HAL
open science

Schéma MPFA symétrique pour le problème de Stokes

Andrew Peitavy, Erell Jamelot, Eric Chénier, Christophe Le Potier

To cite this version:

Andrew Peitavy, Erell Jamelot, Eric Chénier, Christophe Le Potier. Schéma MPFA symétrique pour le problème de Stokes. 2021. cea-04321110

HAL Id: cea-04321110

https://cea.hal.science/cea-04321110

Submitted on 4 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Schéma MPFA symétrique pour le problème de Stokes

Présentation au laboratoire MSME

Andrew Peitavy
Directeurs de thèse : E. Chénier, C. Le Potier
Collaboration : R. Eymard
Encadrante CEA : E. Jamelot

Présentation des travaux de thèse
CEA : DES/STMF/DM2S/LMSF

15 septembre 2021

Table des matières

1. Introduction
2. Schéma P1NC-MPFA pour Stokes
3. Résultats Numériques
4. Travaux envisagés pour la suite

Présentation

Parcours académique

- Master CEPS : (2019-2020) Parcours Mathématiques appliquées, calcul scientifique, équations aux dérivées partielles, probabilités, statistique
- Centrale Marseille : (2017/2020) Ecole d'ingénieur généraliste
- Université polytechnique de Catalogne : (2019-2019) M2 MAMME Barcelone
- Université d'Avignon : (2016-2017) L3 Physique et L3 Mathématiques

Service de Thermo-Hydraulique et Mécanique des Fluides

- Logiciels de simulation à différentes échelles
- Validation par expérience.
- Expertises dans le domaine énergétique.

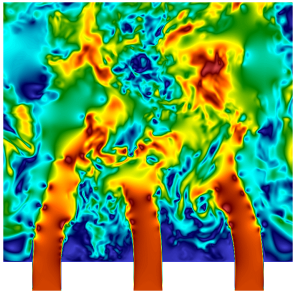
Laboratoire de Modélisation et de Simulation à l'échelle Système

- Modélisation physiques et simulation à l'échelle locale
- Neptune-CFD (EDF)
- TrioCFD (CEA)

TRIO-CFD

Cas d'étude de TrioCFD

- Développé au CEA depuis les années 90.
- Dédié à la simulation d'écoulement turbulents instationnaire à bas-Mach pour des cas industrielles.
- Modèles : DNS / ALE / RANS / Incompressible / quasi-compressible / Monophasique, diphasiques etc.
- Code orienté objet en C++, massivement parallèle, open source depuis 2015.
- Participation aux benchmarks FVCA8 (2017).
- Méthode Volumes Différences Finis (Harlow-Welch'65).
- Méthode Volumes Éléments Finis (Crouzeix-Raviart'73).
- Autres méthodes (PolyMAC, CoviMAC, DGFEM (en cours) ...)
- Schémas d'intégration en temps explicite et semi-implicite.



TRIO-CFD

Trouver $(u,p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\,\boldsymbol{u} + \nabla\,p &= \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \\ \boldsymbol{u}(t=0) &= \boldsymbol{u}^0 \end{aligned}$$

Trouver $(U,P) \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_p}$ tel que :

$$\begin{aligned} M\frac{dU}{dt} + AU + L(U)U + B^tP &= F, \\ -BU &= 0, \\ U(t=0) &= U^0 \end{aligned}$$

Discrétisation en temps (Schéma Euler semi-implicite) :

1. **Initialisation :** U^0 donnée, P^0 approché.
2. **Étape de prédiction :** Calculer U^* la solution de
$$\delta t^{-1}MU^* + AU^* + L(U^m)U^m + B^tP^m = F^m + \delta t^{-1}MU^m$$
Nb : On peut avoir $BU^* \neq 0$
3. **Calcul de la pression :** Calculer P' la solution de
$$BM^{-1}B^tP' = \delta t^{-1}BU^*, \quad P^{m+1} = P' + P^m$$
4. **Etape de correction :** Calculer U^{m+1} la solution de
$$MU^{m+1} = MU^* - \delta t B^tP'$$

Dans TrioCFD, ces étapes sont rapides car M est diagonale pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart.

Problème de Stokes

Navier-Stokes isotherme et incompressible

$$\begin{cases} \rho(\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}) - \mu\Delta\,\boldsymbol{u} + \nabla\,p = & \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = & 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \boldsymbol{u} = & \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega \\ \boldsymbol{u} = & \boldsymbol{h} \text{ dans } \Omega\times\{0\} \end{cases}$$

Stokes Stationnaire

Trouver $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{u}$ qui représente la vitesse du fluide, p la pression du fluide, $\boldsymbol{f}$ est un terme source, ν est la viscosité cinématique et Ω est un domaine ouvert borné connexe à frontière Lipschitzienne dans $\mathbb{R}^d$

Formulation variationnelle

Problème variationnel

Trouver $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{0,\Omega} & \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} \end{cases} \qquad \begin{cases} b : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R} \\ b(\boldsymbol{v}, q) = -\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) q \end{cases}$$

Théorème

Le problème de Stokes est bien posé. (Banach-Necas-Babuska + Isomorphisme de l'opérateur div de $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \to L_0^2$. $\forall q \in L_0^2(\Omega), \exists \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *tel que* $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = q$ *+ inégalité de Poincaré [Girault Raviart'86])*

Les éléments finis de Crouzeix-Raviart non conforme

- Soit $x \in T_\ell$, pour $\ell = \{1, \dots, N_T\}$.
  On note les sommets du triangles S_i et leurs faces opposées F_i pour $i \in \{1, \dots, \mathrm{d}+1\}$.
  On note alors les coefficients barycentrique de x : $\lambda_i^\ell(x) \in \mathbb{R}^+$ les coefficients tels que :

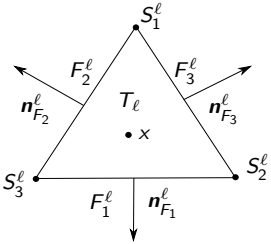
$$x = \sum_{S_i} \lambda_i^\ell(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{OS}_i^\ell$$

- On peut donner alors l'expression suivante :

$$\lambda_i^\ell(\boldsymbol{x}) = (d|T_\ell|)^{-1} \boldsymbol{n}_{F_i}^\ell \cdot (\boldsymbol{OS}_i^\ell - \boldsymbol{x}), \quad \nabla \lambda_i^\ell = -(d|T_\ell|)^{-1} \boldsymbol{n}_{F_i}^\ell$$

- Les fonctions de bases des éléments de Crouzeix-Raviart sont :

$$v_i = 1 - d\lambda_i$$



NB : Pour $d = 2$, on écrit la matrice de masse (Preuve : Utiliser une formule de quadrature) :

$$M_{i,j} = \sum_{T|F_i,F_j \in T} \int_T v_i v_j \, d\boldsymbol{x} = \delta_{i,j} \frac{|T|}{3}.$$

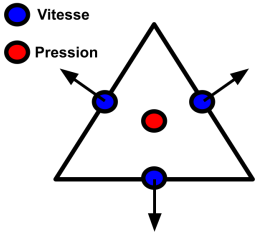
Les éléments finis de Crouzeix-Raviart non conforme

- **Triangulation :** $\mathcal{T}_h = \bigcup_{\ell=1}^{N_T} T_\ell\,, \quad \mathcal{F}_h = \{F \,/\, \overline{F} = \overline{T}_\ell \cap \overline{T}_{\ell'}\}$
- $X_h^{CR} = \{v_h \in \mathbb{P}^1_{disc} / \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [v_h] ds = 0\}$

  avec $[v_h]_{|F} = (v_{T_\ell} - v_{T_{\ell'}}) \cdot \boldsymbol{n}_{F_\ell}$ pour $\overline{F} = \overline{T}_\ell \cap \overline{T}_{\ell'}$

  Vitesse : $\boldsymbol{X}_{h,0}^{CR} = \{\boldsymbol{v}_h \in (X_h^{CR})^d / \boldsymbol{v}_{h|\partial\Omega} = 0\}$
- Pression : $M_h(\Omega) = L_0^2(\Omega) \cap \mathbb{P}^0$.

- $\boldsymbol{X}_{h,0}^{CR} / \mathbb{P}^0$ [Crouzeix-Raviart'73] :



Problème variationnel discret :

Trouver $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{X}_{h,0}^{CR} \times M_h(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + b_h(\boldsymbol{v}_h, p) = \sum_T \int_T \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}_h & \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_{h,0}^{CR} \\ b_h(\boldsymbol{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h(\Omega) \end{cases}$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_T \int_T \nabla \boldsymbol{u}_h : \nabla \boldsymbol{v}_h$$

$$b_h(v_h, q_h) = -\sum_T \int_T \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) q_h$$

Limites des éléments finis de Crouzeix-Raviart non conformes

Soit ϕ une fonction de $H^1(\Omega)$. On considère le problème de Stokes suivant :
Trouver $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que

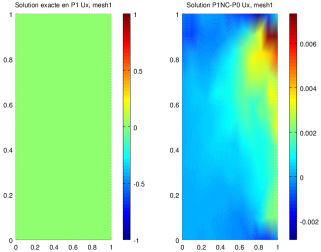
$$\begin{cases} \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) p = (\nabla \phi, \boldsymbol{v})_{0,\Omega} & \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) q = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

La solution est alors $(\boldsymbol{u}, p) = (\mathbf{0}, \phi)$. Or pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart, on a

$$u = 0,\ p = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y + y^4 - \frac{7}{12}$$

$$\sum_T \int_T \nabla \phi \cdot \boldsymbol{v}_h = -\sum_T \int_T \phi \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h + \int_{\partial T} \phi \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}$$

$$= -\sum_T \int_T \phi \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h + \sum_F \int_F \phi [\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}]$$



Le terme $\sum_F \int_F \phi [\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}]$ est nul si ϕ est constante ("Patch test").
Autrement, ce terme devient une "source numérique" pour $\Delta \boldsymbol{u}_h$.
Néanmoins la convergence est garantie.
[Emonot'92] : Trop de ddl de vitesse $\rightarrow$ modes parasites.

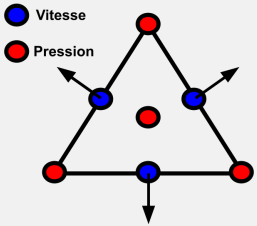
Correction des éléments finis de Crouzeix-Raviart non conformes

Augmenter l'espace des pressions discrètes

- On rajoute des degrés de libertés à l'espace des pressions : $(\boldsymbol{X}_{h,0}^{CR}, \mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)$: $M_h = L_0^2(\Omega) \cap \mathbb{P}^0 + L_0^2(\Omega) \cap \mathbb{P}^1$.
- Le patch test $\sum_F \int_F \phi[\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}] = 0$ se vérifie alors pour $\phi \in \mathbb{P}^2$ [Heib'03].
- Courants parasites nuls pour ϕ, un polynôme d'ordre 2 et d'au moins d'ordre h^3 pour les autres cas.
- **Inconvénient :**
  On a des bonnes propriétés de convergence pour le $2D$, mais pour les garder lors du passage en $3D$, il faut rajouter des degrés de libertés situés sur les arêtes. (En moyenne, 6 arêtes partagées par 6 éléments. On double les degrés de libertés)

$$\boldsymbol{X}_{h,0}^{CR} \,/\, (\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)2D : [\text{Heib'03}]$$

$$\boldsymbol{X}_{h,0}^{CR} \,/\, (\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1 + \mathbb{P}^a)3D : [\text{Fortin'06}]$$



Correction des éléments finis de Crouzeix-Raviart

Projeter sur un élément finis conforme dans $H(div, \Omega)$ [Linke et al '14]

- L'objectif est d'avoir un schéma peu coûteux comme le $\boldsymbol{X}_{h,0}^{CR}$ mais plus précis.
- Projection Π_h conforme dans $H(div, \Omega)$ (EF de [Raviart-Thomas'77] ou BDM [Brezzi-Douglas-Marini'85])
- Terme Source :

$$\forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{X}_{h,0}^{CR} : \begin{cases} (\nabla \psi, \boldsymbol{v}_h)_0 \neq -\sum_T (\psi, \operatorname{div} v_h)_{0,T} \\ (\nabla \psi, \Pi_h \boldsymbol{v}_h)_0 = -\sum_T (\psi, \operatorname{div} v_h)_{0,T} \end{cases}$$

- **Inconvénient :** La matrice de masse change : $(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_{0,T} \to (\Pi_h \boldsymbol{u}_h, \Pi_h, \boldsymbol{v}_h)_{0,T}$.
  Elle n'est alors plus diagonale, on est alors limité avec les schémas explicites /semi-implicites où l'inverse de la matrice de masse intervient.

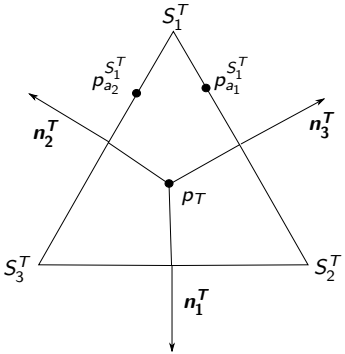
Nouvelle solution proposée

Modifier le schéma de couplage vitesse / pression : Schéma MPFA symétrique.
Compromis : La matrice de masse reste inchangée, et quasiment les même degrés de libertés pour la pression.

Schéma P1NC-MPFA (Multi-Point Flux Approximation) pour Stokes

Nouvelle solution proposée

- Moins de degrés de libertés que les EF : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR} / (\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)$
- On définit un gradient, qui sera exact pour les fonctions affines avec des degrés centrés sur les mailles (contrairement au EF de Crouzeix-Raviart non conforme).



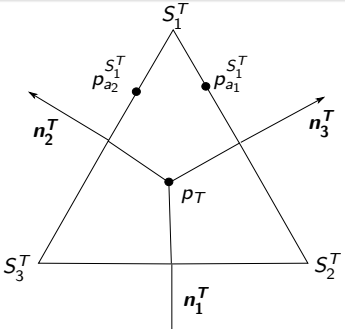
Stratégie du schéma

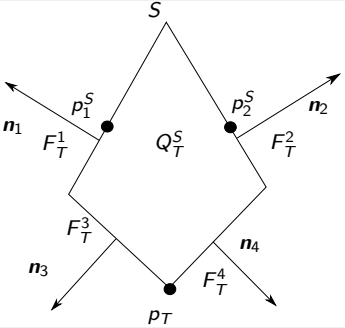
- Découper nos triangles en trois quadrangles
- Ajouter deux inconnues auxiliaires de pression par arête.
- Exprimer le gradient de la pression à l'aide des inconnues auxiliaires de pression sur les arêtes et celle de la cellules.
- Éliminer les inconnues auxiliaires en imposant la continuité du flux du gradient sur les arêtes.
- Éléments finis $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ pour les composantes de la vitesse (matrice de masse inchangée).

Principe

Propriétés du schéma MPFA symétrique, coercif consistant centré sur les mailles, appliqué à l'opérateur Laplacien :

- Consistant et coercif
- Convergent avec des hypothèses sur les triangles proches des hypothèses de convergences des éléments finis P1.





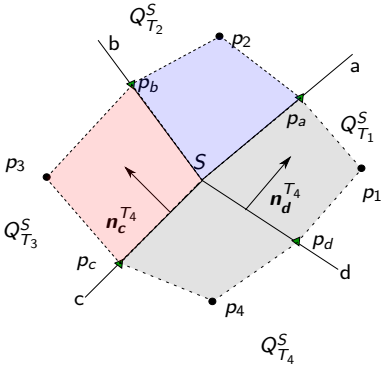
$$G_T^S = \frac{1}{|Q^S|} \sum_{j \in A_T^{Q^S}} (p_j^S - p_T)\boldsymbol{n_j} \qquad (2)$$

où $A_T^{Q^S} = \{F_j \in (Q)_T^S\}$. La formule est exacte sur des simplexes pour des fonctions affines.

Continuités des flux

- Afin de supprimer les inconnues intérieures, on va ajouter une condition de continuité des flux
- On garde les inconnues des arêtes du bord.
- La continuité des flux entre deux triangles T_2 et T_3, partageant l'arête b, et le sommet S s'écrit

$$\nabla^{S}_{T_3} p \cdot \boldsymbol{n_b} = \nabla^{S}_{T_2} p \cdot \boldsymbol{n_b}$$



En insérant l'expression du gradient (2), on trouve

$$\frac{1}{|Q^S_{T_3}|}\left((p_b - p_3)\boldsymbol{n_b}^{T_3} \cdot \boldsymbol{n_b}^3 + (p_c - p_3)\boldsymbol{n_c}^{T_3} \cdot \boldsymbol{n_b}^3\right) = \frac{1}{|Q^S_{T_2}|}\left((p_a - p_2)\boldsymbol{n_a}^2 \cdot \boldsymbol{n_b}^2 + (p_b - p_2)\boldsymbol{n_b}^{T_2} \cdot \boldsymbol{n_b}^2\right)$$

On ne peut pas appliquer la continuités des flux sur le bord. On garde les inconnues du bord dans le système.

Continuités des flux

On peut alors écrire un système linéaire pour chaque sommet :
Si on note $[p_T]^s$ les inconnues des cellules, $[p_a]_i^s$ les inconnues d'arêtes intérieures et $[p_a]_b^s$ les inconnues d'arêtes du bord associées à s.

$$L_{ij}^S = \begin{cases} 3|\boldsymbol{n}_{a_i}|^2\left(\frac{1}{|T_1^{a_i}|} + \frac{1}{|T_2^{a_i}|}\right) & \text{si } i = j \text{ et } a_i \text{ est l'arête commune à } T_1^{a_i},\ T_2^{a_i} \\ 3\frac{\boldsymbol{n}_{a_i}^T \cdot \boldsymbol{n}_{a_j}^T}{|T|} & \text{si i} \neq \text{j et } a_i,\ a_j \text{ sont dans le même triangle } T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

$$R_{ij}^S = \begin{cases} \frac{3}{|T_i|}(|\boldsymbol{n}_{a_j}|^2 + \boldsymbol{n}_{a_i}^{T_i} \cdot \boldsymbol{n}_{a_j}^{T_i}) & \text{si } a_j \in T_i \text{ et } a_i \text{ la seconde arête de } T_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

On peut éliminer les inconnues des arêtes intérieures avec le système suivant :

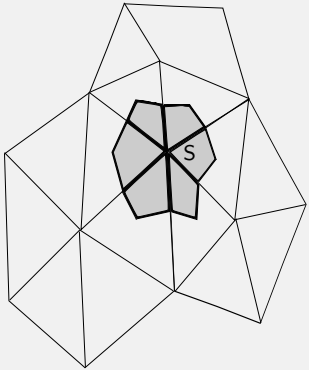
$$[p_a]_i^S = (L_i^S)^{-1} R^S [p_T]^S - (L_i^S)^{-1} L_b^S [p_a]_b^S$$

Qui se ré-écrit :

$$[p_a]_i^S = M^S [p_T]^S + N^S [p_a]_b^S$$

Intégration sur un élément de référence

Stencil des Gradients



$$\int_T \boldsymbol{v} \cdot \nabla p = G_T^1 \cdot \int_{Q_1} \boldsymbol{v} + G_T^2 \cdot \int_{Q_2} \boldsymbol{v} + G_T^3 \cdot \int_{Q_3} \boldsymbol{v} \quad (5)$$

On utilise les éléments de Crouzeix-Raviart non conformes pour la vitesse. Les fonctions de base scalaires sont :

$$v_i = 1 - d\lambda_i \qquad \boldsymbol{v}_i^\alpha = v_i \boldsymbol{e}_\alpha$$

Les fonctions de base pour la pression sont :

$$p_{T_\ell} = \mathbb{1}_{T_\ell} \quad \text{et} \quad p_b = \mathbb{1}_b$$

Nb : Pour intégrer, on peut utiliser des formules de quadrature d'ordre 1. On a alors :

$$\int_{Q_i} v_j = \int_{Q_i} (1 - d\lambda_j) = \begin{cases} -2|T|/27 \text{ si } j = i \\ 11|T|/54 \text{ sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Matrice de couplage vitesse / pression.

On note la matrice de couplage vitesse / pression B tel que :

$$B(\boldsymbol{v}_j, p_{T_\ell,b}) = \sum_{T_m} \left(G^1_{T_m}(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) \cdot \int_{Q_1} \boldsymbol{v}_j + G^2_{T_m}(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) \cdot \int_{Q_2} \boldsymbol{v}_j + G^3_{T_m}(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) \cdot \int_{Q_3} \boldsymbol{v}_j \right)$$

Implémentation de la matrice B

Calculer la contribution de chacun des degrés de liberté :

1. Remplacer les degrés de liberté de pression des arêtes intérieures avec les systèmes donnés par la continuité des flux.
$$[p_a]^S_i = M^S[p_T]^S + N^S[p_a]^S_b$$
2. Calculer les gradients pour les fonctions de base de la pression :
$$\frac{1}{|Q^S_T|}\left((p_a - p_T)\boldsymbol{n}^T_{\boldsymbol{a}} + (p_b - p_T)\boldsymbol{n}^T_{\boldsymbol{b}}\right)$$
3. Intégrer les fonctions de base sur les quadrangles où la pression est constante.
$$\int_{Q_i} v_j = \int_{Q_i} (1 - d\lambda_j) = \begin{cases} -2|T|/27 \text{ si } j = i \\ 11|T|/54 \text{ sinon} \end{cases} \tag{7}$$

Matrice de couplage vitesse / pression.

Pour tout les degrés de liberté de la pression des cellules p_{T_ℓ}

Pour tout les degrés de liberté de vitesse associés aux arêtes v_j

On remplace les inconnues des arêtes avec l'expression issues de la continuités des flux pour $p = \mathbb{1}_{T_\ell}$

On calcule l'intégrale $\int_\Omega \boldsymbol{v}_j \nabla_h^{MPs} p_{T_\ell}$

On sauvegarde le résultat dans $B_{int}(j, \ell)$

Pour tout les degrés de liberté de la pression des arêtes du bord p_b

Pour tout les degrés de liberté de vitesse associés aux arêtes v_j

On remplace les inconnues des arêtes avec l'expression issues de la continuités des flux pour $p = \mathbb{1}_b$

On calcule l'intégrale $\int_\Omega \boldsymbol{v}_j \nabla_h^{MPs} p_b$

On sauvegarde le résultat dans $B_{bord}(j, b)$

Système final

On peut alors écrire le système suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

avec A la matrice des Crouzeix-Raviart, $B = [B_{int} B_{bord}]$ la matrice du gradient de Pression, U les degrés de liberté associés à la vitesse, F le terme source calculé sur les arêtes et $P = \begin{pmatrix} P_T \\ P_b \end{pmatrix}$ les inconnues de bord et de cellule associées à la pression.

On peut alors exprimer U en fonction de P avec la première équation, et en injectant cela dans la deuxième équation, on trouve :

$$U = A^{-1}[B^T P + F] \quad BA^{-1}B^T P = BA^{-1}F$$

On trouve donc le système équivalent :

$$\begin{aligned} U = &\quad A^{-1}[B^T P + F] \\ BA^{-1}B^T P = &\quad BA^{-1}F \end{aligned} \tag{9}$$

Résultats pour l'équation de Stokes sur $\Omega = [0;1]^2$

Nomenclature des différentes méthodes comparées

- u_h^{CR} : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ / $(\mathbb{P}^0)$
- u_h^{Trio} : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ / $(\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)$
- u_h^{RT} : $RT(\mathbf{X}_{h,0}^{CR})$ / $(\mathbb{P}^0)$
- u_h^{Mps} : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ / $MPFA^{SYM}$

Nombre de degrés de liberté pour la pression :

h	p_h^{CR}	p_h^{Trio}	p_h^{MPs}
$1.00e-01$	242	138	322
$5.00e-02$	1054	1622	1214
$2.50e-02$	4262	6474	4582
$1.25e-02$	16794	25352	17434

Résultats pour l'équation de Stokes sur $\Omega = [0;1]^2$

$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, $p = x + y - 1$

Sur ce cas, on obtient une erreur machine pour le schéma $MPFA^{SYM}$ et pour les Crouzeix-Raviart enrichis.

$u = 0$, $p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}$

h	$\|u - u_h^{CR}\|_0$	$\|u - u_h^{Trio}\|_0$	$\|u - u_h^{RT}\|_0$	$\|u - u_h^{MPs}\|_0$
$1.00e-01$	$5.8e-04$	–	–	$4.3e-06$
$5.00e-02$	$1.4e-04$	–	–	$5.2e-07$
$2.50e-02$	$3.3e-05$	–	–	$7.5e-08$
$1.25e-02$	$8.4e-06$	–	–	$1.1e-08$
EOC	2.0	–	–	2.9

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{Trio}\|_0$	$\|p - p_h^{RT}\|_0$	$\|p - p_h^{MPs}\|_0$
$1.00e-01$	$8.6e-02$	$1.8e-03$	$8.1e-02$	$8.4e-04$
$5.00e-02$	$4.0e-02$	$4.1e-04$	$3.9e-02$	$2.0e-04$
$2.50e-02$	$1.9e-02$	$1.0e-04$	$1.9e-02$	$4.8e-05$
$1.25e-02$	$9.7e-03$	$2.5e-05$	$9.7e-03$	$1.2e-05$
EOC	1.0	2.0	1.0	2.0

Résultats pour l'équation de Stokes sur $\Omega = [0;1]^2$

$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, $p = x^5 + x^4y^3 + x^2y + y^4 - \frac{7}{12}$

h	$\|u - u_h^{CR}\|_0$	$\|u - u_h^{Trio}\|_0$	$\|u - u_h^{RT}\|_0$	$\|u - u_h^{MPs}\|_0$
$1.00e-01$	$2.4e-03$	$9.2e-07$	–	$2.7e-05$
$5.00e-02$	$5.8e-04$	$6.0e-08$	–	$4.4e-06$
$2.50e-02$	$1.3e-04$	$3.6e-09$	–	$5.2e-07$
$1.25e-02$	$3.4e-05$	–	–	$9.4e-08$
EOC	1.9	4.0	–	2.8

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{Trio}\|_0$	$\|p - p_h^{RT}\|_0$	$\|p - p_h^{MPs}\|_0$
$1.00e-01$	$1.3e-01$	$6.0e-03$	$1.2e-01$	$5.9e-03$
$5.00e-02$	$5.8e-02$	$1.4e-03$	$5.5e-02$	$1.5e-03$
$2.50e-02$	$2.7e-02$	$3.1e-04$	$2.6e-02$	$3.4e-04$
$1.25e-02$	$1.3e-02$	$7.9e-05$	$1.3e-02$	$8.9e-05$
EOC	1.0	2.0	1.0	2.0

Résultats pour l'équation de Stokes sur $\Omega = [0;1]^2$

$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}, p = sin(2\pi x) + sin(2\pi y)$

h	$\|u - u_h^{CR}\|_0$	$\|u - u_h^{Trio}\|_0$	$\|u - u_h^{MPs}\|_0$
$1.00e-01$	$4.2e-03$	$5.3e-06$	$1.3e-04$
$5.00e-02$	$1.0e-03$	$4.6e-07$	$1.3e-05$
$2.50e-02$	$2.4e-04$	$2.8e-08$	$2.1e-06$
$1.25e-02$	$6.3e-05$	$1.9e-09$	$2.9e-07$
EOC	2.0	3.9	3.0

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{Trio}\|_0$	$\|p - p_h^{MPs}\|_0$
$1.00e-01$	$1.4e-01$	$1.2e-02$	$1.8e-02$
$5.00e-02$	$6.5e-02$	$2.7e-03$	$4.5e-03$
$2.50e-02$	$3.1e-02$	$6.0e-04$	$1.1e-03$
$1.25e-02$	$1.6e-02$	$1.7e-04$	$2.8e-04$
EOC	1.0	2.0	2.0

Projets envisagés

Axes Numériques

- Implémenter en 3D sur TrioCFD.

Axes Théoriques

- Établir la condition Inf-Sup pour le schéma $\mathbf{P}^1_{NC} - MPFA^{SYM}$
- Analyse d'erreur classique

Merci de votre attention !

Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- C. Le Potier : *"A finite volume method for the approximation of highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes (2005)"*
- L. Agelas et R. Masson : *"Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes (2008)"*
- Ph. Emonot : *"Méthode de volumes élements finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence (1992)"*
- S. Heib : *"Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée (2003)"*
- T. Fortin : *"Une méthode d'éléments finis à décomposition L2 d'ordre élevé motivée par la simulation des écoulements diphasiques bas Mach (2006)"*
- A. Linke : *"On the role of the Helmhotz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime (2014)"*
- F. Brezzi, J. Douglas, L. D. Marini : *"Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems (1985)"*
- P.-A. Raviart, J.-M. Thomas *"A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems (1977)"*

Système final

On note $M^S = (L_i^S)^{-1} R^S$ et $N^S = (L_i^S)^{-1} L_b^S$. Ainsi, si a^S est une arête de sommet S, son inconnue associée peut se réécrire :

$$p_{a^S} = (M^S_{a^S} * [p_T^S] + N^S_{a^S} * [p_b]^S + p_a * \mathbb{1}_{a \in \partial\Omega}$$

$$p_{a^S} = \sum_{T(S)} M^S_{a^S,T} * P_T^S + \sum_{A_b(S)} N^S_{a^S,a_b} * p_b^S + p_a \mathbb{1}_{a \in \partial\Omega}$$

On peut alors calculer la contribution d'un triangle T_l et d'une arête de bord b aux gradients $G^s_{T_m}$ du triangle T_m :

$$G^s_{T_m}(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) = \begin{cases} \frac{3}{2|T_l|}\Big[(M^s_{a_1^{T_m},T_l} * p^{T_m}_{a_1^{T_m}} + N^S_{a_1^{T_m},b} * p_b + \mathbb{1}_{b=a_1^{T_m}} - \mathbb{1}_{T_m=T_l})\boldsymbol{n}^{T_m}_{a_1^{T_m}} \\ + (M^s_{a_2^{T_m},T_l} * p^{T_m}_{a_2^{T_m}} + N^S_{a_2^{T_m},b} * p_b + \mathbb{1}_{b=a_2^{T_m}} - \mathbb{1}_{T_m=T_l})\boldsymbol{n}^{T_m}_{a_2^{T_m}}\Big] & \text{si } (T_m, T_l) \in (T(S))^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement la contribution du dégrée de liberté l associé à la pression, j à la vitesse et b à la pression du bord vaut :

$$B(\boldsymbol{v}_j, \mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) = \sum_{T_m} \sum_{Q^s_{T_m}} G^s_{T_m}(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) \int_{Q^s_{T_m}} \boldsymbol{v}_j \tag{10}$$