



HAL
open science

Schéma MFPA symétrique appliqué au code TrioCFD

Peitavy Andrew

► **To cite this version:**

| Peitavy Andrew. Schéma MFPA symétrique appliqué au code TrioCFD. 2022. cea-04321119

HAL Id: cea-04321119

<https://cea.hal.science/cea-04321119>

Submitted on 4 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

SCHÉMA MPFA SYMÉTRIQUE APPLIQUÉ AU CODE TRIOCFD

1ères journées scientifiques de l'ISAS, 16 et 17 mai 2022

`andrew.peitavy@cea.fr`

Doctorant: A. Peitavy Encadrant CEA: E. Jamelot Directeur de thèse CEA: C. Le Potier

Directeur de thèse UGE: E. Chénier Collaboration académique: R. Eymard

CEA SACLAY DES/ISAS/DM2S/LMSF/ ET UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL (UGE)

Contexte

Objectifs : Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Contexte

Objectifs : Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Navier-Stokes isotherme et incompressible

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Objectif :

Améliorer la précision du code de résolution thermohydraulique de la DES à un nombre de degré de liberté fixé.

Système semi-discrétisé :

$$\begin{aligned} M \frac{dU}{dt} + AU + L(U)U + B^t P &= F, \\ -BU &= 0, \\ U(t=0) &= U^0 \end{aligned}$$



► Cavité entraînée :

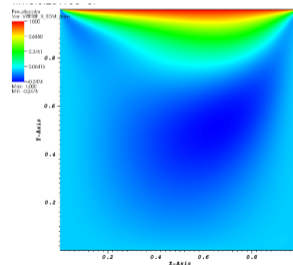


Figure 1 – Solution cavité entraînée avec TrioCFD

Discrétisation en temps (Schéma Euler semi-implicite) :

1 **Initialisation** : U^0 donnée, P^0 approché.

2 **Étape de prédiction** : Calculer U^* la solution de

$$\delta t^{-1} MU^* + AU^* + L(U^m)U^m + B^t P^m = F^m + \delta t^{-1} MU^m$$

Nb : On peut avoir $BU^* \neq 0$

3 **Calcul de la pression** : Calculer P' la solution de

$$BM^{-1} B^t P' = \delta t^{-1} BU^*, \quad P^{m+1} = P' + P^m$$

4 **Étape de correction** : Calculer U^{m+1} la solution de

$$MU^{m+1} = MU^* - \delta t B^t P'$$

Dans TrioCFD, ces étapes sont rapides car **M est diagonale** pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart.

En 3D, pour un schéma aussi robuste qu'en 2D, il faut rajouter des ddl en pression, ce qui augmente la taille du système de solveur de pression.

Problème de Stokes stationnaire

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p & = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = 0 \end{cases}$$

- \mathbf{u} est la vitesse, p la pression du fluide. Les données ν (la viscosité cinématique) et \mathbf{f} (le terme source) sont données.

Soit un maillage triangulaire \mathcal{T}_h composé de faces $F \in \mathcal{F}_h$.

Problème variationnel discret pour le problème de Stokes

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{h,0} \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{h,0} \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_h : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \nu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \end{cases} \quad \begin{cases} b : \mathbf{X}_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R} \\ b(\mathbf{v}_h, q_h) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) q_h \end{cases}$$

On définit l'espace des vitesses :

$$\mathbf{X}_{h,0} := \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega), / (\mathbf{v}_h)|_T \in \mathbf{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \int_F [\mathbf{v}_h] = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \}$$

Plusieurs choix pour la pression :

Crouzeix-Raviart non-conforme

- ▶ $M_h := \{ q_h \in L_0^2(\Omega) / q_h \in P^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \}$
- ▶ Nb : d composantes pour la vitesse.
- ▶ Modes parasites

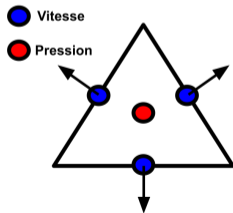


Figure 2 – DDLs Crouzeix-Raviart non-conforme, $d = 2$

TrioCFD :

- ▶ $M_h := \{ q_h \in Q_{0,h} + Q_{1,h} \}$
 $Q_{0,h} := L_0^2(\Omega) \cap P^0(\mathcal{T}_h), Q_{1,h} := L_0^2(\Omega) \cap P_{LG}^1(\mathcal{T}_h)$
- ▶ Encore des modes parasites pour $d = 3$, $(P^1 + P^0 + P^a)$

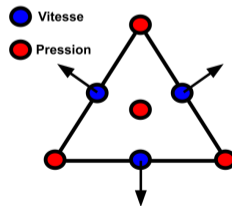


Figure 3 – DDLs TrioCFD, $d = 2$

Soit ϕ une fonction de $H^1(\Omega)$. On considère le problème de Stokes suivant :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) p_h = (\nabla \phi, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{h,0} \\ - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\mathbf{u}_h) q_h = 0 \quad \forall q_h \in M_h \end{array} \right.$$

La solution est alors $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \phi)$. Or pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart, on a

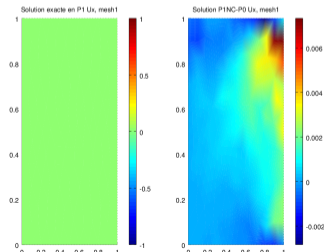
$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \phi \cdot \mathbf{v}_h &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \phi \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \int_{\partial T} \phi \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \phi \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \phi [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] \end{aligned}$$

$$u = 0, p = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y + y^4 - \frac{7}{12}$$

Le terme $\sum_F \int_F \phi [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]$ est nul si ϕ est constante ("Patch test").
Autrement, ce terme devient une "source numérique" pour $\nu \Delta \mathbf{u}_h$.

↳ Erreur en vitesse qui dépend de la viscosité.

Néanmoins la convergence est garantie.



Contexte

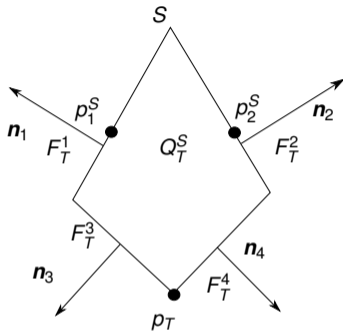
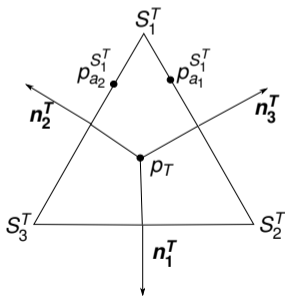
Objectifs : Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Stratégie du schéma

- ▶ Découper nos triangles en trois quadrangles
- ▶ Ajouter deux inconnues auxiliaires de pression par arête.
- ▶ Exprimer le gradient de la pression à l'aide des inconnues auxiliaires de pression sur les arêtes et celle de la cellule.



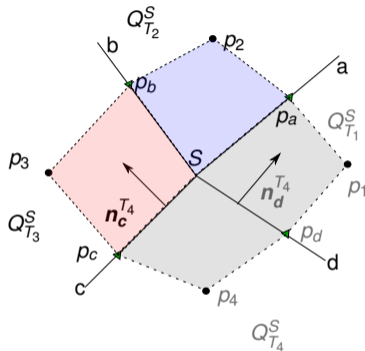
$$G_T^S = \frac{1}{|Q_T^S|} \left((p_1^S - p_T) \cdot \mathbf{n}_1 + (p_2^S - p_T) \cdot \mathbf{n}_2 \right) \quad (1)$$

La formule est exacte sur des simplexes pour des fonctions affines.

Stratégie du schéma

- ▶ Éliminer les inconnues auxiliaires en imposant la continuité du flux du gradient sur les arêtes.
- ▶ Éléments finis \mathbf{X}_h pour les composantes de la vitesse (seul la matrice de couplage vitesse/pression est modifiée).
- ▶ On garde les degrés du bord car on ne peut pas y imposer la continuité des flux.
- ▶ On applique ce schéma pour discrétiser le gradient de pression. On résout donc le problème de Stokes avec :

$$\tilde{b}_h(v_h, q_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q \in \Omega(T)} \int_Q \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q_h$$



La continuité des flux entre deux triangles T_2 et T_3 , partageant l'arête b , et le sommet S s'écrit

$$\nabla_{T_3}^S p \cdot \mathbf{n}_b = \nabla_{T_2}^S p \cdot \mathbf{n}_b$$

Intégration par parties

On n'a pas l'égalité suivante :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \rho_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h \neq - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h \rho_T \cdot \mathbf{v}_h \implies B \text{ ne discrétise pas la divergence}$$

Système considéré

$$\begin{pmatrix} A & G_{int} & G_b \\ D & 0 & 0 \\ G_b^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P_{int} \\ P_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ G_b^T U_e \end{pmatrix}$$

Avec :

- ▶ $0 \leq i, j \leq dN_F$
- ▶ $0 \leq k \leq N_T$
- ▶ $0 \leq l \leq 2N_{F_b}$

▶ La base pour la vitesse est donnée par $(\phi_F^\alpha)_{F \in \mathcal{F}_f}^{\alpha \in \{x, y\}}$ et pour la pression $(\psi_T^{int})_{T \in \mathcal{T}_h}$ et $(\psi_l^b)_{0 \leq l \leq 2N_{F_b}}$

▶ La vitesse est imposée sur l'épaisseur du bord avec l'équation $G_b^T U = G_b^T U_e$

$$(A)_{ij} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \phi_i : \nabla \phi_j$$

$$(G_{int})_{ki} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h \psi_k^{int} \cdot \phi_i$$

$$(G_b)_{li} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h \psi_l^b \cdot \phi_i$$

$$(F)_i := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \phi_i$$

$$(D)_{ik} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \psi_k^{int} \operatorname{div} \phi_i$$

Contexte

Objectifs : Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Nomenclature des différentes méthodes comparées

- ▶ $u_h^{CR} : \mathbf{x}_{h,0}^{CR} / (\mathbb{P}^0)$
- ▶ $u_h^{Trio} : \mathbf{x}_{h,0}^{CR} / (\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)$
- ▶ $u_h^{Mps} : \mathbf{x}_{h,0}^{CR} / MPFA^{SYM} + \text{divergence } P0$

Nombre de degrés de liberté pour la pression :

h	ρ_h^{CR}	ρ_h^{Trio}	ρ_h^{Mps}
1.00×10^{-1}	242	380	322
5.00×10^{-2}	1054	1622	1214
2.50×10^{-2}	4262	6474	4582
1.25×10^{-2}	16794	25352	17434

- ▶ Erreur exacte pour une vitesse affine et une pression affine pour TrioCFD et *Mps* mais pas pour *CR*.
- ▶ Erreur exacte pour une vitesse affine et une pression quadratique pour TrioCFD en 2D, mais plus de ddl (en 3D cela s'accroît).
- ▶ Plus de robustesse par rapport à la viscosité cinématique.

$$u_x = 0, u_y = 0$$

$$p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

h	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ u - u_h^{Mps}\ _0$
1.00×10^{-1}	3.01×10^{-3}	1.04×10^{-5}	1.44×10^{-4}
5.00×10^{-2}	6.93×10^{-4}	6.52×10^{-7}	1.75×10^{-5}
2.50×10^{-2}	1.63×10^{-4}	4.02×10^{-8}	2.09×10^{-6}
1.25×10^{-2}	4.14×10^{-5}	2.54×10^{-9}	3.91×10^{-7}
τ	$\tau_u^{CR} = 2.06$	$\tau_u^{\text{Trio}} = 4.00$	$\tau_u^{Mps} = 2.84$

h	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ p - p_h^{Mps}\ _0$
1.00×10^{-1}	1.88×10^{-1}	2.48×10^{-2}	1.99×10^{-2}
5.00×10^{-2}	9.06×10^{-2}	5.49×10^{-3}	4.31×10^{-3}
2.50×10^{-2}	4.40×10^{-2}	1.37×10^{-3}	1.09×10^{-3}
1.25×10^{-2}	2.22×10^{-2}	3.50×10^{-4}	2.78×10^{-4}
τ	$\tau_p^{CR} = 1.03$	$\tau_p^{\text{Trio}} = 2.05$	$\tau_p^{Mps} = 2.05$

- ▶ $\tau_u^{CR} \leq \tau_u^{Mps} \leq \tau_u^{\text{Trio}}$
- ▶ En 3D TrioCFD : $P^1 + P^0 + P^2$

$$u_x = \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x) - 1), u_y = -\sin(2\pi x)(\cos(2\pi y) - 1),$$

$$p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

h	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ u - u_h^{Mps}\ _0$
1.00×10^{-1}	2.69×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
5.00×10^{-2}	6.92×10^{-3}	5.84×10^{-3}	6.77×10^{-3}
2.50×10^{-2}	1.70×10^{-3}	1.45×10^{-3}	1.66×10^{-3}
1.25×10^{-2}	4.28×10^{-4}	3.65×10^{-4}	4.22×10^{-4}
τ	$\tau_u^{CR} = 1.99$	$\tau_u^{\text{Trio}} = 2.02$	$\tau_u^{Mps} = 1.98$

h	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ p - p_h^{Mps}\ _0$
1.00×10^{-1}	8.35×10^{-1}	1.14×10^{-0}	1.47×10^{-0}
5.00×10^{-2}	4.06×10^{-1}	6.08×10^{-1}	5.75×10^{-1}
2.50×10^{-2}	1.88×10^{-1}	2.89×10^{-1}	2.28×10^{-1}
1.25×10^{-2}	9.50×10^{-2}	1.45×10^{-1}	1.13×10^{-1}
τ	$\tau_p^{CR} = 1.05$	$\tau_p^{\text{Trio}} = 0.99$	$\tau_p^{Mps} = 1.23$

- ▶ $\tau_u \simeq 2$ et $\tau_p \simeq 1$ -> Ordre de convergence attendu.
- ▶ $\|p - p_h^{\text{Trio}}\|_0 \gtrsim \|p - p_h^{Mps}\|_0$

$$u_x = \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x) - 1), u_y = -\sin(2\pi x)(\cos(2\pi y) - 1), \\ \rho = x + y - 1$$

$\nu [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ u - u_h^{\text{Mps}}\ _0$
10^{-0}	2.68×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-1}	2.82×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-2}	8.70×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-3}	8.24×10^{-1}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}

$\nu [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	$\ \rho - \rho_h^{CR}\ _0$	$\ \rho - \rho_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ \rho - \rho_h^{\text{Mps}}\ _0$
10^{-0}	9.99×10^{-1}	1.40×10^{-0}	2.59×10^{-0}
10^{-1}	1.25×10^{-1}	1.40×10^{-1}	2.59×10^{-1}
10^{-2}	7.66×10^{-2}	1.40×10^{-2}	2.59×10^{-2}
10^{-3}	7.59×10^{-2}	1.40×10^{-3}	2.59×10^{-3}

- L'erreur en vitesse ne dépend plus de la viscosité. Les modes parasites en pression sont nuls.
- En 3D TrioCFD : $P^1 + P^0 + P^a$

$$u_x = \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x) - 1), u_y = -\sin(2\pi x)(\cos(2\pi y) - 1), \\ \rho = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y + y^4 - 7/12$$

$\nu [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ u - u_h^{\text{Mps}}\ _0$
10^{-0}	2.69×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-1}	3.35×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-2}	1.98×10^{-1}	2.45×10^{-2}	2.63×10^{-2}
10^{-3}	1.96×10^{-0}	2.44×10^{-2}	3.48×10^{-2}

$\nu [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	$\ \rho - \rho_h^{CR}\ _0$	$\ \rho - \rho_h^{\text{Trio}}\ _0$	$\ \rho - \rho_h^{\text{Mps}}\ _0$
10^{-0}	6.53×10^{-1}	8.97×10^{-1}	2.59×10^{-0}
10^{-1}	1.45×10^{-1}	8.99×10^{-2}	2.59×10^{-1}
10^{-2}	1.30×10^{-1}	1.08×10^{-2}	2.70×10^{-2}
10^{-3}	1.30×10^{-0}	6.13×10^{-3}	7.86×10^{-3}

- Cas générale : on est plus robuste par rapport à la viscosité.
- Mps : discrétisation du gradient \mapsto modes parasites en pression nulle

Contexte

Objectifs : Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Navier-Stokes (en cours)

- ▶ Terme instationnaire $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$
- ▶ Terme convectif $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$
- ▶ Cas tests de benchmark FVCA (en cours)

Implémentation en 3D (prévu)

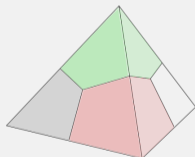


Figure 4 – MPFA en 3D

- ▶ Dans TrioCFD
- ▶ Nombre de ddls équivalent au 2D (1 par face + 3 par face du bord).

Schéma bien défini (en cours)

- ▶ Convergence et Stabilité

Condition de bord (perspective)

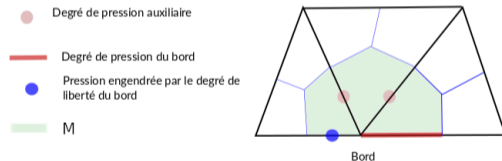


Figure 5 – Support d'une fonction de base MPFA symétrique pour un degré de liberté du bord

- ▶ Vitesse imposée sur une épaisseur du bord.



Merci pour votre attention ! Des questions ?

Merci de votre attention !

Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- ▶ C. Le Potier : *"A finite volume method for the approximation of highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes (2005)"*
- ▶ L. Agelas et R. Masson : *"Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes (2008)"*
- ▶ Ph. Emonot : *"Méthode de volumes éléments finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence (1992)"*
- ▶ S. Heib : *"Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée (2003)"*
- ▶ T. Fortin : *"Une méthode d'éléments finis à décomposition L2 d'ordre élevé motivée par la simulation des écoulements diphasiques bas Mach (2006)"*
- ▶ A. Linke : *"On the role of the Helmholtz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime (2014)"*
- ▶ F. Brezzi, J. Douglas et L. D. Marini : *"Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems (1985)"*
- ▶ P.-A. Raviart et J.-M. Thomas : *"A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems (1977)"*

Merci de votre attention !

Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- ▶ P. Ciarlet Jr. : "*T-coercivity : application to the discretization of Helmholtz-like problems (2012)*"
- ▶ P. Ciarlet Jr., E. Jamelot et A. Lefort : "*Étude de la T-coercitivité pour le problème de Stokes (2021)*"
- ▶ E. Chénier, R. Eymard, G. Henry et R. Herbin : "*Volumes finis colocalisés pour des problèmes de convection naturelle 3D : utilisation du solveur direct parallèle MUMPS (2007)*"
- ▶ CEA, "*Validation Report TrioCFD v1.8.4 (2021)*"



Merci pour votre attention ! Des questions ?