



**HAL**  
open science

## Schéma MPFA symétrique pour le problème de Stokes

Andrew Peitavy, Erell Jamelot, Eric Chénier, Christophe Le Potier

► **To cite this version:**

Andrew Peitavy, Erell Jamelot, Eric Chénier, Christophe Le Potier. Schéma MPFA symétrique pour le problème de Stokes : Présentation pour le séminaire des doctorants du STMF. 2021. cea-04321054

**HAL Id: cea-04321054**

**<https://cea.hal.science/cea-04321054>**

Submitted on 4 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Schéma MPFA symétrique pour le problème de Stokes

Présentation pour le séminaire des doctorants

Andrew Peitavy

Directeurs de thèse : E. Chénier, C. Le Potier

Collaboration : R. Eymard

Encadrante CEA : E. Jamelot

Présentation des travaux de thèse  
CEA : DES/STMF/DM2S/LMSF

30 novembre 2023

30 novembre  
2023

A.PEITAVY

Rappel

Schéma  
P1NC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

- 1 Rappel
- 2 Schéma P1NC-MPFA pour Stokes
- 3 Résultats
- 4 Résultats Numériques
- 5 En cours

## Problème variationnel

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,\Omega} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \end{cases} \quad \begin{cases} b : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}) q \end{cases}$$

## Théorème

*Le problème de Stokes est bien posé.*

**Preuve :** (Banach-Necas-Babuska + Isomorphisme de l'opérateur  $\operatorname{div}$  de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow L_0^2$ .  
 $\forall q \in L_0^2(\Omega), \exists \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = q$  + inégalité de Poincaré [Girault Raviart'86])

- Soit  $x \in T_\ell$ , pour  $\ell = \{1, \dots, N_T\}$ .  
On note les sommets des triangles  $S_i$  et leurs faces opposées  $F_i$  pour  $i \in \{1, \dots, d+1\}$ .  
On note alors les coefficients barycentrique de  $x$  :  $\lambda_i^\ell(x) \in \mathbb{R}^+$  les coefficients tels que :

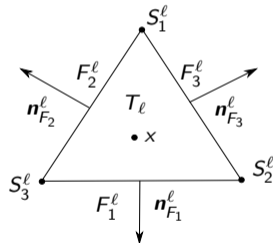
$$x = \sum_{S_i} \lambda_i^\ell(x) \mathbf{OS}_i^\ell$$

- On peut donner alors l'expression suivante :

$$\lambda_i^\ell(x) = (d|T_\ell|)^{-1} \mathbf{n}_{F_i}^\ell \cdot (\mathbf{OS}_i^\ell - x), \quad \nabla \lambda_i^\ell = - (d|T_\ell|)^{-1} \mathbf{n}_{F_i}^\ell$$

- Les fonctions de bases des éléments de Crouzeix-Raviart sont :

$$v_i = 1 - d\lambda_i$$



NB : Pour  $d = 2$ , on écrit la matrice de masse (Preuve : Utiliser une formule de quadrature) :

$$M_{i,j} = \sum_{T|F_i, F_j \in T} \int_T v_i v_j dx = \delta_{i,j} \frac{|T|}{3}.$$

- **Triangulation** :  $\mathcal{T}_h = \bigcup_{\ell=1}^{N_T} T_\ell$ ,  $\mathcal{F}_h = \{F / \bar{F} = \bar{T}_\ell \cap \bar{T}_{\ell'}\}$

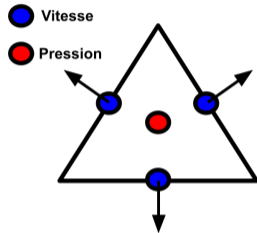
- $\mathbf{X}_h^{CR} = \{v_h \in \mathbb{P}_{disc}^1 / \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [v_h] ds = 0\}$

$$\text{avec } [v_h]_{|F} = (v_{T_\ell} - v_{T_{\ell'}}) \cdot \mathbf{n}_{F_\ell} \quad \text{pour } \bar{F} = \bar{T}_\ell \cap \bar{T}_{\ell'}$$

$$\text{Vitesse : } \mathbf{X}_{h,0}^{CR} = \{\mathbf{v}_h \in (\mathbf{X}_h^{CR})^d / \mathbf{v}_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

- **Pression** :  $M_h(\Omega) = L_0^2(\Omega) \cap \mathbb{P}^0$ .

- $\mathbf{X}_{h,0}^{CR} / \mathbb{P}^0$  [Crouzeix-Raviart'73] :



### Problème variationnel discret :

Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{h,0}^{CR} \times M_h(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p) = \sum_T \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{h,0}^{CR} \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h(\Omega) \end{cases}$$

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_T \int_T \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h$$

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = - \sum_T \int_T \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) q_h$$

Soit  $\phi$  une fonction de  $H^1(\Omega)$ . On considère le problème de Stokes suivant :  
Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v})p = (\nabla \phi, \mathbf{v})_{0,\Omega} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u})q = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

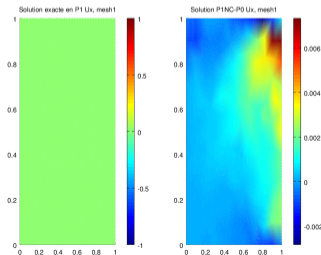
La solution est alors  $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \phi)$ . Or pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart, on a

$$\begin{aligned} \sum_T \int_T \nabla \phi \cdot \mathbf{v}_h &= - \sum_T \int_T \phi \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \int_{\partial T} \phi \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \\ &= - \sum_T \int_T \phi \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \sum_F \int_F \phi [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] \end{aligned}$$

Le terme  $\sum_F \int_F \phi [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]$  est nul si  $\phi$  est constante ("Patch test").  
Autrement, ce terme devient une "source numérique" pour  $\Delta \mathbf{u}_h$ .  
Néanmoins la convergence est garantie.

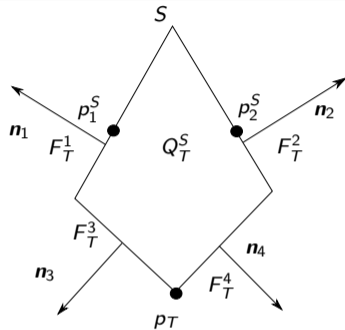
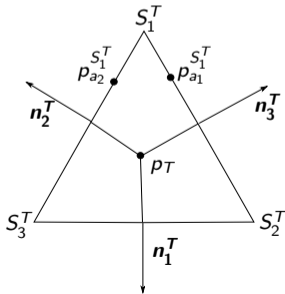
[Emonot'92] : Trop de ddl de vitesse  $\rightarrow$  modes parasites.

$$u = 0, p = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y + y^4 - \frac{7}{12}$$



## Stratégie du schéma

- Découper nos triangles en trois quadrangles
- Ajouter deux inconnues auxiliaires de pression par arête.
- Exprimer le gradient de la pression à l'aide des inconnues auxiliaires de pression sur les arêtes et celle de la cellule.



$$G_T^S = \frac{1}{|Q_T^S|} \left( (p_1^S - p_T) \cdot \mathbf{n}_1 + (p_2^S - p_T) \cdot \mathbf{n}_2 \right) \quad (1)$$

La formule est exacte sur des simplexes pour des fonctions affines.

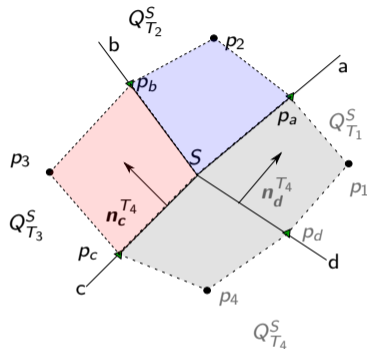


## Stratégie du schéma

- Éliminer les inconnues auxiliaires en imposant la continuité du flux du gradient sur les arêtes.
- Éléments finis  $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$  pour les composantes de la vitesse (matrice de masse et convection inchangées).

- On garde les degrés du bord car on ne peut pas y imposer la continuité des flux.
- On applique ce schéma pour discrétiser le gradient de pression. On résout donc le problème de Stokes avec :

$$b_h(v_h, q_h) = \sum_T \int_T \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q_h$$



La continuité des flux entre deux triangles  $T_2$  et  $T_3$ , partageant l'arête  $b$ , et le sommet  $S$  s'écrit

$$\nabla_{T_3}^S p \cdot \mathbf{n}_b = \nabla_{T_2}^S p \cdot \mathbf{n}_b$$

30 novembre  
2023

A. PEITAVY

Rappel

Schéma  
P1NC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

Pour un degré de liberté  
sur une cellule

- P=1
- P=0
- P calculé avec la continuité des flux

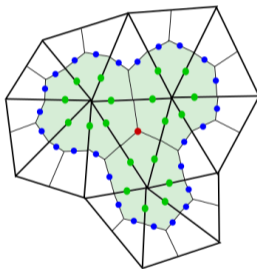


Figure – Support d'une fonction de base MPFA symétrique pour une cellule

Dans chacun des quadrangles définis, le gradient de pression est constant :

$$(\tilde{\psi}_T)|_Q = ax+by+c \quad \text{et} \quad (\nabla \tilde{\psi}_T)|_Q = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Si on se place dans un quadrangle  $Q_\tau$  de la cellule  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , alors la pression associée à la cellule  $T$  vaut :

$$\tilde{\psi}_T = \tilde{\psi}_T(\mathbf{x}_{G_\tau}) + \nabla \tilde{\psi}_T(\mathbf{x}_{G_\tau}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{G_\tau})$$

avec  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{x}_{G_\tau}$  le barycentre de la cellule  $T$  et

$$\tilde{\psi}_T(\mathbf{x}_{Q_\tau}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Système considéré

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec  $A$  la matrice des Crouzeix-Raviart,  $B = [B_{int} B_{bord}]$  la matrice du gradient de Pression,  $U$  les degrés de liberté associés à la vitesse,  $F$  le terme source calculé sur les arêtes et  $P = \begin{pmatrix} P_T \\ P_b \end{pmatrix}$  les inconnues de bord et de cellule associées à la pression.

On obtient un schéma numérique ayant un ordre de convergence dégradé :

- $U_x = y, U_y = x, P = (x^2 + y^2)/2 - 1/3$

$h$	$\ u - u_h^{MPFA}\ _0$	$\ p - p_h^{MPFA}\ _0$
1.00e-01	1.26e-02	7.09e-1
5.00e-02	4.89e-03	6.27e-01
2.50e-02	2.29e-03	6.24e-01
1.25e-02	1.11e-03	6.04e-01
EOC	1.2	0.08

- $U_x = 0, U_y = 0, P = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

$h$	$\ u - u_h^{MPFA}\ _0$	$\ p - p_h^{MPFA}\ _0$
1.00e-01	1.3e-04	1.8e-02
5.00e-02	1.3e-05	4.5e-03
2.50e-02	2.1e-06	1.1e-03
1.25e-02	2.9e-07	2.8e-04
EOC	3.0	2.0

## Intégration par parties

On a pas l'égalité suivante :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T p_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h \neq - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h p_T \cdot \mathbf{v}_h \implies B \text{ ne discrétise pas la divergence}$$

## Système considéré

$$\begin{pmatrix} A & B_{int}^T & B_b^T \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P_{int} \\ P_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec :

- $0 \leq i, j \leq dN_F$
- $0 \leq k \leq N_T$
- $0 \leq l \leq 2N_{F_B}$

$$(A)_{ij} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \phi_i : \nabla \phi_j$$

$$(B_{int})_{ki} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h \psi_k^{int} \cdot \phi_i$$

$$(B_b)_{li} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h \psi_l^b \cdot \phi_i$$

$$(F)_i := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \phi_i$$

$$(D)_{ik} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \psi_k^{int} \operatorname{div} \phi_i$$

La base pour la vitesse est donnée par  $(\phi_F^\alpha)_{F \in \mathcal{F}_f}^{\alpha \in \{x,y\}}$  et pour la pression  $(\psi_T^{int})_{T \in \mathcal{T}_h}$  et  $(\psi_l^b)_{0 \leq l \leq 2N_{F_B}}$

## Condition imposée sur le bord

Pour compléter le système, on impose la condition  $BU = BU_{exact}$  pour toutes les lignes qui concernent les fonctions de bases des degrés de liberté du bord pour la pression  $(\psi_l^b)_{0 \leq l \leq 2N_{FB}}$ .  
Cela revient à imposer la vitesse sur une petite épaisseur du bord.

Pour un degré de liberté du bord:

- Degré de pression auxiliaire
- Degré de pression du bord
- Pression engendrée par le degré de liberté du bord

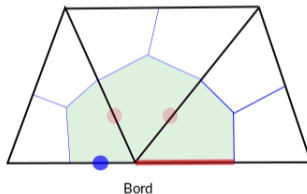


Figure – Support d'une fonction de base MPFA symétrique pour un degré de liberté du bord

## Nomenclature des différentes méthodes comparées

- $u_h^{CR} : \mathbf{X}_{h,0}^{CR} / (\mathbb{P}^0)$
- $u_h^{Trio} : \mathbf{X}_{h,0}^{CR} / (\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)$
- $u_h^{MpsP0} : \mathbf{X}_{h,0}^{CR} / MPFA^{SYM} + \text{divergence } P0$

Nombre de degrés de liberté pour la pression :

$h$	$p_h^{CR}$	$p_h^{Trio}$	$p_h^{MPs}$
1.00e - 01	242	138	322
5.00e - 02	1054	1622	1214
2.50e - 02	4262	6474	4582
1.25e - 02	16794	25352	17434

$$u = 0, p = x + y - 1$$

$h$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	1.01e-03	2.29e-16	1.73e-18
5.00e-02	2.38e-04	2.88e-16	1.79e-18
2.50e-02	5.85e-05	8.54e-16	1.56e-18
1.25e-02	1.48e-05	1.81e-15	1.41e-17
EOC	2.03	-	-

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	2.35e-02	2.96e-14	1.30e-16
5.00e-02	6.90e-03	5.66e-14	1.43e-16
2.50e-02	2.05e-03	3.23e-13	1.37e-16
1.25e-02	7.87e-04	1.52e-12	3.07e-15
EOC	1.63	-	-

30 novembre  
2023

A.PEITAVY

Rappel

Schéma  
P1NC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}$$

$h$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{CR}\ _0$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{Trio}\ _0$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	5.79e-04	1.51e-16	4.62e-06
5.00e-02	1.37e-04	1.55e-16	5.66e-07
2.50e-02	3.30e-05	4.67e-16	8.02e-08
1.25e-02	8.38e-06	1.10e-15	1.16e-08
EOC	2.04	-	2.88

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	8.69e-02	1.80e-03	4.45e-04
5.00e-02	4.01e-02	4.12e-04	1.05e-04
2.50e-02	1.94e-02	1.00e-04	2.54e-05
1.25e-02	9.74e-03	2.54e-05	6.44e-06
EOC	1.05	2.05	2.04



30 novembre  
2023

A. PEITAVY

Rappel

Schéma  
P1NC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

$$u = 0, p = x^5 + x^4y^3 + x^2y + y^4 - \frac{7}{12}$$

$h$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	2.39e-03	9.22e-07	2.99e-05
5.00e-02	5.84e-04	6.01e-08	4.79e-06
2.50e-02	1.32e-04	3.15e-09	5.62e-07
1.25e-02	3.45e-05	2.21e-10	9.88e-08
EOC	2.04	4.01	2.75

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	1.30e-01	6.06e-03	4.96e-03
5.00e-02	5.82e-02	1.37e-03	1.28e-03
2.50e-02	2.68e-02	3.09e-04	2.88e-04
1.25e-02	1.35e-02	7.95e-05	7.57e-05
EOC	1.09	2.08	2.01

$$u_x = -y, u_y = x, p = x + y - 1$$

$h$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	1.23e-03	3.29e-14	2.08e-16
5.00e-02	2.92e-04	3.72e-13	4.32e-16
2.50e-02	7.16e-05	4.38e-13	8.22e-16
1.25e-02	1.81e-05	2.37e-12	1.96e-13
EOC	2.03	-	-

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	2.35e-02	3.22e-12	6.61e-15
5.00e-02	6.90e-03	6.01e-11	1.75e-14
2.50e-02	2.05e-03	1.36e-10	3.44e-14
1.25e-02	7.87e-04	1.55e-09	7.29e-12
EOC	1.63	-	-

$$u_x = -y, u_y = x, p = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y + y^4 - \frac{7}{12}$$

$h$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	2.93e-03	1.23e-06	3.66e-05
5.00e-02	7.16e-04	8.03e-08	5.86e-06
2.50e-02	1.62e-04	4.21e-09	6.84e-07
1.25e-02	4.23e-05	9.92e-10	1.12e-07
EOC	2.04	4.01	2.79

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e-01	1.30e-01	6.06e-03	4.96e-03
5.00e-02	5.82e-02	1.37e-03	1.28e-03
2.50e-02	2.68e-02	3.09e-04	2.88e-04
1.25e-02	1.35e-02	7.95e-05	7.57e-05
EOC	1.09	2.08	2.01

$$u_x = (x - y)^2, u_y = (x - y)^2, p = x + y - 1$$

$h$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e - 01	9.86e - 03	5.15e - 03	8.07e - 03
5.00e - 02	2.35e - 03	1.23e - 03	1.83e - 03
2.50e - 02	5.78e - 04	2.99e - 04	4.50e - 04
1.25e - 02	1.47e - 04	7.65e - 05	1.16e - 04
EOC	2.02	2.02	2.04

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e - 01	1.15e - 01	1.72e - 01	1.31e - 01
5.00e - 02	5.42e - 02	7.96e - 02	4.57e - 02
2.50e - 02	2.59e - 02	3.84e - 02	1.98e - 02
1.25e - 02	1.28e - 02	1.96e - 02	9.53e - 03
EOC	1.06	1.05	1.26

$$u_x = \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x) - 1), \quad u_y = -\sin(2\pi x)(\cos(2\pi y) - 1), \quad p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

$h$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e - 01	2.69e - 02	2.45e - 02	2.61e - 02
5.00e - 02	6.92e - 03	5.84e - 03	6.77e - 03
2.50e - 02	1.70e - 03	1.45e - 03	1.66e - 03
1.25e - 02	4.28e - 04	3.65e - 04	4.22e - 04
EOC	1.99	2.02	1.98

$h$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e - 01	8.35e - 01	1.14	1.47
5.00e - 02	4.06e - 01	6.08e - 01	5.75e - 01
2.50e - 02	1.88e - 01	2.89e - 01	2.28e - 01
1.25e - 02	9.50e - 02	1.45e - 01	1.13e - 01
EOC	1.05	9.92e - 01	1.23

$$u_x = \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x) - 1), \quad u_y = -\sin(2\pi x)(\cos(2\pi y) - 1), \quad p = x + y - 1$$

$\nu$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e + 00	2.68e - 02	2.45e - 02	2.61e - 02
1.00e - 01	2.82e - 02	2.45e - 02	2.61e - 02
1.00e - 02	8.70e - 02	2.45e - 02	2.61e - 02
1.00e - 03	8.24e - 01	2.45e - 02	2.61e - 02
$\nu$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e + 00	9.99e - 01	1.40e + 00	2.59e + 00
1.00e - 01	1.25e - 01	1.40e - 01	2.59e - 01
1.00e - 02	7.66e - 02	1.40e - 02	2.59e - 02
1.00e - 03	7.59e - 02	1.40e - 03	2.59e - 03

30 novembre  
2023

A. PEITAVY

Rappel

Schéma  
P1NC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

$$u_x = \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x) - 1), \quad u_y = -\sin(2\pi x)(\cos(2\pi y) - 1), \quad p = x^5 + x^4 y^3 + x^2 y + y^4 - 7/12$$

$\nu$	$\ u - u_h^{CR}\ _0$	$\ u - u_h^{Trio}\ _0$	$\ u - u_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e + 00	2.69e - 02	2.45e - 02	2.61e - 02
1.00e - 01	3.35e - 02	2.45e - 02	2.61e - 02
1.00e - 02	1.98e - 01	2.45e - 02	2.63e - 02
1.00e - 03	1.96e + 00	2.44e - 02	3.48e - 02
$\nu$	$\ p - p_h^{CR}\ _0$	$\ p - p_h^{Trio}\ _0$	$\ p - p_h^{MpsP0}\ _0$
1.00e + 00	6.53e - 01	8.97e - 01	2.59e + 00
1.00e - 01	1.45e - 01	8.99e - 02	2.59e - 01
1.00e - 02	1.30 - 01	1.08e - 02	2.70e - 02
1.00e - 03	1.30e + 00	6.13e - 03	7.86e - 03

30 novembre  
2023

A. PEITAVY

Rappel

Schéma  
PINC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

- Condition Inf-Sup
- Termes de Bord
- Méthode de Résolution
- Tests Académiques



## Definition

Définition de la forme bilinéaire globale  $A$  :

$$A_{s,h} : \begin{cases} \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \mapsto \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_h + (\mathbf{v}_h, \nabla_h p_h) - (\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h, q_h) \end{cases} \quad (3)$$

Avec  $\mathbf{X}_{0,h} := (P_{NC}^1)^d$ ,  $Q_h := P_{disc}^0(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega)$ ,  $\mathcal{X}_h := \mathbf{X}_{0,h} \times Q_h$

## Theorem

La  $T$ -coercivité est équivalente à la condition Inf-Sup. [Ciarlet Jr'12]

Idée de la preuve [Jamelot'21]

Soit  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{X}_h$ , il faut montrer que

$$\exists \alpha > 0 / A_{s,h}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \geq (\alpha \|\mathbf{u}_h\|_h^2 + \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

Avec  $(\mathbf{v}_h, q_h) = T_h(\mathbf{u}_h, p_h)$ ,  $T_h \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h)$

Idee de la preuve (inspirée de la preuve en continue)

On choisit d'abord

$$\begin{cases} \mathbf{v}_h = \gamma \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_{h,p} & \text{avec } \mathbf{v}_{h,p} = \Pi_{CR}(\mathbf{v}_{p_h}) \quad / \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_{p_h} = p_h, \quad \|\nabla \mathbf{v}_{p_h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \\ q_h = -\gamma p_h \end{cases}$$

$$A_{S,h}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \underbrace{\nu \gamma \|\mathbf{u}_h\|_h^2}_{\text{Young}} - \underbrace{\nu (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_{h,p_h})_h}_{\text{IPP discrète}} + \underbrace{\gamma (\mathbf{u}_h, \nabla_h p_h)_{L^2(\Omega)}}_{\text{IPP} + \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2} - \underbrace{(\mathbf{v}_{h,p_h}, \nabla_h p_h)}_{\text{Terme IPP}} + \underbrace{\gamma (\operatorname{div} \mathbf{u}_h, p_h)_{L^2(\Omega)}}_{\text{Terme IPP}}$$

Remarques :

- Il faut montrer une intégration par partie discrète.
- Il faut montrer la continuité de la forme linéaire  $T_h$ .
- Il se peut que la constante  $\alpha$  dépende du pas du maillage.
- On peut rajouter un terme linéairement dépendant de la vitesse à  $q_h$ .
- Le traitement sur le bord à inclure dans le raisonnement.

Une autre façon de traiter les termes de bord : En intégrant par partie  $\int_M \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h$  :

$$\underbrace{\int_M \nabla q_h \cdot \mathbf{u}_h}_{\text{fait}} - \sum_{F \in M^0} \int_F (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) [q_h] - \sum_{F \in \partial M_{\text{int}}} \int_F \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} q_h = \underbrace{\int_{\partial M \cap \partial \Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} q_h}_{\text{fait}}$$

- Degré de pression auxiliaire
- Degré de pression du bord
- Pression engendrée par le degré de liberté du bord
- M

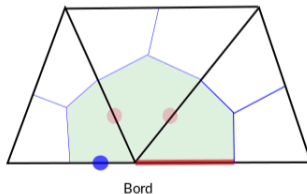


Figure – Support d'une fonction de base MPFA symétrique pour un degré de liberté du bord

30 novembre  
2023

A. PEITAVY

Rappel

Schéma  
PINC-MPFA  
pour Stokes

Résultats

Résultats  
Numériques

En cours

La méthode MPFA symétrique mène à un système linéaire sans symétrie. Pour les méthode itérative de prédiction/correction, comme dans TrioCFD, cela pose problème pour le solveur de pression.

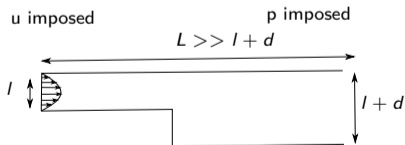
### Solution proposées

- Solveur GMRES + pré-conditionneur (iLU).
- Solveur MUMPS [Chénier, Eymard, Henry, Herbin'07]

Afin de tester le schéma MPFA, on peut implémenter d'autres conditions aux limites et implémenter le terme de convection. On peut alors faire plusieurs tests :

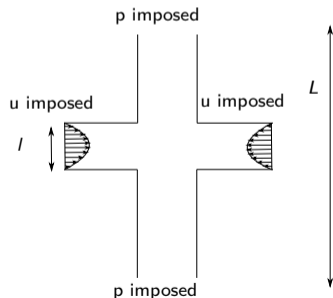
- **Les marches ascendante et descendante :**

But : Comparer les zones de re-circulation avec les lois d'échelle de la marche descendante.



- **Conduite en croix :**

But : Vérifier le caractère "angle droit" des lignes de champs au milieu de la conduite.



Afin de tester le schéma MPFA, on peut implémenter d'autres conditions aux limites et implémenter le terme de convection. On peut alors faire plusieurs tests :

- **Tourbillon de Taylor :**  
But : Comparer avec une solution analytique des équation de Navier-Stokes.

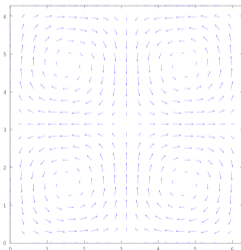


Figure – Solution du cas test 'tourbillon de Green-Taylor'

- **Cavité entraînée / Cavité entraînée tronquée :**  
But : Vérifier le solveur du système incompressible avec un écoulement laminaire.

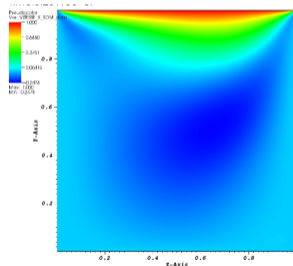


Figure – Solution du cas test de la cavité entraînée avec TrioCFD

## Merci de votre attention !

## Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- C. Le Potier : *"A finite volume method for the approximation of highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes (2005)"*
- L. Agelas et R. Masson : *"Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes (2008)"*
- Ph. Emonot : *"Méthode de volumes éléments finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence (1992)"*
- S. Heib : *"Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée (2003)"*
- T. Fortin : *"Une méthode d'éléments finis à décomposition L2 d'ordre élevé motivée par la simulation des écoulements diphasiques bas Mach (2006)"*
- A. Linke : *"On the role of the Helmholtz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime (2014)"*
- F. Brezzi, J. Douglas et L. D. Marini : *"Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems (1985)"*
- P.-A. Raviart et J.-M. Thomas : *"A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems (1977)"*

## Merci de votre attention !

### Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- P. Ciarlet Jr. : "*T-coercivity : application to the discretization of Helmholtz-like problems (2012)*"
- P. Ciarlet Jr., E. Jamelot et A. Lefort : "*Étude de la T-coercitivité pour le problème de Stokes (2021)*"
- E. Chénier, R. Eymard, G. Henry et R. Herbin : "*Volumes finis colocalisés pour des problèmes de convection naturelle 3D : utilisation du solveur direct parallèle MUMPS (2007)*"
- CEA, "*Validation Report TrioCFD v1.8.4 (2021)*"



On note  $M^S = (L_i^S)^{-1}R^S$  et  $N^S = (L_i^S)^{-1}L_b^S$ . Ainsi, si  $a^S$  est une arête de sommet  $S$ , son inconnue associée peut se réécrire :

$$p_{a^S} = (M_{a^S}^S * [p_T^S] + N_{a^S}^S * [p_b]^S + p_a * \mathbb{1}_{a \in \partial\Omega})$$

$$p_{a^S} = \sum_{T(S)} M_{a^S, T}^S * P_T^S + \sum_{A_b(S)} N_{a^S, a_b}^S * p_b^S + p_a \mathbb{1}_{a \in \partial\Omega}$$

On peut alors calculer la contribution d'un triangle  $T_l$  et d'une arête de bord  $b$  aux gradients  $G_{T_m}^S$  du triangle  $T_m$  :

$$G_{T_m}^S(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) = \begin{cases} \frac{3}{2|T_l|} \left[ (M_{a_1^{T_m}, T_l}^S * p_{a_1^{T_m}}^{T_m} + N_{a_1^{T_m}, b}^S * p_b + \mathbb{1}_{b=a_1^{T_m}} - \mathbb{1}_{T_m=T_l}) n_{a_1^{T_m}}^{T_m} \right. \\ \left. + (M_{a_2^{T_m}, T_l}^S * p_{a_2^{T_m}}^{T_m} + N_{a_2^{T_m}, b}^S * p_b + \mathbb{1}_{b=a_2^{T_m}} - \mathbb{1}_{T_m=T_l}) n_{a_2^{T_m}}^{T_m} \right] & \text{si } (T_m, T_l) \in (T(S))^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement la contribution du degré de liberté  $l$  associé à la pression,  $j$  à la vitesse et  $b$  à la pression du bord vaut :

$$B(\mathbf{v}_j, \mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) = \sum_{T_m} \sum_{Q_{T_m}^S} G_{T_m}^S(\mathbb{1}_{T_l}, \mathbb{1}_b) \int_{Q_{T_m}^S} \mathbf{v}_j \quad (4)$$

# Schéma MPFA symétrique pour la pression dans le problème de Stokes

En utilisant les éléments finis de Crouzeix-Raviart de base :  
 Discrétisation non-conforme : **Intégration par partie discrètes inexacte** → Modes parasites.

Encadrante CEA : ERELL JAMELOT  
 Collaboration : ROBERT EYMARD

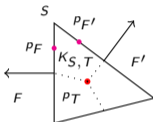
Directeur CEA : CHRISTOPHE LE POTIER  
 Directeur UGE : ERIC CHÉNIER

-Séparer chaque triangle en trois parts équivolumiques.

-Ajouter des inconnues auxiliaires  $(p_F)_{F \in K_S}$  (2 par arête).

-Evaluer  $\nabla_h p_T$ ,  $p_T = \mathbb{K}_T$ .

Modifie le couplage vitesse-pression → Pas de modes parasites



$$\nabla_h p_T|_{K_{S,T'}} = \frac{3}{2|T'|} \sum_{F|S \in F} (p_F - p_T)_{F,T'}$$

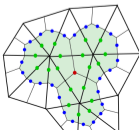
-Continuité des flux pour calculer  $(p_F)_{F \in K_S}$  :  
 $K_S = \cup_T K_{S,T}$   
 (en gris, image de droite) :



$$[\nabla_h p_h] \cdot F = 0.$$

Pour un degré de liberté sur une cellule

- p=1
- p=0
- P calculé avec la continuité des flux.



-Substituer les  $p_F$  dans le système global, avec  $p_T$  et les systèmes de continuité des flux.

N dof. 2D :

$1/h$	$p_h^{CR}$	$p_h^{TrioCFD}$	$p_h^{MPFAs}$
40	4262	6474	4582
80	16794	25352	17434

Stokes,  $\nu = 1$ ,  $u$  nulle,  $p$  sinusoïdale

	$1/h$	CR	MPFAs	TrioCFD
$2^* \varepsilon_0(u_h)$	40	$1.6 e - 4$	$2.1 e - 6$	$4.0 e - 8$
	80	$4.1 e - 5$	$3.9 e - 7$	$2.5 e - 9$
$2^* \varepsilon_0(p_h)$	40	$4.4 e - 2$	$1.0 e - 3$	$1.4 e - 3$
	80	$2.2 e - 2$	$2.8 e - 4$	$3.5 e - 4$

Dépendance à la Viscosité,  $u$  sinusoïdale,  $p$  affine.

	$1/nu$	CR	MPFAs	TrioCFD
$2^* \varepsilon_0(u_h)$	1	$2.7 e - 2$	$2.6 e - 2$	$2.5 e - 2$
	1000	$8.2 e - 1$	$2.6 e - 2$	$2.5 e - 2$
$2^* \varepsilon_0(p_h)$	1	$1.0 e + 0$	$2.6 e + 0$	$1.4 e + 0$
	1000	$7.6 e - 2$	$2.6 e - 3$	$1.4 e - 3$

avec :  $\varepsilon_0(u_h) = \|u_h\|_0$  et  $\varepsilon_0(p_h) = \|p_h\|_0 / \|p\|_0$ .