# Constante de stabilité pour les éléments finis de Fortin-Soulie

**Erell JAMELOT**, Service de Thermo-hydraulique et de Mécanique des Fluides - CEA Saclay

Le problème de Stokes caractérise l'état stationnaire d'un écoulement newtonien incompressible. Soit $\Omega \subset R^d$, $d \in \{2, 3\}$ un domaine borné et connexe. On note $u$ la vitesse du fluide et $p$ sa pression. On considère le problème de Stokes, qui s'écrit ainsi :

$$\text{Trouver } (u, p) \text{ tel que } -\nu\Delta u + \nabla p = u, \quad \nabla \cdot u = 0, \tag{1}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour le champ de vitesse $u$ et une condtion de normalisation pour le champ de pression $p$ :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \text{ et } \int_\Omega p = 0.$$

La première équation du Problème (1) correspond à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. La seconde équation du Problème (1) correspond à l'équation de conservation de la masse. Le paramètre $\nu > 0$ représente la viscosité cinématique du fluide et le champ vectoriel $f$ représente la densité de forces extérieures. Nous proposons d'analyser la discrétisation du problème de Stokes (1) avec des éléments finis non conformes d'ordre 2 en dimension 2 : les éléments de Fortin-Soulie, [2]. Nous évaluons la constante de stabilité dans le cas d'un champ de vitesse peu régulier [3, Prop. 6], ce qui permet d'obtenir des estimations d'erreur a priori dans le cas où $u \notin (H^2(\Omega))^2$. Pour cela, on s'inspire de la preuve du Lemme 4 du papier original de Crouzeix-Raviart [1], en l'adaptant au cas de l'approximation d'un champ de vitesse peu régulier. Puis nous donnons des résultats numériques dans ce cas, et on montre l'importance d'utiliser une méthode de reconstruction de vitesse à divergence nulle [4].

[1] M. Crouzeix, P.-A. Raviart. *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.* RAIRO, Sér. Anal. Numer., **7(3)**, 1973.

[2] M. Fortin, M. Soulie. *A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, **19(4)**, 1983.

[3] E. Jamelot. *Improved stability estimates for solving Stokes problem with Fortin-Soulie finite elements.* `https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-03833616v2`, 2023. Working paper or preprint.

[4] A. Linke. *On the Role of the Helmholtz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **268**, 2014.

Contact : `erell.jamelot@cea.fr`