



Une méthode HHO explicite : une application à l'équation des ondes acoustiques

Morgane Steins, Florence Drui, Olivier Jamond, Alexandre Ern

► To cite this version:

Morgane Steins, Florence Drui, Olivier Jamond, Alexandre Ern. Une méthode HHO explicite : une application à l'équation des ondes acoustiques. CJC-MA : Congrès des Jeunes Chercheurs en Mathématiques Appliquées, Oct 2021, Palaiseau, France. cea-04468923

HAL Id: cea-04468923

<https://cea.hal.science/cea-04468923>

Submitted on 20 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

UNE MÉTHODE HHO EXPLICITE

APPLICATION A L'ÉQUATION DES ONDES ACOUSTIQUES

MORGANE STEINS

CEA

FLORENCE DRUI

OLIVIER JAMOND

ENPC & INRIA

ALEXANDRE ERN

28 OCTOBRE 2021

HHO = *Hybrid High Order*

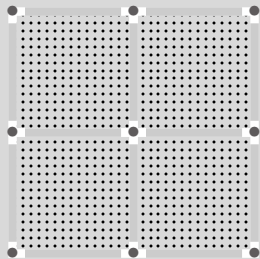
- *Hybrid* : Des inconnues portant sur différents éléments de maillage (cellules et faces des cellules)
- *High-Order* : Montée en ordre facile

La méthode HHO

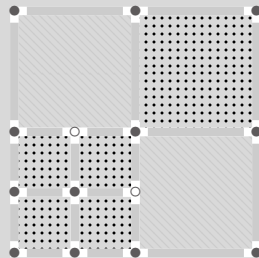
- Introduite en 2014 pour la **diffusion stationnaire** et l'élasticité linéaire (Di Pietro, Ern, Lemaître 2014; Di Pietro, Ern 2015)
- Adaptée à la mécanique (Abbas, Ern, Pignet 2018 & 2019)
- Peu d'études en dynamique : premières études sur l'équation des ondes en 2020 dont des propositions de schéma d'intégration en temps et l'analyse de convergence en temps continu (Burman, Duran, Ern, Steins 2020; Burman, Duran, Ern 2021).

Apports de la méthode HHO

- Propriété de conservation locale
- Utilisation facile de maillages polyédriques quelconques
- Gestion *naturelle* des **hanging-nodes** lors du raffinement local du maillage



→
Raffinement



● Noeud
▣ Quadrangle

● Noeud ○ hanging node
▣ Quadrangle ▤ Polygone à 5 faces

1 Présentation de la méthode HHO pour la diffusion

2 Application à l'équation des ondes acoustiques

3 Explicitation de la marche en temps



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE HHO POUR LA DIFFUSION

Problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Maillage

On définit $\mathcal{C}_h$ subdivision polyédrique du domaine Ω formé de

- cellules $C \in \mathcal{C}$
- faces $F \in \mathcal{F}$.

h_C : diamètre d'une cellule C .

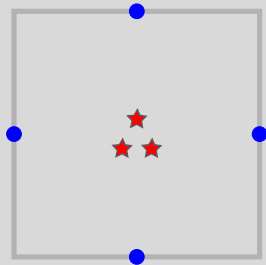
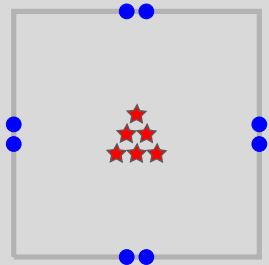
h : diamètre maximal des cellules C .

μ_C : le coefficient de diffusion constant par mailles.

Espaces des degrés de liberté

- **Faces** : $P_{d-1}^k(F)$ et **Cellules** : $P_d^{k+1}(C)$
- **DdLs d'une cellule** : $(w_C, (w_F)_{F \in \partial C}) \in \hat{\mathcal{U}}_C^k = (P_d^{k+1}(C) \times \bigtimes_{F \in \partial C} P_{d-1}^k(F))$
- **DdLs de Ω + condition aux limites** : $((w_C)_{C \in \mathcal{C}_h}, (w_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$

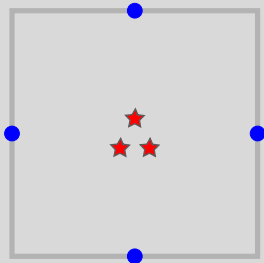
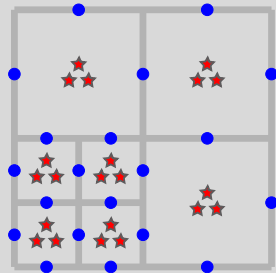
Degrés de liberté

 $k = 0$  $k = 1$

Espaces des degrés de liberté

- **Faces** : $P_{d-1}^k(F)$ et **Cellules** : $P_d^{k+1}(C)$
- **DdLs d'une cellule** : $(w_C, (w_F)_{F \in \partial C}) \in \hat{\mathcal{U}}_C^k = (P_d^{k+1}(C) \times \bigtimes_{F \subset \partial C} P_{d-1}^k(F))$
- **DdLs de Ω + condition aux limites** : $((w_C)_{C \in \mathcal{C}_h}, (w_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$

Degrés de liberté

 $k = 0$ Assemblage $k = 0$

Problème global

Trouver $\hat{u}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$ tel que, pour tout $\hat{w}_h = ((w_C)_C, (w_F)_F) \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) = \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \int_C f|_C w_C.$$

Problème global

Trouver $\hat{u}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$ tel que, pour tout $\hat{w}_h = ((w_C)_C, (w_F)_F) \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) = \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \int_C f|_C w_C.$$

Forme globale

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) := \sum_{C \in \mathcal{C}_h} b_C(\hat{u}_C, \hat{w}_C) := \quad + \quad .$$

Problème global

Trouver $\hat{u}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$ tel que, pour tout $\hat{w}_h = ((w_C)_C, (w_F)_F) \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) = \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \int_C f|_C w_C.$$

Forme globale

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) := \sum_{C \in \mathcal{C}_h} b_C(\hat{u}_C, \hat{w}_C) := \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \mu_C \left[(\nabla p_C(\hat{u}_C), \nabla p_C(\hat{w}_C))_C \right] + \quad .$$

Problème global

Trouver $\hat{u}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$ tel que, pour tout $\hat{w}_h = ((w_C)_C, (w_F)_F) \in \hat{\mathcal{U}}_h^k$

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) = \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \int_C f|_C w_C.$$

Forme globale

$$b_h(\hat{u}_h, \hat{w}_h) := \sum_{C \in \mathcal{C}_h} b_C(\hat{u}_C, \hat{w}_C) := \sum_{C \in \mathcal{C}_h} \mu_C \left[(\nabla p_C(\hat{u}_C), \nabla p_C(\hat{w}_C))_C \right] + \left[s_C(\hat{u}_C, \hat{w}_C) \right].$$

La méthode HHO repose sur deux ingrédients

- Un opérateur de reconstruction du gradient
- Un opérateur de stabilisation

1 - Opérateur local de reconstruction du gradient

Objectif : Reconstruire un gradient à partir des DdLs cellule ET face.

$p_C(\hat{u}_C) : \hat{\mathcal{U}}_C^k \rightarrow \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$ défini pour tout $\hat{u}_C = (u_C, u_{\partial C}) \in \hat{\mathcal{U}}_C^{l,k}$,

Gradient reconstruit : $\nabla p_C(\hat{u}_C) \in \nabla \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$

1 - Opérateur local de reconstruction du gradient

Objectif : Reconstruire un gradient à partir des DdLs cellule ET face.

$p_C(\hat{u}_C) : \hat{\mathcal{U}}_C^k \rightarrow \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$ défini pour tout $\hat{u}_C = (u_C, u_{\partial C}) \in \hat{\mathcal{U}}_C^{l,k}$,

$$(\nabla p_C(\hat{u}_C), \nabla w)_C = (\nabla u_C, \nabla w)_C, \quad \forall w \in \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$$

Gradient reconstruit : $\nabla p_C(\hat{u}_C) \in \nabla \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$

1 - Opérateur local de reconstruction du gradient

Objectif : Reconstruire un gradient à partir des DdLs cellule ET face.

$p_C(\hat{u}_C) : \hat{\mathcal{U}}_C^k \rightarrow \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$ défini pour tout $\hat{u}_C = (u_C, u_{\partial C}) \in \hat{\mathcal{U}}_C^{l,k}$,

$$(\nabla p_C(\hat{u}_C), \nabla w)_C = (\nabla u_C, \nabla w)_C + \boxed{(u_{\partial C} - u_{C|\partial C}, \nabla w|_{\partial C} \cdot \vec{n}_{\partial C})_{\partial C}}, \quad \forall w \in \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$$

Gradient reconstruit : $\nabla p_C(\hat{u}_C) \in \nabla \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$

1 - Opérateur local de reconstruction du gradient

Objectif : Reconstruire un gradient à partir des DdLs cellule ET face.

$p_C(\hat{u}_C) : \hat{\mathcal{U}}_C^k \rightarrow \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$ défini pour tout $\hat{u}_C = (u_C, u_{\partial C}) \in \hat{\mathcal{U}}_C^{l,k}$,

$$(\nabla p_C(\hat{u}_C), \nabla w)_C = (\nabla u_C, \nabla w)_C + \boxed{(u_{\partial C} - u_{C|\partial C}, \nabla w|_{\partial C} \cdot \vec{n}_{\partial C})_{\partial C}}, \forall w \in \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$$

Gradient reconstruit : $\nabla p_C(\hat{u}_C) \in \nabla \mathcal{P}_d^{k+1}(C)$

2 - Opérateur local de stabilisation

Objectif : Imposer de façon faible la consistance entre la valeur des DdLs face et la trace des DdLs cellule

$$s_C(\hat{u}_C, \hat{w}_C) := \sum_{F \in \partial C} \frac{1}{h_C} \left(\pi_F^k(u_F - u_{C|F}), \pi_F^k(w_F - w_{C|F}) \right)_F$$

Consistance

On définit $\hat{l}_C^k : H^1(C) \rightarrow \hat{\mathcal{U}}_C^k$ l'opérateur de projection local tel que pour tout $w \in H^1(C)$

$$\hat{l}_C^k w := \left(\pi_C^{k+1} w, \pi_{\partial C}^k w \right).$$

Alors il existe $K > 0$ telle que, pour tout $w \in H^{k+2}(T)$

$$\|\nabla w - \nabla p_C(\hat{l}_C^k w)\|_C + s_h(\hat{l}_C^k w, \hat{l}_C^k w)^{1/2} \leq K h_C^{k+1} |w|_{H^{k+2}(C)} \quad (1)$$

Stabilité

Équivalence à la semi-norme H^1 locale

$$\|\nabla p_C(\hat{u}_C)\|_C^2 + s_C(\hat{u}_C, \hat{u}_C) \sim \|\nabla u_C\|_C^2 + \|u_C - u_{\partial C}\|_{\partial C}^2 \quad (2)$$

Convergence

On gagne un ordre par rapport aux éléments finis : l'erreur en norme H^1 décroît comme h^{k+1}

$$b_h(\hat{l}_h^k u - \hat{u}_h, \hat{l}_h^k u - \hat{u}_h) \leq C h^{k+1} |u|_{H^{k+2}(\Omega)} \quad (3)$$

Traduction algébrique du problème

On assemble les matrices locales et on obtient, par bloc (DdLs cellule puis face) avec $\mathbb{A}$ la matrice de rigidité hybride (cellule+face),

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{CC} & \mathbb{A}_{CF} \\ \mathbb{A}_{FC} & \mathbb{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_C \\ U_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_C \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Résolution et condensation statique

Remarque : A_{CC} est bloc-diagonale

- ➡ On fait une condensation statique (complément de Schur) pour ne résoudre le problème que sur les faces

$$\left(\mathbb{A}_{FF} - \mathbb{A}_{FC} \mathbb{A}_{CC}^{-1} \mathbb{A}_{CF} \right) U_F = \tilde{F}_F$$

- ➡ Une fois U_F calculée, U_C s'obtient par post traitement local.



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

APPLICATION À L'ÉQUATION DES ONDES ACOUSTIQUES

Équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boxed{\partial_t^2 u} - \nabla \cdot (\mu \nabla u) = f & \text{sur } \Omega \times [0; T_f] \\ u(\cdot, t = 0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u_t(\cdot, t = 0) = v_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0; T_f] \end{array} \right.$$

avec $f \in C^0((0, T_f); L^2(\Omega))$, $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $T_f > 0$ le temps final.

Forme continue globale

Trouver $\hat{u}_h(\cdot, t) \in C^2([0; T_f]; \hat{\mathcal{U}}_h^k)$ telle que

$$b_h(\hat{u}_h(\cdot, t), \hat{w}_h) = (f(t), w_C)_\Omega, \quad \forall \hat{w}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k, \forall t \in [0; T_f].$$

Forme continue globale

Trouver $\hat{u}_h(\cdot, t) \in C^2([0; T_f]; \hat{\mathcal{U}}_h^k)$ telle que

$$\boxed{\partial_t^2 (\hat{u}_c(\cdot, t), w_c)_\Omega} + b_h(\hat{u}_h(\cdot, t), \hat{w}_h) = (f(t), w_c)_\Omega, \quad \forall \hat{w}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k, \forall t \in [0; T_f].$$

Forme continue globale

Trouver $\hat{u}_h(\cdot, t) \in C^2([0; T_f]; \hat{\mathcal{U}}_h^k)$ telle que

$$\partial_t^2 (\hat{u}_c(\cdot, t), w_c)_\Omega + b_h(\hat{u}_h(\cdot, t), \hat{w}_h) = (f(t), w_c)_\Omega, \quad \forall \hat{w}_h \in \hat{\mathcal{U}}_h^k, \forall t \in [0; T_f].$$

Forme matricielle globale

- On note la matrice de masse locale $\mathbb{M}_{cc}$
- On remarque que les DdLs de faces n'ont pas de masse

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_t^2 \begin{pmatrix} U_c(t) \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{cc} & \mathbb{A}_{c\mathcal{F}} \\ \mathbb{A}_{\mathcal{F}c} & \mathbb{A}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_c(t) \\ U_{\mathcal{F}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_c(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \forall t \in [0; T_f].$$

Les différences centrées : le standard en éléments finis

Avantage : En éléments finis, cet algorithme est explicite, i.e. nécessite seulement l'inversion d'une matrice de masse.

Peut-on l'utiliser pour la méthode HHO ?

$$\frac{1}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{CC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C^{n+1} - 2U_C^n + U_C^{n-1} \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{CC} & \mathbb{A}_{CF} \\ \mathbb{A}_{FC} & \mathbb{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_C^n \\ U_{\mathcal{F}}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_C(t^n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

où les inconnues sont U_C^{n+1} et $U_{\mathcal{F}}^n$.

Ce système linéaire se résout en deux étapes :

- ✗ L'équation de couplage statique cellule-face, la matrice creuse $\mathbb{A}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ couple toutes les faces entre elles

$$\mathbb{A}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} U_{\mathcal{F}}^n = -\mathbb{A}_{\mathcal{F}C} U_C^n \quad (4)$$

- ✓ L'équation d'évolution des cellules, la masse $\mathbb{M}_{CC}$ est bloc-diagonale

$$\mathbb{M}_{CC} U_C^{n+1} = F_C^{n+1} + \mathbb{M}_C (2U_C^n - U_C^{n-1}) - \Delta t^2 (\mathbb{A}_{CC} U_C^n + \mathbb{A}_{CF} U_{\mathcal{F}}^n) \quad (5)$$



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

EXPLICITATION DE LA MARCHE EN TEMPS

Splitting itéré de la matrice de rigidité face-face

On transforme l'équation

$$\mathbb{A}_{\mathcal{FF}} \mathbf{U}_{\mathcal{F}}^n = -\mathbb{A}_{\mathcal{FC}} \mathbf{U}_{\mathcal{C}}^n \quad (6)$$

en M problèmes successifs à résoudre

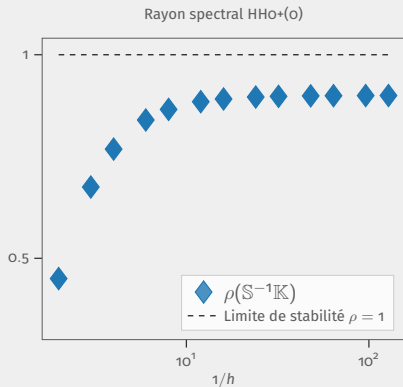
$$\mathbb{S}_{\mathcal{FF}} \mathbf{U}_{\mathcal{F}}^{n-1,m} = -\mathbb{A}_{\mathcal{FC}} \mathbf{U}_{\mathcal{C}}^n - \mathbb{K}_{\mathcal{FF}} \mathbf{U}_{\mathcal{F}}^{n-1,m-1}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (7)$$

avec $\mathbb{K}$ la matrice de reconstruction des gradients et $\mathbb{S}$ la matrice de stabilisation : $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{S}$.

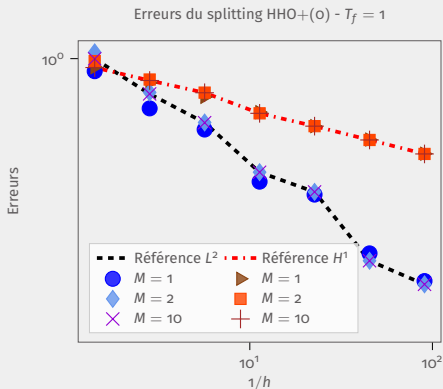
Validité

- **Condition** : le rayon spectral de $\mathbb{S}_{\mathcal{FF}}^{-1} \mathbb{K}_{\mathcal{FF}}$ doit être strictement inférieur à 1.
- Cette condition peut-être satisfaite en *scalant* $\mathbb{S}$ par σ suffisamment grand. Dans nos études nous avons $\sigma = 2.2$.

Domaine $\Omega = [0; 1]^2$, solution manufacturée $u(x, y, t) = t^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $k = 0$



(a) HHO+(o) - Rayon spectral



(b) HHO+(o) - $M \in \{1, 2, 10\}$

FIGURE – Étude du splitting pour $k = 0$

Perspectives

- ➡ Procéder à l'analyse numérique (en s'appuyant sur Burman, Duran, Ern, Steins 2020)
- ➡ Exploitation pour la mécanique des structures, où la méthode HHO permet de s'affranchir du problème de verrouillage volumique
- ➡ Estimations d'erreurs à posteriori pour l'adaptation espace-temps pour l'équation des ondes

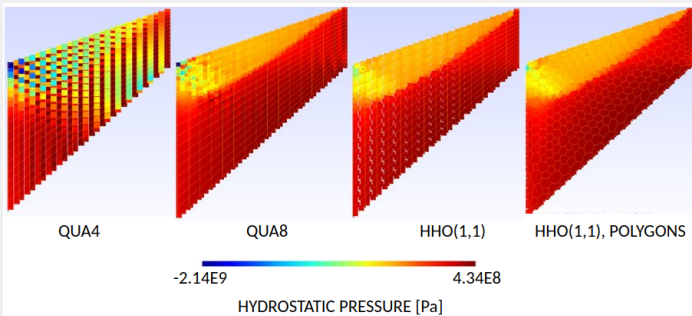


FIGURE – Comparaison FEM/HHO sur la membrane de Cook