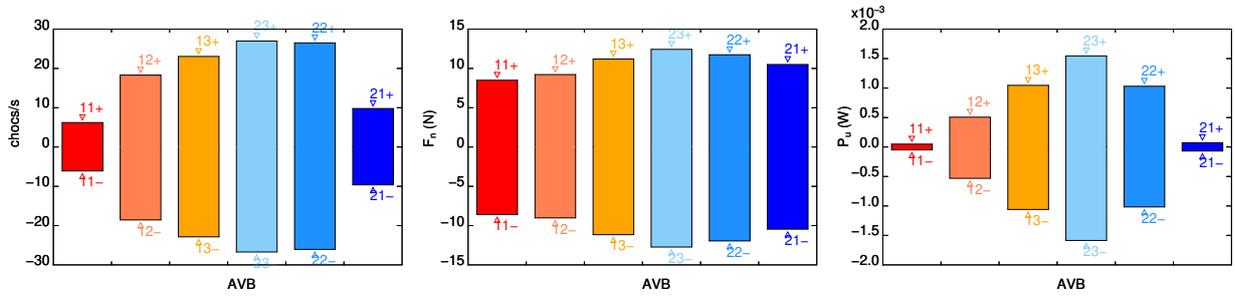


(c) $j^+ = 0 \text{ mm}$, $j^- = 0.48 \text{ mm}$

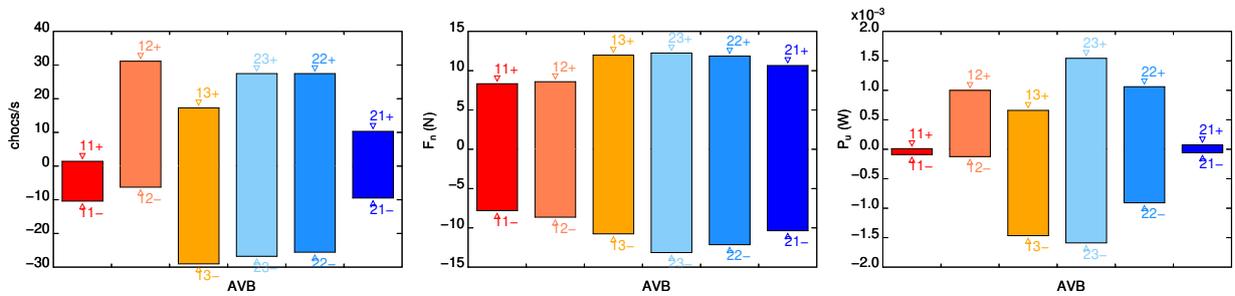


(d) $j^+ = -0.10 \text{ mm}$, $j^- = 0.58 \text{ mm}$

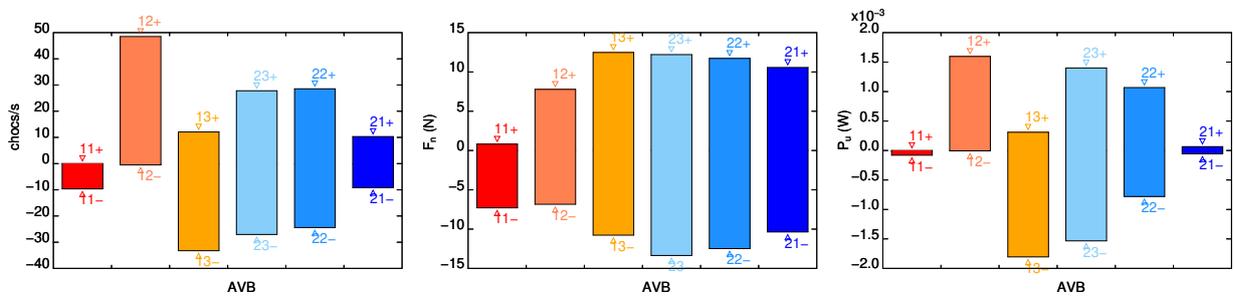
Figure 22 – Quantités d'intérêt pour $\Delta t = 15.625 \mu s$, 100 modes et pour quatre conditions de pré-chargement



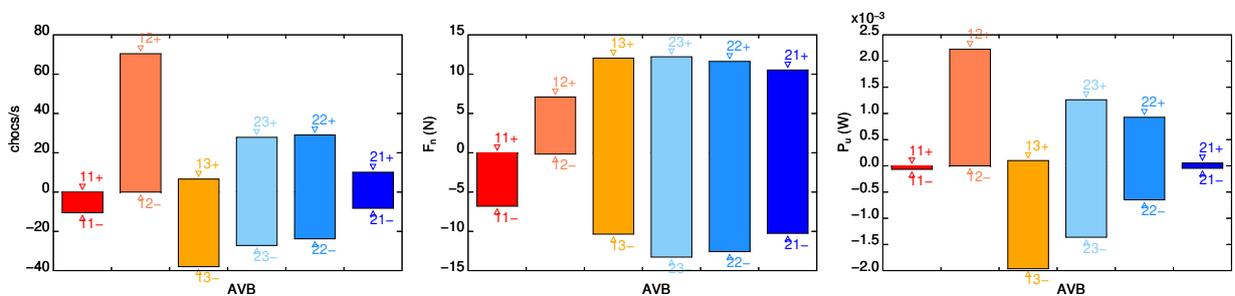
(a) $j^+ = 0.24 \text{ mm}$, $j^- = 0.24 \text{ mm}$



(b) $j^+ = 0.12 \text{ mm}$, $j^- = 0.36 \text{ mm}$



(c) $j^+ = 0 \text{ mm}$, $j^- = 0.48 \text{ mm}$



(d) $j^+ = -0.10 \text{ mm}$, $j^- = 0.58 \text{ mm}$

Figure 23 – Quantités d'intérêt pour $\Delta t = 15.625 \mu s$, 200 modes et pour quatre conditions de pré-chargement

	Note Technique DEN	Page 41/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

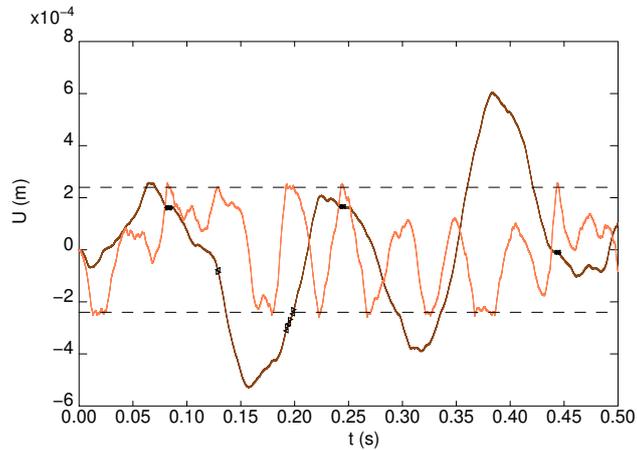
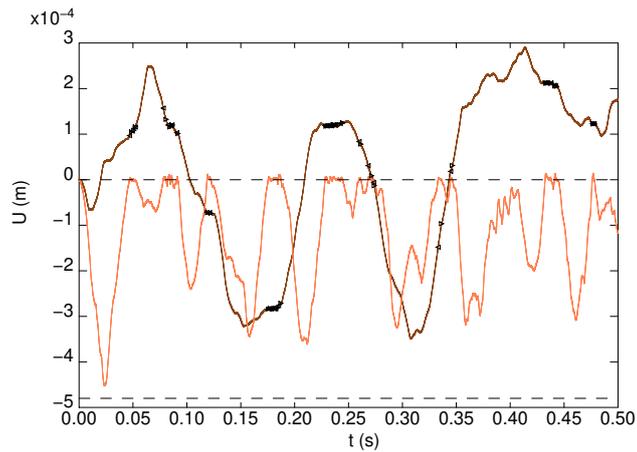
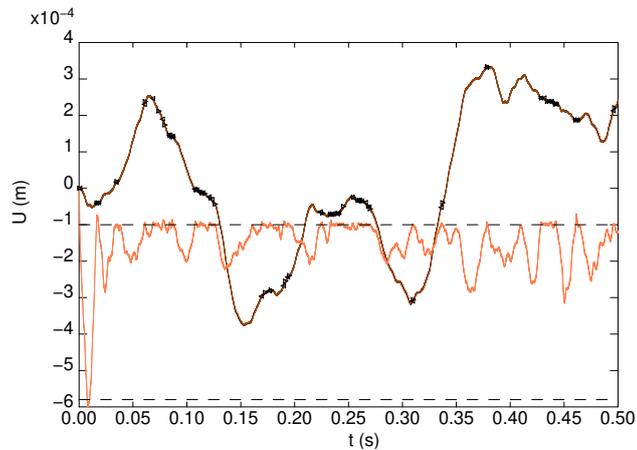
(a) $j^+ = 0.24 \text{ mm}$, $j^- = 0.24 \text{ mm}$ (b) $j^+ = 0 \text{ mm}$, $j^- = 0.48 \text{ mm}$ (c) $j^+ = -0.10 \text{ mm}$, $j^- = 0.58 \text{ mm}$

Figure 24 – Déplacement normal (—) et tangentiel (—) avec début (◁) et fin (▷) de glissement obtenus pour $\Delta t = 15.625 \mu\text{s}$, 200 modes et trois conditions de pré-chargement.

Document émis par le CEA dans le cadre de l'accord tripartite CEA-EDF-AREVA Institut 2017-F27166 - Reproduction et diffusion soumises aux termes de l'accord

	Note Technique DEN	Page 42/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

5.3.4 Préchargement de l'étrier anti-envol 12

On étudie ici l'influence du pré-chargement de l'étrier anti-envol (EAV) situé au niveau de la BAV 12. Sauf mention contraire, les jeux des BAV sont symétriques : $j^{BAV} = \pm 0.24$ mm, encore noté : $j^+ = j^- = 0.24$ mm. Les cas de pré-charge considérés sont récapitulés ci-après :

- (a) jeu nominal $j^{EAE} = 1$ mm,
- (b) jeu nul $j^{EAE} = 0$ mm,
- (c) jeu négatif $j^{EAE} = -0.1$ mm, ce qui correspond à une pré-charge de 100 N.
- (d) et une pré-charge de 100 N sur la BAV et sur l'étrier, soit un jeu négatif $j^{EAE} = -0.1$ mm pour l'étrier et $j^+ = -0.1$ mm et $j^- = +0.58$ mm pour la BAV.

Le premier cas a déjà été présenté précédemment et les figures sont reproduites pour faciliter la comparaison.

200 modes sont considérés. La convergence avec le pas de temps a été étudiée et montre un comportement similaire au cas précédent. Les courbes ne sont donc pas reproduites ici.

La figure 25 donne des exemples de trajectoires obtenues lorsque l'étrier limite effectivement le mouvement du tube. La figure 26 montre comment la pré-charge de l'étrier influence la réponse globale du système. En particulier, on observe qu'un jeu trop faible (voire négatif) d'un étrier conduit à son usure, que celle-ci est plus importante que celle des BAV et que l'usure des BAV est globalement peu sensible à la pré-charge de l'étrier.

	Note Technique DEN	Page 43/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

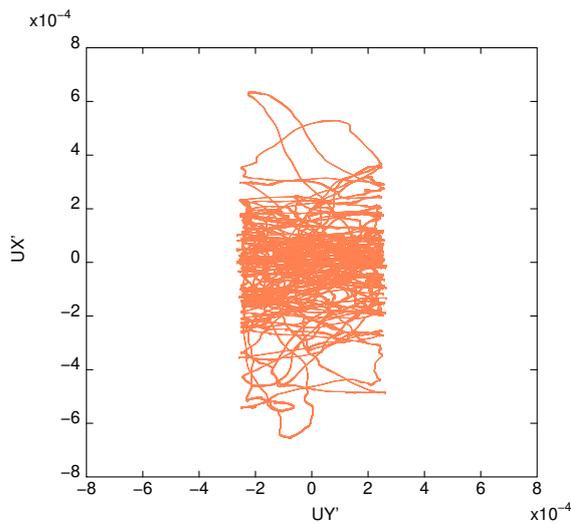
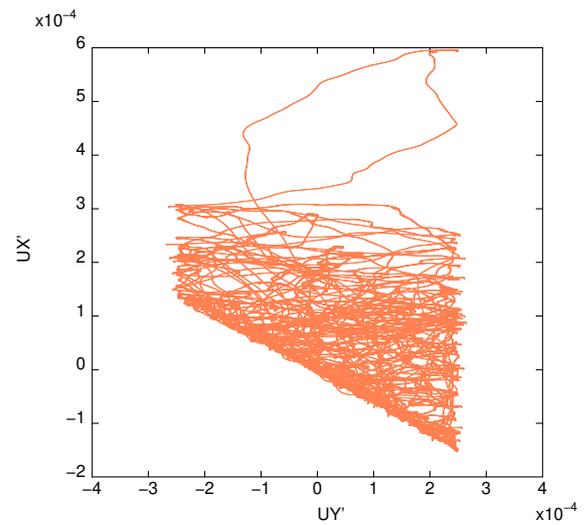
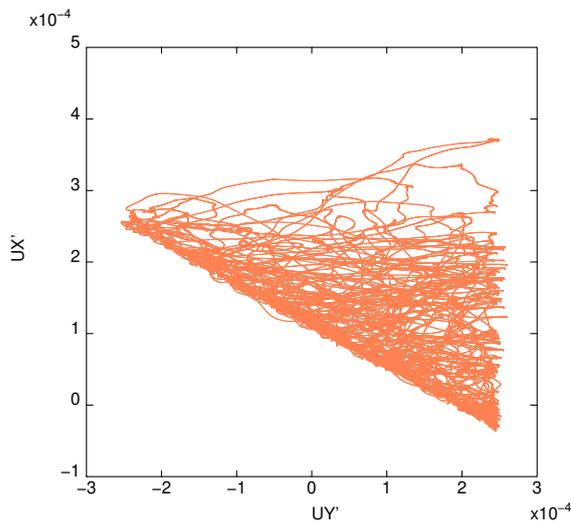
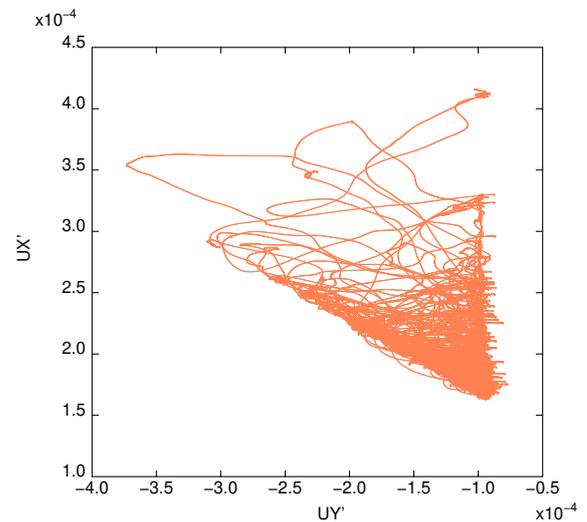
(a) $j^{EAE} = 1 \text{ mm}$, $j^{BAV} = \pm 0.24 \text{ mm}$ (b) $j^{EAE} = 0 \text{ mm}$, $j^{BAV} = \pm 0.24 \text{ mm}$ (c) $j^{EAE} = -0.1 \text{ mm}$, $j^{BAV} = \pm 0.24 \text{ mm}$ (d) $j^{EAE} = -0.1 \text{ mm}$, $j^+ = -0.1 \text{ mm}$ et $j^- = +0.58 \text{ mm}$

Figure 25 – Trajectoire dans le plan normal au tube du point situé au droit de la BAV12 lors du dernier bloc (200 modes, $\Delta t = 15.625 \mu\text{s}$)



Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise

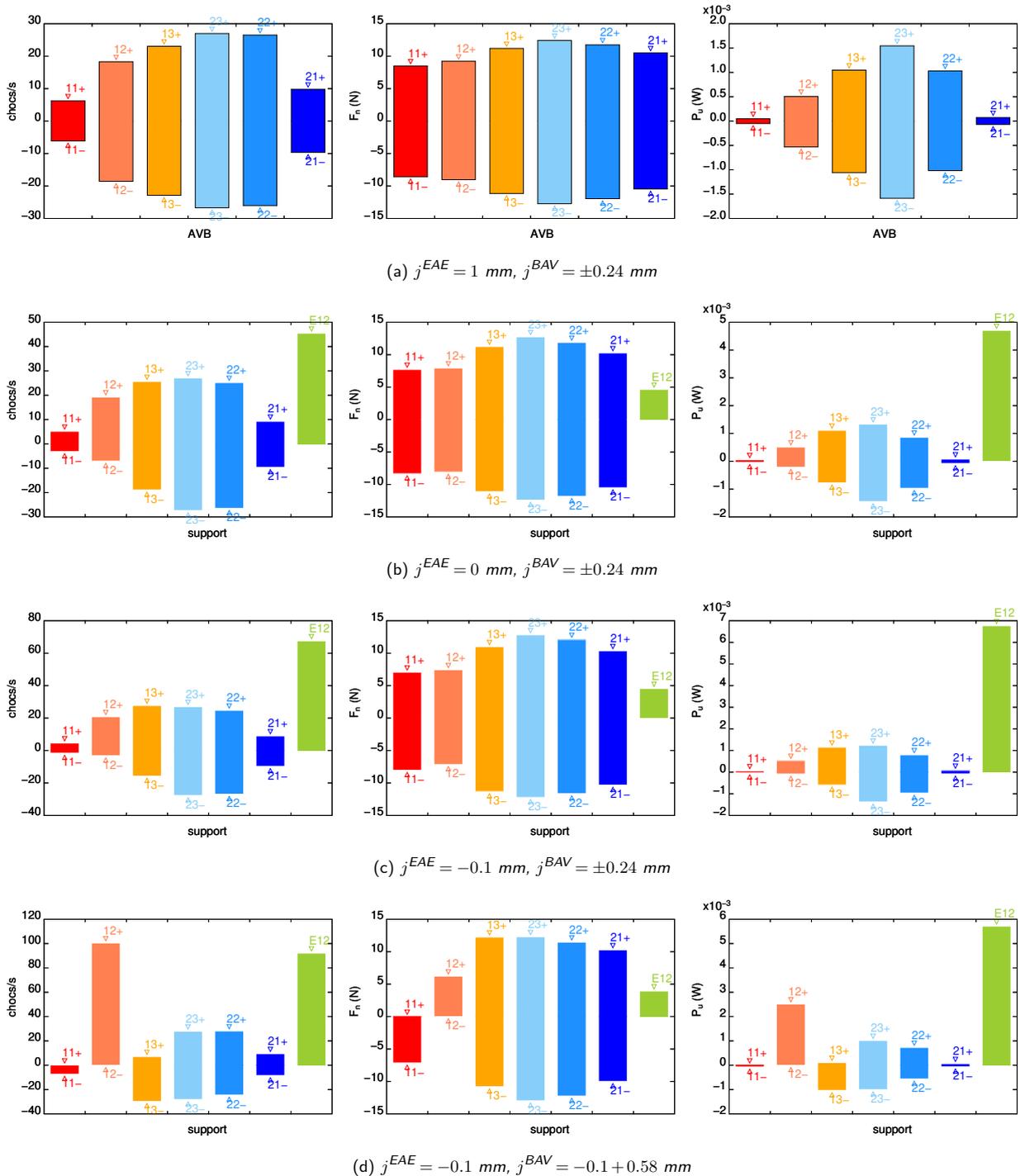


Figure 26 – Quantités d'intérêt quatre conditions de pré-chargement de l'étrier (200 modes, $\Delta t = 15.625 \mu s$)

		Note Technique DEN	Page 45/46
		Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
		Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise			

6 Conclusions et perspectives

A travers les exemples de cette note, on peut retenir que :

- le frottement est un phénomène fortement non-linéaire pouvant conduire à des régimes très différents en fonction des aléas du système,
- la modélisation des contacts frottants en présence d'une forte pré-charge peut être très sensible aux paramètres numériques utilisés (raideur et amortissement tangentiels K_t et C_t , pas de temps Δt , etc.),
 - par conséquent, une justification physique des paramètres pouvant être interprétés (comme la raideur tangentielle K_t) est souhaitable,
 - une valeur raisonnable pour l'amortissement tangentiel C_t doit être utilisée,
 - une étude de convergence avec le pas de temps est nécessaire,
- une maîtrise des algorithmes utilisés est impérative afin de s'assurer de leur robustesse pour le cas traité.

A la suite des observations réalisées, de nouvelles recommandations ont été formulées, notamment sur le choix de K_t , C_t et Δt , et seront intégrées à la documentation de Gerboise.

Le dernier cas d'un tube de GV deviendra un cas-test (nommé test39_*.dgibi) à valeur d'exemple dans la prochaine version de Gerboise (4.12) dont la livraison est prévue courant 2019.

D'autres travaux comparant le modèle d'Antunes avec des méthodes itératives ou avec d'autres modèles de frottement plus complexes pourraient faire l'objet de travaux futurs.

	Note Technique DEN	Page 46/46
	Réf : SEMT/DYN/NT/2019-65358	
	Date : 13/09/2019	Indice : A
Modélisation des vibrations des tubes pré-chargés dans Gerboise		

Références

- [1] M. Hassan and R. Rogers, "Friction modelling of preloaded tube contact dynamics," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 235, no. 22, pp. 2349–2357, 2005.
- [2] Cast3M, "Code de calcul aux éléments finis du CEA." <http://www-cast3m.cea.fr>, 2019.
- [3] E. De Langre, B. Beaufils, and H. Paurobally, "Code GERBOISE. Description de la version 1," Note Technique DENT/89.335, CEA, 1989.
- [4] E. De Langre, "Code GERBOISE. Description de la version 1b et spécification de la version 2," Note Technique DENT/90.286, CEA, 1990.
- [5] E. Berger, "Friction modeling for dynamic system simulation," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 55, no. 6, pp. 535–577, 2002.
- [6] F. Marques, P. Flores, J. C. Pimenta Claro, and H. M. Lankarani, "A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 86, p. 1407, Nov. 2016.
- [7] E. Pennestrì, V. Rossi, P. Salvini, and P. P. Valentini, "Review and comparison of dry friction force models," *Nonlinear dynamics*, vol. 83, no. 4, pp. 1785–1801, 2016.
- [8] C. De Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 40, no. 3, pp. 419–425, 1995.
- [9] K. Johansson and C. Canudas-De-Wit, "Revisiting the lugre friction model," *IEEE control Systems*, vol. 28, no. 6, pp. 101–114, 2008.
- [10] J. Antunes, F. Axisa, B. Beaufils, and D. Guilbaud, "Coulomb friction modelling in numerical simulations of vibration and wear work rate of multispan tube bundles," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 4, pp. 287–304, 1990.
- [11] A. De Gayffier and I. Politopoulos, "Modélisation du frottement par pénalisation. Analyse et évaluation des méthodes utilisées dans l'opérateur DYNE de CASTEM 2000," Rapport DMT/97.066, CEA, 1997.
- [12] M. Yetisir and N. Fisher, "Prediction of pressure tube fretting-wear damage due to fuel vibration," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 176, no. 3, pp. 261–271, 1997.
- [13] J. Oden and J. Martins, "Models and computational methods for dynamic friction phenomena," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 52, no. 1-3, pp. 527–634, 1985.
- [14] D. Karnopp, "Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems," *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, vol. 107, 1985.
- [15] E. De Langre, L. Vivan, and T. Lena, "Code GERBOISE. Description de la version 2," Note Technique DENT/91.188, CEA, 1991.
- [16] B. Prabel and P. Piteau, "Dossier de Développement de GERBOISE 4.11," Note Technique DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/NT/17-014/A, CEA, 2017.
- [17] J. Antunes, P. Piteau, X. Delaune, and L. Borsoi, "A new method for the generation of representative time-domain turbulence excitations," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 58, pp. 1 – 19, 2015.