



HAL
open science

**Etude d'une équation de diffusion non linéaire.
Application à la discrétisation de l'équation d'énergie
cinétique turbulente pour un modèle de turbulence à
une équation**

P.H. Maire

► **To cite this version:**

P.H. Maire. Etude d'une équation de diffusion non linéaire. Application à la discrétisation de l'équation d'énergie cinétique turbulente pour un modèle de turbulence à une équation. [Rapport de recherche] CEA, CEA/DAM/DIF, Bruyères-le-Châtel, France. 2001. cea-02931269

HAL Id: cea-02931269

<https://cea.hal.science/cea-02931269>

Submitted on 5 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude d'une équation de diffusion non linéaire.
Application à la discrétisation de l'équation d'énergie
cinétique turbulente pour un modèle de turbulence à une
équation

Pierre-Henri Maire

9 octobre 2001

Résumé

Dans ce rapport nous étudions une équation de diffusion non linéaire avec termes sources. Cette équation régit le transport de l'énergie cinétique turbulente dans le cadre d'un modèle de turbulence à une équation. Nous comparons différents schémas numériques à l'aide de cas tests analytiques. Le problème principal est la mise au point d'un schéma garantissant la propagation à la bonne vitesse du support de l'énergie cinétique turbulente.

Mots clefs

Modèle de turbulence à une équation, diffusion non linéaire avec termes sources, propagation de front.

Remerciements

Nous tenons à remercier MM. Buet et Desjardins pour leurs nombreux commentaires et conseils, ainsi que pour leurs relectures attentives.

Table des matières

1	Introduction	6
2	Rappel du modèle de turbulence	7
2.1	Mélange isobare-isotherme	7
2.2	Modèle de turbulence à une équation	9
2.3	Phénoménologie	10
3	Propriétés de l'équation en k	11
3.1	Equation modèle en 1 D	11
3.2	Rappels mathématiques	11
3.2.1	Diffusion non linéaire	11
3.2.2	Diffusion non linéaire avec absorption	13
3.2.3	Diffusion non linéaire avec absorption et production	13
3.3	Solutions analytiques	14
3.3.1	Solutions analytiques pour la diffusion non linéaire	14
3.3.2	Solutions analytiques pour la diffusion non linéaire avec absorption	18
3.3.3	Solutions analytiques pour la diffusion non linéaire avec absorption et production	22
3.4	Analyse en ondes progressives	29
3.4.1	Etude locale au voisinage du front	29
3.4.2	Etude globale	30
4	Discrétisation en 1D	35
4.1	Discrétisation du terme de dissipation	35
4.1.1	Le schéma d'ordre 1 implicite	36
4.1.2	Le schéma d'ordre 2 semi-implicite	36
4.2	Discrétisation du terme de production	37
4.2.1	Le schéma d'ordre 1 implicite	37
4.2.2	Le schéma d'ordre 2 semi-implicite	38
4.3	Discrétisation du terme de diffusion non linéaire	39
4.3.1	Discrétisation du problème (\mathcal{D}_1)	40
4.3.2	Discrétisation du problème (\mathcal{D}_2)	44
4.3.3	Discrétisation du problème (\mathcal{D}_3)	50
4.3.4	Discrétisation du problème (\mathcal{D}_4)	52
4.3.5	Résultats numériques	54
4.4	Discrétisation de l'équation modèle	63
4.4.1	Discrétisation spatiale	63
4.4.2	Discrétisation temporelle	63
4.4.3	Mise en place d'une troncature numérique	64
4.4.4	Résultats numériques	65
5	Discrétisation en 2D	73
5.1	Notations	73
5.2	Discrétisation en espace	74
5.2.1	Notations et hypothèses	74
5.2.2	Approximation du flux de diffusion	75
5.2.3	Système différentiel	78

5.3 Discrétisation en temps 79

6 Conclusion et perspectives 81

Table des figures

1	Comportement de la solution au voisinage du front	17
2	Solutions de l'équation de diffusion non linéaire	18
3	Solutions de l'équation de diffusion non linéaire avec absorption	23
4	Solutions de l'équation de diffusion non linéaire avec absorption et production	27
5	Propagation des interfaces	28
6	Allure des trajectoires	33
7	Allure de la solution onde progressive	34
8	Suite w^g	38
9	Support à $\Delta t = 0$	43
10	Notations schéma	45
11	Graphe de f	46
12	Comparaison f et g	47
13	Graphe de γ_k	52
14	Résultats relatifs au schéma (\mathcal{D}_1)	56
15	Résultats relatifs au schéma (\mathcal{D}_2)	57
16	Résultats relatifs au schéma (\mathcal{D}_3)	58
17	Influence du paramètre K	59
18	Comparaison des schémas	61
19	Comparaison des solutions pour différentes valeurs de τ	67
20	Etude de la convergence en temps pour $\Delta x = 0.1$	68
21	Etude de la convergence en espace pour $\Delta t = 0.02$	69
22	Conditions initiales	70
23	Solutions à $t = 10$	71
24	Position de l'interface au cours du temps	72
25	Notations	76
26	Approximation des flux	77

1 Introduction

L'objet de ce rapport est la mise au point d'un schéma numérique pour une équation de diffusion non linéaire avec termes sources. Cette équation régit l'évolution de l'énergie cinétique turbulente k dans le cadre d'un modèle de turbulence à une équation du type $k - L$ (cf. [6], [8] pour plus de précisions sur le sujet). Ce modèle de turbulence est utilisé pour décrire le comportement hydrodynamique d'un mélange de plusieurs fluides. Chaque fluide f est caractérisé par sa concentration massique C_f , celle-ci obéit à une équation de diffusion. Le coefficient de diffusion est proportionnel à la viscosité turbulente $\nu_t \sim L\sqrt{k}$. Ainsi, on constate que l'évolution de la Zone de Mélange Turbulente (ZMT), dans l'espace et au cours du temps, dépend directement du support de l'énergie cinétique turbulente. Dans les configurations physiques que l'on souhaite étudier, on sait qu'initialement et au cours du temps coexistent au sein de l'écoulement des zones en mélange et des zones non mélangées. Autrement dit la ZMT n'occupe pas tout le domaine de l'écoulement, ce qui implique que k est initialement à support compact et qu'elle doit le rester. Il en résulte l'existence d'un front turbulent : c'est la zone de transition dans laquelle k passe de $k > 0$ à $k = 0$. Cette zone que l'on qualifiera également d'interface, se propage au cours du temps. Cette propagation détermine l'évolution de la ZMT. **Il est donc capital d'un point de vue numérique de restituer correctement la propagation du front turbulent.** L'exposé qui suit découle directement de cette préoccupation, il s'articule de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler les équations du modèle de turbulence. Nous mettons en évidence une équation modèle monodimensionnelle pour k . Cette équation contient toutes les non linéarités qui caractérisent l'évolution de l'énergie cinétique turbulente : diffusion, dissipation et production.

Dans le second chapitre, nous étudions les propriétés de cette équation modèle. Nous rappelons certains résultats mathématiques concernant la diffusion non linéaire seule (cf. [24], [1]) et avec terme de dissipation (cf. [13]). Pour l'équation modèle, nous n'avons pas trouvé de résultats théoriques dans la littérature. Toutefois, nous sommes parvenus à exhiber une classe de solutions analytiques qui mettent en évidence une propagation à vitesse finie du support de la solution. En outre, nous montrons l'existence de solutions de type ondes progressives, ce qui permet d'obtenir des renseignements sur le comportement des solutions, localement au voisinage du front turbulent (cf. [23]) ainsi qu'asymptotiquement pour les temps grands (cf. [21]).

Muni de ces résultats, nous abordons dans le troisième chapitre la discrétisation de l'équation modèle en décomposant les difficultés. Nous étudions tout d'abord la discrétisation du terme de production. Celle-ci est délicate du fait de son caractère non Lipschitzien au voisinage du front. Nous passons rapidement sur le terme de dissipation qui ne présente pas de difficultés majeures. Nous nous consacrons ensuite à l'étude du terme de diffusion non linéaire pour lequel nous proposons différents schémas. Nous conservons celui qui restitue le mieux la propagation du front, par comparaison avec une solution analytique. Enfin, nous effectuons la synthèse des résultats précédents en proposant un schéma pour l'équation modèle. Son originalité réside dans l'utilisation d'une méthode de perturbations couplée à une troncature numérique judicieusement choisie. La validation du schéma effectuée avec les solutions analytiques et de type onde progressive montre une très bonne restitution de la propagation de l'interface.

Pour finir, le quatrième chapitre est consacré à l'extension bidimensionnelle du schéma à l'équation d'énergie cinétique turbulente.

2 Rappel du modèle de turbulence

Le modèle que l'on rappelle ci-après décrit l'évolution d'un mélange turbulent de fluides compressibles. Il s'agit d'un modèle de turbulence classique à une équation (voir les références [6] et [8]). La viscosité turbulente ν_t est construite par analyse dimensionnelle à l'aide de l'énergie cinétique turbulente k et d'une longueur caractéristique L suivant la formule :

$$(2.1) \quad \nu_t = C_\mu L \sqrt{k},$$

où C_μ est une constante strictement positive et k est solution d'une équation de diffusion qui caractérise le modèle de turbulence, que l'on donnera dans le paragraphe suivant.

Chaque fluide f est caractérisé par sa concentration massique C_f et on fait l'hypothèse qu'il s'agit d'un gaz parfait. Le mélange est décrit par les variables thermodynamiques usuelles : P , ρ , ε , T , respectivement la pression, la densité, l'énergie interne et la température. On note également u la vitesse. Avant d'écrire les équations du modèle nous rappelons la fermeture thermodynamique du mélange.

2.1 Mélange isobare-isotherme

Comme son nom l'indique il s'agit d'un modèle de mélange pour lequel les pressions et températures de chaque fluide sont égales.

Soient P_f , ρ_f , ε_f , T_f , γ_f et \mathcal{M}_f respectivement la pression, la densité, l'énergie interne, la température, la constante polytropique et la masse molaire moléculaire du fluide f . Étant donné que le fluide f est un gaz parfait nous avons :

$$(2.2) \quad \begin{cases} P_f = \frac{R}{\mathcal{M}_f} \rho_f T_f, \\ \varepsilon_f = \frac{R}{(\gamma_f - 1)\mathcal{M}_f} T_f, \end{cases}$$

où R est la constante des gaz parfaits. Nous allons rappeler comment établir une équation d'état de mélange en utilisant une fermeture isobare-isotherme. Pour ce faire on écrit successivement :

- l'additivité des volumes

si m désigne la masse du mélange et m_f celle du fluide f , il vient :

$$\frac{m}{\rho} = \sum_{f=1}^F \frac{m_f}{\rho_f},$$

d'où

$$(2.3) \quad \frac{1}{\rho} = \sum_{f=1}^F \frac{C_f}{\rho_f},$$

- la contrainte isobare-isotherme

$$(2.4) \quad \begin{cases} P_f = P, \\ T_f = T, \quad f = 1, \dots, F; \end{cases}$$

- l'additivité des énergies internes

$$(2.5) \quad m\varepsilon = \sum_{f=1}^F m_f \varepsilon_f.$$

En utilisant (2.2) et (2.4) on écrit

$$\frac{RT}{M_f} = \frac{P}{\rho_f},$$

on multiplie cette relation par C_f puis on somme sur tous les fluides en substituant (2.3), d'où :

$$(2.6) \quad \frac{P}{\rho RT} = \sum_{f=1}^F \frac{C_f}{M_f};$$

à partir de cette dernière relation on définit la masse molaire du mélange, soit M :

$$(2.7) \quad M = \frac{1}{\sum_{f=1}^F \frac{C_f}{M_f}}.$$

En divisant (2.5) par m et en substituant (2.2) et (2.4) il vient :

$$(2.8) \quad \varepsilon = \sum_{f=1}^F \frac{C_f}{(\gamma_f - 1)M_f} RT;$$

Finalement en combinant (2.6) et (2.8) on obtient :

$$\frac{P}{\rho\varepsilon} = \frac{\sum_{f=1}^F \frac{C_f}{M_f}}{\sum_{f=1}^F \frac{C_f}{(\gamma_f - 1)M_f}},$$

on en déduit l'équation d'état équivalente pour le mélange :

$$(2.9) \quad P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,$$

où l'on a posé

$$(2.10) \quad \gamma = 1 + \frac{\sum_{f=1}^F \frac{C_f}{M_f}}{\sum_{f=1}^F \frac{C_f}{(\gamma_f - 1)M_f}}.$$

On retrouve alors pour le mélange une équation d'état de type gaz parfait avec une constante polytropique γ déterminée par la donnée du champ des concentrations.

Remarque 1 *Le cas du gaz parfait est intéressant car on aboutit à une équation d'état équivalente analytique. Pour des équations d'état plus générales (en particulier des équations d'état tabulées) le problème n'est plus analytique et il est nécessaire de mettre en place un algorithme numérique pour obtenir l'équation d'état du mélange.*

2.2 Modèle de turbulence à une équation

On rappelle ci-après les équations du modèle. Dans tout ce qui suit nous faisons l'hypothèse que la diffusion moléculaire est négligeable devant la diffusion turbulente.

L'écoulement est régi par :

- les équations de concentrations

$$(2.11) \quad \rho \frac{dC_f}{dt} - \nabla \cdot (\rho D_c \nabla C_f) = 0,$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulière, D_c est un coefficient de diffusion turbulente défini par : $D_c = \frac{\nu_t}{\sigma_c}$ et σ_c une constante du modèle, strictement positive;

- l'équation de conservation de la masse

$$(2.12) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \nabla \cdot u = 0;$$

- l'équation de quantité de mouvement

$$(2.13) \quad \rho \frac{du}{dt} + \nabla P + \nabla P_t - \nabla \cdot (2\rho D_u S) = 0,$$

où $P_t = \frac{2}{3}\rho k$ est la pression turbulente, $D_u = \frac{\nu_t}{\sigma_u}$, un coefficient de viscosité turbulente;

on note $\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ le tenseur des vitesses de déformation et $S = \mathcal{D} - \frac{1}{3}\text{Id}\nabla \cdot u$ le déviateur de \mathcal{D} , enfin Id désigne le tenseur identité;

- l'équation d'énergie interne

$$(2.14) \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) P - \nabla \cdot \left[\rho D_\varepsilon \nabla \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) \right] - \rho D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} + \rho \nu_t \left[\frac{\nabla \rho \cdot \nabla P}{\rho^2} \right]_- = 0,$$

avec $D_\varepsilon = \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}$ et si $x \in \mathbb{R}$, $[x]_- = -\min(0, x)$;

- l'équation d'énergie cinétique turbulente

$$(2.15) \quad \rho \frac{dk}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) P_t - \nabla \cdot (\rho D_k \nabla k) + \rho D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} - \rho \nu_t \left[\frac{\nabla \rho \cdot \nabla P}{\rho^2} \right]_- - 2\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} S : \mathcal{D} = 0$$

avec $D_k = \frac{\nu_t}{\sigma_k}$, $S : \mathcal{D}$ désigne le produit contracté de S et \mathcal{D} défini par :

$$S : \mathcal{D} = \sum_{i,j} S_{i,j} \mathcal{D}_{j,i},$$

comme \mathcal{D} est symétrique et S de trace nulle, il est clair que :

$$S : \mathcal{D} = S : S \geq 0.$$

NB : σ_u , σ_ε et σ_k sont des constantes strictement positives.

Remarque 2 Le terme proportionnel au produit scalaire des gradients de pression et de densité n'est autre que le terme dit de Rayleigh-Taylor qui modélise la production d'énergie cinétique turbulente par l'instabilité de Rayleigh-Taylor (voir la référence [11]).

2.3 Phénoménologie

Le modèle précédent vise à décrire l'évolution d'une zone de mélange turbulente (ZMT) au sein d'un écoulement hydrodynamique multimatériaux. La ZMT correspond au support de l'énergie cinétique turbulente k régie par l'équation (2.15). Pour des raisons physiques, cette ZMT doit rester à support compact. Il est donc crucial de suivre correctement la propagation du front d'énergie cinétique turbulente. Cette contrainte, comme on le verra ultérieurement, va nous obliger à étudier de façon précise la discrétisation de l'équation en k . En effet si la solution numérique de cette dernière se propage trop rapidement, cela aura un effet désastreux sur la thermodynamique du mélange car le coefficient de diffusion des concentrations est directement proportionnel à \sqrt{k} . De plus, la dynamique du mélange sera perturbée à travers le gradient de pression turbulente ($2/3\rho k$). Ainsi la ZMT peut diffuser dans tout l'écoulement. Il convient donc de se poser la question suivante : partant d'une énergie cinétique turbulente à support compact à $t = 0$, qu'en est-il de k solution de (2.15) aux instants ultérieurs ?

3 Propriétés de l'équation en k

L'objet de cette partie est d'étudier le comportement de k solution de (2.15), partant d'une donnée initiale à support compact. On mettra plus particulièrement l'accent sur la propagation du support de k (front turbulent). Une étude directe d'un point de vue mathématique est hors de notre portée du fait de sa complexité (problème multidimensionnel, inhomogène, fortement non linéaire et de plus couplé à l'hydrodynamique). Pour toutes ces raisons, nous travaillerons sur un modèle simplifié monodimensionnel en géométrie plane. Nous supposerons de plus que l'écoulement hydrodynamique est donné, par contre nous conserverons l'essentiel des non linéarités qui caractérisent la propagation du front turbulent.

3.1 Equation modèle en 1 D

Nous allons expliciter une équation modèle à partir de (2.15), pour ce faire réécrivons (2.15) en explicitant chaque terme :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{dk}{dt} &= \nabla \cdot \left(\rho \frac{C_\mu}{\sigma_k} L \sqrt{k} \nabla k \right) \text{ diffusion turbulente} \\
 &- \left(\frac{2}{3} \rho k \right) \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \text{ travail pression turbulente} \\
 &+ 2 \rho \frac{C_\mu}{\sigma_u} L \sqrt{k} S : S \text{ production cisaillement} \\
 &- \rho D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} \text{ dissipation} \\
 &+ \rho L C_\mu \sqrt{k} \left[\frac{\nabla \rho \cdot \nabla P}{\rho^2} \right]_- \text{ production Rayleigh-Taylor.}
 \end{aligned}$$

On note que $S : S \geq 0$ et $[\nabla \rho \cdot \nabla P]_- \geq 0$, donc dès que l'écoulement est cisailé ou en phase d'instabilité, alors il y a production d'énergie cinétique turbulente.

Nous construisons l'équation modèle en gardant toutes les non linéarités de l'équation en k par contre on oublie le couplage à l'hydrodynamique ce qui nous donne $k \equiv k(x, t)$ solution de :

$$(\mathcal{MOD}) \begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k^{\frac{3}{2}}) + ck^{\frac{3}{2}} - dk^{\frac{1}{2}} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ k(x, 0) = k^0(x) \geq 0, & \text{à support compact,} \end{cases}$$

où c et d sont des constantes réelles positives. Avant d'étudier cette équation modèle nous faisons quelques rappels mathématiques concernant les problèmes de diffusion non linéaire.

3.2 Rappels mathématiques

3.2.1 Diffusion non linéaire

Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[$, soit $v(x, t)$ solution de

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^m) = 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, & \text{à support compact;} \end{cases}$$

où $m > 1$. L'équation précédente est connue dans la littérature sous le nom d'équation des milieux poreux. Elle modélise, entre autres, l'écoulement d'un gaz au sein d'un milieu poreux (cf. [1]) ainsi que les phénomènes de conduction thermique non linéaire, on se reportera à la référence [24] pour plus de détails sur le sujet. Dans le cas où $m > 1$, (\mathcal{P}_1) est une équation non linéaire qui est parabolique pour $v > 0$, mais qui dégénère pour $v = 0$. Cette **dégénérescence implique l'existence d'un front¹ qui se propage à vitesse finie** (contrairement au cas linéaire $m = 1$). Par conséquent, si à un instant t une solution v de (\mathcal{P}_1) est à support compact, alors elle restera à support compact pour les temps ultérieurs. En général la régularité de v au voisinage du front n'est pas assurée, elle dépend fortement de la valeur de m . Cette absence de régularité nécessite l'introduction de la notion de solutions généralisées pour le problème (\mathcal{P}_1) (i.e. solutions faibles). L'étude rigoureuse de la régularité des solutions de (\mathcal{P}_1) est faite par *Aronson* dans la référence [1].

Nous nous contentons de rappeler les résultats essentiels, à savoir :

- pour $m > 1$, v est Hölderienne² d'exposant $\min\left(1, \frac{1}{m-1}\right)$;
- le flux $\frac{\partial}{\partial x}(v^m)$ est continu, en particulier on a $\frac{\partial}{\partial x}(v^m) = 0$ là où $v = 0$;
- en outre pour $m < 2$, $\frac{\partial}{\partial x}v$ existe et est continu en x et en particulier $\frac{\partial}{\partial x}v = 0$ là où $v = 0$;

Pour l'équation en k , (\mathcal{P}_1) modélise la partie diffusion dans le cas où $m = \frac{3}{2}$. Ainsi le terme de diffusion turbulente contribue à une propagation du front de la ZMT à vitesse finie (à la condition que le profil d'énergie cinétique turbulente initial soit à support compact).

Pour terminer nous rappelons un résultat dû à *Kamenomostskaya* [15], concernant le comportement asymptotique en temps grand des solutions de (\mathcal{P}_1) . Soit v solution de (\mathcal{P}_1) avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^0(x) dx = E_0,$$

E_0 représente l'énergie associée à la donnée initiale, on montre sans peine que c'est un invariant de (\mathcal{P}_1) . Soit également pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[$, $u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^m) = 0, \\ u(x, 0) = E_0 \delta; \end{cases}$$

où δ est la mesure de Dirac. Cette dernière équation est invariante par un certain groupe de transformations, elle admet en conséquence une solution auto-semblable (cf. [17], [24]) qui s'écrit :

$$(3.1) \quad u(x, t) = E_0^{\frac{2}{m+1}} t^{-\frac{1}{m+1}} \Phi \left(x E_0^{-\frac{m-1}{m+1}} t^{-\frac{1}{m+1}} \right),$$

1. Le front est la zone de transition entre la région où $v > 0$ et celle où $v = 0$.

2. Soient f une fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle I et $\alpha \in]0, 1]$. f est Hölderienne d'exposant α si et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+; \forall (x, y) \in I^2; |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha.$$

où

$$\begin{cases} \Phi(\zeta) = a(m) (\zeta_0^2 - \zeta^2)^{\frac{1}{m-1}}, & |\zeta| \leq \zeta_0, \\ \Phi(\zeta) = 0, & |\zeta| \geq \zeta_0, \end{cases}$$

où $a(m)$ et ζ_0 sont des constantes.

Kamenomostskaya démontre que :

$$t^{\frac{1}{m+1}} |v(x, t) - u(x, t)| \rightarrow 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty,$$

et ce uniformément pour $x \in \mathbb{R}$. Toutes les solutions de (\mathcal{P}_1) ayant la même énergie initiale E_0 tendent asymptotiquement vers la solution auto-semblable (3.1).

3.2.2 Diffusion non linéaire avec absorption

Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[$, soit $v(x, t)$ solution de

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^m) + cv^p = 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, \text{ à support compact;} \end{cases}$$

où $m > 1$, $p > 0$ et $c > 0$. Par rapport au problème précédent nous avons rajouté le terme d'absorption cv^p . (\mathcal{P}_2) modélise la conduction thermique dans un milieu absorbant, on se reportera à la référence [24] pour une description détaillée des modèles physiques correspondants. D'un point de vue mathématique le problème (\mathcal{P}_2) est étudié par *Herrero et Vasquez* dans la référence [13]. Nous redonnons ci-après les résultats essentiels. De manière analogue au problème précédent, (\mathcal{P}_2) est un problème parabolique dégénéré. Si v^0 est à support compact, v l'est aussi et le support de la solution se propage à vitesse finie. Dans le cas où $p \geq m$, la régularité de v aux interfaces (zones de transition de $v > 0$ à $v = 0$) est identique au cas précédent à savoir :

- v est Hölderienne d'exposant $\min\left(1, \frac{1}{m-1}\right)$;
- le flux $\frac{\partial}{\partial x}(v^m)$ est continu;
- de plus dans le cas où $m < 2$ le gradient de v à l'interface est continu.

Le lien avec l'équation en k est fait en posant $p = m = \frac{3}{2}$, et dans ce cas (\mathcal{P}_2) modélise l'équation en k pour un écoulement hydrodynamique homogène.

3.2.3 Diffusion non linéaire avec absorption et production

Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[$, soit $v(x, t)$ solution de

$$(\mathcal{P}_3) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^m) + cv^p - dv^q = 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, \text{ à support compact;} \end{cases}$$

où $m > 1$, $p > 0$, $c > 0$, $q > 0$ et $d > 0$. Ce problème généralise le problème précédent par l'ajout d'un terme de production dv^q . Il correspond à l'équation modèle (MOD) dans le cas où $m = p = \frac{3}{2}$, $c = d = 1$ et $q = \frac{1}{2}$. A notre connaissance il n'y a pas de résultats théoriques généraux concernant les solutions de (\mathcal{P}_3) . Néanmoins dans la section suivante nous exhibons une classe de solutions analytiques de ce problème qui nous permettent d'appréhender le comportement des solutions de (\mathcal{P}_3) .

3.3 Solutions analytiques

Dans cette section nous exhibons des solutions analytiques pour les trois problèmes évoqués précédemment. Ces solutions permettent d'illustrer les résultats théoriques énoncés pour les problèmes (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ; pour (\mathcal{P}_3) , en l'absence de résultats théoriques, elles seront le seul support de notre étude. Outre l'aspect illustratif, ces solutions analytiques nous seront également d'un grand secours pour tester les méthodes numériques que nous utiliserons.

3.3.1 Solutions analytiques pour la diffusion non linéaire

Les solutions analytiques pour le modèle (\mathcal{P}_1) sont bien connues, elles ont été introduites par *Barenblatt et Zel'dovich*. Dans les références [2] et [24], elles sont obtenues à partir de considérations de similitude et d'analyse dimensionnelle (théorème Π ou de Vaschy-Buckingham, cf. [2]). Dans ce cas les solutions s'expriment en fonction de groupements monomiaux en x et t , elles sont la plupart du temps singulières pour $t = 0$, et de ce fait inadaptées pour la mise au point de cas tests analytiques.

Dans ce paragraphe nous recherchons des solutions avec une **méthode de séparation des variables**, afin que les solutions obtenues soient régulières pour $t = 0$. On se place dans un cadre plus général que le modèle (\mathcal{P}_1) puisque nous traitons les géométries plane, cylindrique et sphérique. Soient $r \geq 0$, $t \geq 0$ et $v(r, t)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\nu \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0, \\ v(r, 0) = v^0(r) \geq 0, \text{ à support compact } : [0, r_0]; \end{cases}$$

où $\nu = 0, 1, 2$, respectivement dans les cas plan, cylindrique et sphérique. Comme la donnée initiale est à support compact, on sait que pour $t > 0$, $v(r, t)$ l'est aussi. A $t = 0$ l'interface se trouve en r_0 , à $t > 0$ on note $r_0 \lambda(t)$ la position de l'interface. On introduit la fonction λ , strictement positive que l'on suppose continuellement dérivable, on a de plus $\lambda(0) = 1$. On cherche des solutions du problème précédent sous la forme :

$$(3.2) \quad \begin{cases} r = z \lambda(t), \\ v(r, t) = \alpha(t) V(z); \end{cases}$$

avec $z \in [0, r_0]$ et $\alpha(t) > 0$. A priori α est une fonction inconnue supplémentaire, mais en écrivant la conservation de l'énergie nous allons montrer que α s'exprime en fonction de λ . Soit $E(t)$ l'énergie associée à v définie par :

$$(3.3) \quad E(t) = \int_0^{r_0 \lambda(t)} v(r, t) r^\nu dr;$$

en intégrant l'équation vérifiée par v on montre que $\frac{d}{dt} E(t) = 0$, d'où

$$E(t) = \int_0^{r_0} v^0(r) r^\nu dr.$$

En substituant l'expression de r en fonction de λ et z puis celle de v en fonction de α et V dans (3.3) il vient :

$$(\lambda(t))^{\nu+1} \alpha(t) = \frac{E}{\int_0^{r_0} V(z) z^\nu dz}.$$

En posant

$$s = \frac{E}{\int_0^{r_0} V(z) z^\nu dz},$$

nous obtenons finalement

$$(3.4) \quad \alpha(t) = s (\lambda(t))^{-(\nu+1)}.$$

Il nous reste à évaluer les dérivées partielles de v exprimées dans les nouvelles variables, ce qui tous calculs faits nous donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -s \lambda^{-(\nu+2)} \dot{\lambda} [(\nu+1)V + zV'], \\ \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\nu \frac{\partial v}{\partial r} \right) = s^m \lambda^{-m(\nu+1)-2} z^{-\nu} [z^\nu (V^m)']'; \end{cases}$$

avec les notations classiques $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ et $V' = \frac{dV}{dz}$. Après substitution de ces expressions dans l'équation de diffusion :

$$s^{1-m} \lambda^{(m-1)\nu+m} \dot{\lambda} (z^{\nu+1}V)' + [z^\nu (V^m)']' = 0;$$

on peut alors séparer les variables en introduisant la constante C_0 telle que

$$\begin{cases} \lambda^{(m-1)\nu+m} \dot{\lambda} = s^{m-1} C_0 \\ C_0 (z^{\nu+1}V)' + [z^\nu (V^m)']' = 0; \end{cases}$$

on choisit $C_0 > 0$ et on pose sans perte de généralités $C_0 = 1$ (changement d'échelle de temps). La séparation des variables nous fournit une équation différentielle temporelle pour λ et une équation différentielle spatiale pour V .

– Equation différentielle temporelle :

$$\begin{cases} \lambda^{(m-1)\nu+m} \dot{\lambda} = s^{m-1} \\ \lambda(0) = 1; \end{cases}$$

cette équation s'intègre pour donner :

$$(3.5) \quad \lambda(t) = [s^{m-1} ((m-1)\nu + m + 1)t + 1]^{\frac{1}{(m-1)\nu+m+1}}.$$

– Equation différentielle spatiale :

$$\begin{cases} (z^{\nu+1}V)' + [z^\nu (V^m)']' = 0, \\ V(r_0) = 0, \\ V'(0) = 0; \end{cases}$$

cette équation s'intègre sans difficulté et on obtient tous calculs faits :

$$(3.6) \quad \begin{cases} V(z) = \left[\frac{m-1}{2m} (r_0^2 - z^2) \right]^{\frac{1}{m-1}}, & 0 \leq z \leq r_0; \\ V(z) = 0, & z > r_0. \end{cases}$$

On obtient finalement l'expression de la solution dans les variables initiales :

$$\begin{cases} v(r, t) = s \left[s^{m-1} ((m-1)\nu + m + 1)t + 1 \right]^{-\frac{(\nu+1)}{(m-1)\nu+m+1}} \left[\frac{m-1}{2m} (r_0^2 - z^2) \right]^{\frac{1}{m-1}}, & 0 \leq z \leq r_0; \\ v(r, t) = 0, & z > r_0. \end{cases}$$

Cette solution est à support compact, la position de l'interface $r_i(t)$ est donnée par

$$r_i(t) = r_0 \lambda(t).$$

avec λ définie en (3.5).

Remarque 3 Dans le cas où $m = 1$ on obtient :

$$\lambda(t) = \sqrt{2t + 1},$$

et on retrouve alors la variable auto-similaire pour l'équation de la chaleur :

$$z = \frac{r}{\sqrt{2t + 1}}.$$

V est solution de :

$$V' + zV = 0.$$

qui s'intègre en :

$$V(z) = cte \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right),$$

d'où la solution

$$v(r, t) = cte (\sqrt{2t + 1})^{(\nu+1)} s \exp\left(-\frac{r^2}{2(2t + 1)}\right),$$

on retrouve la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, de plus on remarque que la solution n'est plus à support compact.

Examinons la régularité de la solution au voisinage de l'interface. Pour ce faire, on calcule la dérivée de V par rapport à z et on évalue la dérivée à gauche de $z = r_0$:

$$V'(z) = -\frac{z}{m} \left[\frac{m-1}{2m} (r_0^2 - z^2) \right]^{\frac{2-m}{m-1}},$$

- si $1 < m < 2$:

$$\lim_{z \rightarrow r_0^-} V'(z) = 0,$$

- si $m = 2$:

$$\lim_{z \rightarrow r_0^-} V'(z) = -\frac{r_0}{2},$$

- si $m > 2$:

$$\lim_{z \rightarrow r_0^-} V'(z) = -\infty.$$

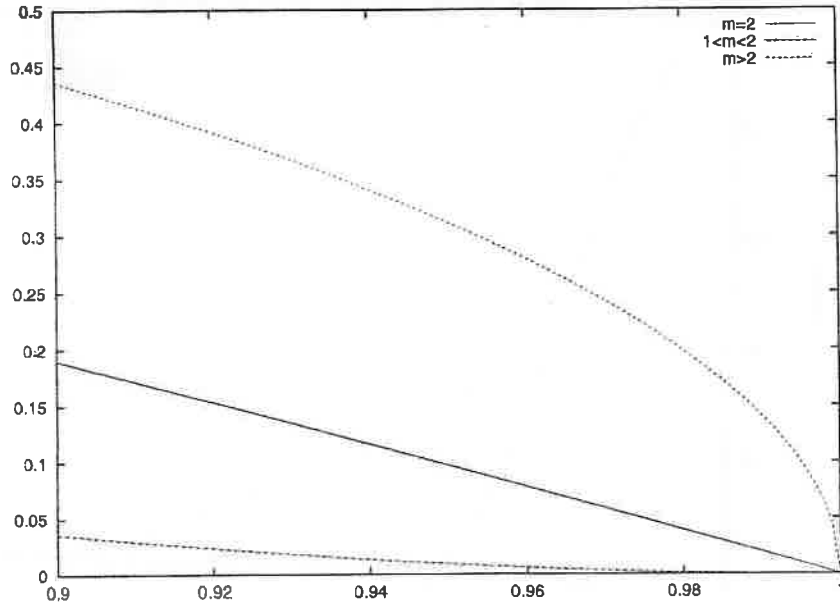


FIG. 1 – Comportement de la solution au voisinage du front

Le premier cas correspond à l'équation de l'énergie cinétique turbulente ($m = \frac{3}{2}$), il y a propagation d'un front et la solution est régulière au voisinage de ce front. Le dernier cas correspond à l'équation du transfert radiatif dans un plasma ($m = 5.5$ à 6.5), voir la référence [24], il y a propagation d'un front infiniment raide. La figure 1 illustre les trois cas précédents dans le cas où $r_0 = 1$.

Récapitulatif : En vue de réaliser des cas tests numériques, on particularise l'écriture de la solution, on choisit s et r_0 de telle sorte que $v(0,0) = 1$, on en déduit $r_0 = 1$, $s^{m-1} = \frac{2m}{m-1}$ et

$$\begin{cases} v(r,t) = \left[\frac{2m}{m-1} ((m-1)\nu + m + 1)t + 1 \right]^{-\frac{(\nu+1)}{(m-1)\nu+m+1}} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{\lambda(t)} \right)^2 \right)_+ \right]^{\frac{1}{m-1}} ; \\ \lambda(t) = [s^{m-1} ((m-1)\nu + m + 1)t + 1]^{\frac{1}{(m-1)\nu+m+1}} ; \\ v(r,0) = [(1-r^2)]^{\frac{1}{m-1}} ; \end{cases}$$

Application numérique : dans le cas où $m = \frac{3}{2}$ pour une géométrie plane nous obtenons :

$$(3.7) \quad \begin{cases} v(r,t) = (15t+1)^{-\frac{2}{5}} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{\lambda(t)} \right)^2 \right)_+ \right]^2 ; \\ \lambda(t) = (15t+1)^{\frac{2}{5}} ; \\ v(r,0) = [(1-r^2)_+]^2 . \end{cases}$$

On représente en figure (2) les solutions dans le cas où $m = \frac{3}{2}$ pour les trois géométries.

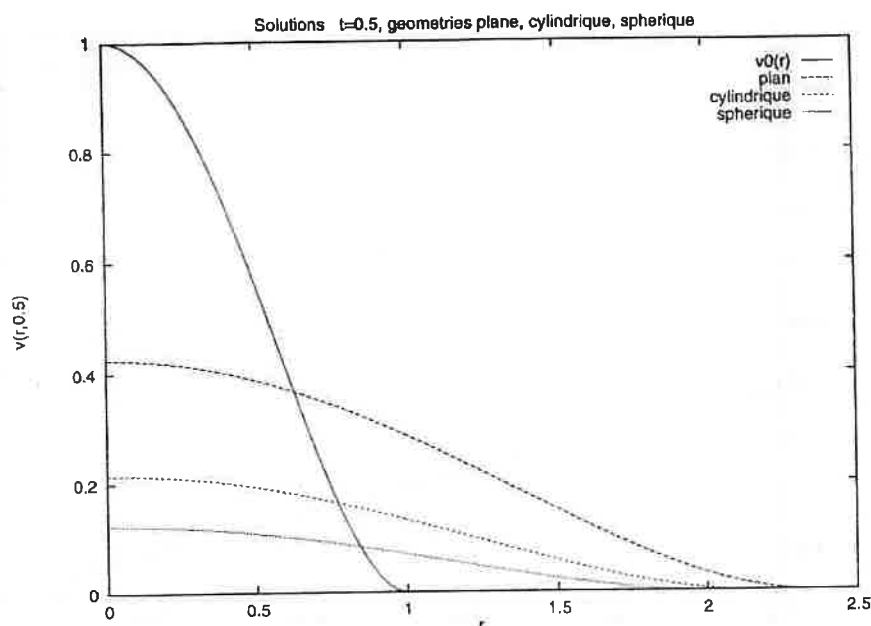


FIG. 2 – Solutions de l'équation de diffusion non linéaire

3.3.2 Solutions analytiques pour la diffusion non linéaire avec absorption

Dans le cas présent on se limitera à la géométrie plane et on cherche des solutions analytiques du problème suivant : pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^m) + cv^p = 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, \text{ à support compact : } [0, x_0]; \end{cases}$$

avec $m > 1$, $p > 0$ et $c > 0$. On trouve dans la littérature des solutions explicites de ce problème. Ainsi *Bertsch, Kersner et Pelletier* proposent dans [3] des solutions de la forme :

$$v(x, t) = \left[\frac{1}{f(t)} \left(\theta - \frac{\cosh(\alpha x) - 1}{g(t)} \right) \right]_+^{\frac{1}{m-1}},$$

où $\theta > 0$ est une constante arbitraire, $\alpha = \sqrt{c} \left(\frac{(m-1)}{m} \right)$, f, g sont des fonctions positives strictement croissantes solutions de :

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{c(m^2 - 1)}{m}.$$

Cependant, ils ne fournissent pas de méthode de recherche de ces solutions. Pour cette raison, dans ce paragraphe nous généralisons les résultats précédents, en proposant une méthode originale de recherche de solutions.

On commence par effectuer le changement de fonction inconnue $w = v^{m-1}$ qui est classique pour ce genre de problème (cf. [13]). alors w vérifie :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - mw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(m-1)w^{\frac{p+m-2}{m-1}} = 0,$$

l'exposant du terme d'absorption met en évidence deux valeurs particulières de p pour m fixé : $p + m = 2$ et $p = m$; c'est cette dernière valeur qui nous intéresse pour l'équation en k ; on suppose dorénavant $p = m$ et w vérifie :

$$(3.8) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - mw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(m-1)w^2 = 0.$$

On voit tout l'intérêt du changement de variable précédent qui nous permet d'obtenir des non linéarités indépendantes de m . Introduisons l'opérateur \mathcal{A} défini par :

$$\mathcal{A}w = \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + mw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c(m-1)w^2,$$

alors (3.8) s'écrit :

$$(3.9) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{A}w,$$

l'idée fondamentale pour chercher des solutions de (3.8) est de trouver un sous espace de dimension finie \mathcal{W} qui reste stable par application de l'opérateur \mathcal{A} . Cette méthode est développée par *Galaktionov* dans la référence [9] pour un autre type de problème, mais elle se transpose sans difficultés au cas qui nous intéresse. Soit par exemple :

$$\mathcal{W} = \text{vect} (1, f_1(x), f_2(x), \dots, f_K(x)),$$

le sous espace engendré par la famille des fonctions $\{f_i\}_{i=1,\dots,K}$ plus la fonction 1. Alors on cherche w sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(t) f_k(x) + \alpha_0(t),$$

puisque \mathcal{W} est stable par \mathcal{A} , après substitution de w dans (3.9), l'équation aux dérivées partielles se ramène à un système différentiel de taille $K + 1$ portant sur les coefficients α_i $i = 0, \dots, K$. Tout le problème consiste à déterminer des sous espaces \mathcal{W} qui restent stables par application de \mathcal{A} . Au vu de la structure de \mathcal{A} on cherchera \mathcal{W} sous la forme³ :

$$(3.10) \quad \mathcal{W} = \text{vect} (1, \cosh(\lambda x)),$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons qu'en choisissant λ correctement alors $\mathcal{A}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$. Il est évident que $\mathcal{A}(1) \in \mathcal{W}$. Evaluons maintenant $\mathcal{A}(\cosh(\lambda x))$, après quelques calculs nous obtenons :

$$\mathcal{A}(\cosh(\lambda x)) = -\frac{m}{m-1} \lambda^2 + \cosh^2(\lambda x) \left[\frac{m^2}{m-1} \lambda^2 - c(m-1) \right];$$

pour que \mathcal{W} reste stable le coefficient de $\cosh^2(\lambda x)$ doit être identiquement nul, d'où

$$(3.11) \quad \lambda = \mp \frac{m-1}{m} \sqrt{c}.$$

Finalement $\mathcal{W} = \text{vect} (1, \cosh(\lambda x))$, avec λ donné par (3.11) est stable par \mathcal{A} . On peut maintenant chercher w sous la forme du développement suivant :

$$(3.12) \quad w(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cosh(\lambda x),$$

3. On pourrait aussi prendre $\mathcal{W} = \text{vect} (1, \exp(\lambda x), \exp(-\lambda x))$

avec λ donné par (3.11). En substituant ce développement dans (3.8), il vient après calculs :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - Aw = \dot{\alpha}_0(t) + c(m-1)\alpha_0^2(t) + \frac{m}{m-1}\alpha_1^2(t) \\ \quad + [\dot{\alpha}_1(t) + (2c(m-1) - \lambda^2 m)\alpha_0(t)\alpha_1(t)] \cosh(\lambda x). \end{cases}$$

La contribution en $\cosh^2(\lambda x)$ disparaît du fait de (3.11). En écrivant la nullité du second membre de l'équation précédente nous obtenons le système d'équations différentielles suivant pour α_0 et α_1 :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0(t) = -c(m-1) \left(\alpha_0^2(t) + \frac{1}{m}\alpha_1^2(t) \right), \\ \dot{\alpha}_1(t) = -c \frac{m^2-1}{m} \alpha_0(t)\alpha_1(t), \end{cases}$$

que nous allons résoudre. En effectuant le quotient membre à membre des deux équations précédentes, on élimine le temps et on se ramène à l'équation différentielle ordinaire :

$$(3.13) \quad \frac{d\alpha_0}{d\alpha_1} = \frac{m}{m+1} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{1}{m} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right),$$

et on va chercher α_0 en fonction de α_1 . (3.13) est une équation du type Ricatti. En multipliant (3.13) par α_0 , on aboutit à l'équation linéaire en α_0^2 :

$$(3.14) \quad \frac{d\alpha_0^2}{d\alpha_1} = \frac{2m}{m+1} \left(\frac{\alpha_0^2}{\alpha_1} + \frac{1}{m}\alpha_1 \right),$$

dont la solution s'écrit :

$$(3.15) \quad \alpha_0^2 = \alpha_1^2 + K_0 (\alpha_1^2)^{\frac{m}{m+1}},$$

où K_0 est une constante d'intégration.

On choisit $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 < 0$ et $K_0 = 1$, on en déduit immédiatement :

$$(3.16) \quad \alpha_0 = -\alpha_1 \sqrt{1 + (\alpha_1^2)^{-\frac{1}{m+1}}}.$$

Afin de simplifier les notations on pose $\alpha = -\alpha_1$, on en déduit :

$$\alpha_0 = \alpha \sqrt{1 + (\alpha^2)^{-\frac{1}{m+1}}}.$$

En revenant au système différentiel initial, on obtient $\alpha(t)$ solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(3.17) \quad \dot{\alpha}(t) = -c \frac{m^2-1}{m} \alpha_0^2(t) \sqrt{1 + [\alpha^2(t)]^{-\frac{1}{m+1}}},$$

à laquelle on adjoint la condition initiale $\alpha(0) = 1$ (totalement arbitraire). On montre sans peine que (3.17) munie de la condition initiale précédente admet une unique solution strictement positive et décroissante. On a de plus le comportement asymptotique suivant pour α :

$$(3.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [c(m-1)t]^{\frac{m+1}{m}} \alpha(t) = 1.$$

Il n'y a pas de solutions explicites pour l'équation différentielle (3.17), on envisagera donc un algorithme numérique (cf. la référence [7]) pour sa résolution, ce qui ne pose pas de problème a priori. On peut alors donner l'expression de w en fonction de α :

$$(3.19) \quad w(x, t) = \alpha(t) \sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{2}{m+1}}} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda x)}{\sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{2}{m+1}}}} \right]_+;$$

On détermine la position de l'interface $x_i(t)$ en résolvant l'équation $w(x_i(t), t) = 0$ et $x_i(t)$ est solution de :

$$\cosh(x_i(t)) = \sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{2}{m+1}}},$$

d'où

$$(3.20) \quad x_i(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{2}{m+1}}} + (\alpha(t))^{-\frac{1}{m+1}} \right].$$

Examinons la régularité de la solution ainsi obtenue au voisinage de l'interface. En utilisant la définition de x_i , v peut encore s'écrire :

$$(3.21) \quad v(x, t) = [\alpha(t) (\cosh(\lambda x_i(t)) - \cosh(\lambda x))_+]^{\frac{1}{m-1}};$$

ainsi au voisinage de l'interface v se comporte de la manière suivante :

$$(3.22) \quad v(x, t) \sim [\alpha(t) \lambda \sinh(\lambda x_i(t)) (x_i(t) - x)_+]^{\frac{1}{m-1}};$$

- si $1 < m < 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0,$$

- si $m = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\alpha(t) \lambda \sinh(\lambda x_i(t)),$$

- si $m > 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\infty.$$

Le premier cas correspond à l'équation de l'énergie cinétique turbulente ($m = \frac{3}{2}$), il y a propagation d'un front et la solution est régulière au voisinage de ce front.

Récapitulatif : en rassemblant les résultats précédents, nous avons obtenu une solution \hat{v} qui s'écrit :

$$(3.23) \quad v(x, t) = \left[\alpha(t) \sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{2}{m+1}}} \right]^{\frac{1}{m-1}} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda x)}{\sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{2}{m+1}}}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}};$$

avec $\lambda = \mp \frac{m-1}{m} \sqrt{c}$ et α est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -c \frac{m^2 - 1}{m} \alpha^2(t) \sqrt{1 + [\alpha^2(t)]^{-\frac{1}{m+1}}}, \\ \alpha(0) = 1, \end{cases}$$

la donnée initiale correspondante v^0 s'écrit :

$$v^0(x) = \sqrt{2}^{\frac{1}{m-1}} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda x)}{\sqrt{2}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Application numérique : dans le cas où $m = \frac{3}{2}$ et $c = 1$ nous avons : $\lambda = \mp \frac{1}{3}$,

$$v(x, t) = \left[\alpha(t) \sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{4}{5}}} \right]^2 \left[1 - \frac{\cosh(\frac{x}{3})}{\sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{4}{5}}}} \right]_+^2,$$

α est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -\frac{5}{6} \alpha^2(t) \sqrt{1 + [\alpha^2(t)]^{-\frac{2}{5}}}, \\ \alpha(0) = 1, \end{cases}$$

la donnée initiale correspondante v^0 s'écrit :

$$v^0(x) = 2 \left[1 - \frac{\cosh(\frac{x}{3})}{\sqrt{2}} \right]_+^2.$$

La propagation de l'interface au cours du temps est donnée par :

$$x_i(t) = 3 \ln \left[\sqrt{1 + (\alpha(t))^{-\frac{4}{5}}} + (\alpha(t))^{-\frac{2}{5}} \right].$$

On représente en figure (3) les solutions dans le cas où $m = \frac{3}{2}$ à différents instants.

3.3.3 Solutions analytiques pour la diffusion non linéaire avec absorption et production

Comme dans le cas précédent on se limite à la géométrie plane et on cherche des solutions analytiques du problème suivant : pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^m) + cv^p - dv^q = 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, \text{ à support compact : } [0, x_0]; \end{cases}$$

avec $m > 1$, $p > 0$, $q > 0$, $c > 0$ et $d > 0$. Nous n'avons pas trouvé de solutions analytiques pour ce problème dans la littérature. Dans ce paragraphe nous en exhibons en généralisant la méthode utilisée dans le paragraphe précédent. On commence par effectuer le changement de fonction inconnue $w = v^{m-1}$, alors w vérifie :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - mw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(m-1)w^{\frac{p+m-2}{m-1}} - d(m-1)w^{\frac{q+m-2}{m-1}} = 0,$$

on choisit $p = m$ et $q + m = 2$ car ce sont les valeurs des paramètres qui nous intéressent pour l'équation en k ($p = m = \frac{3}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$), alors w vérifie :

$$(3.24) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - mw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(m-1)w^2 - d(m-1)\mathfrak{N}(w) = 0,$$

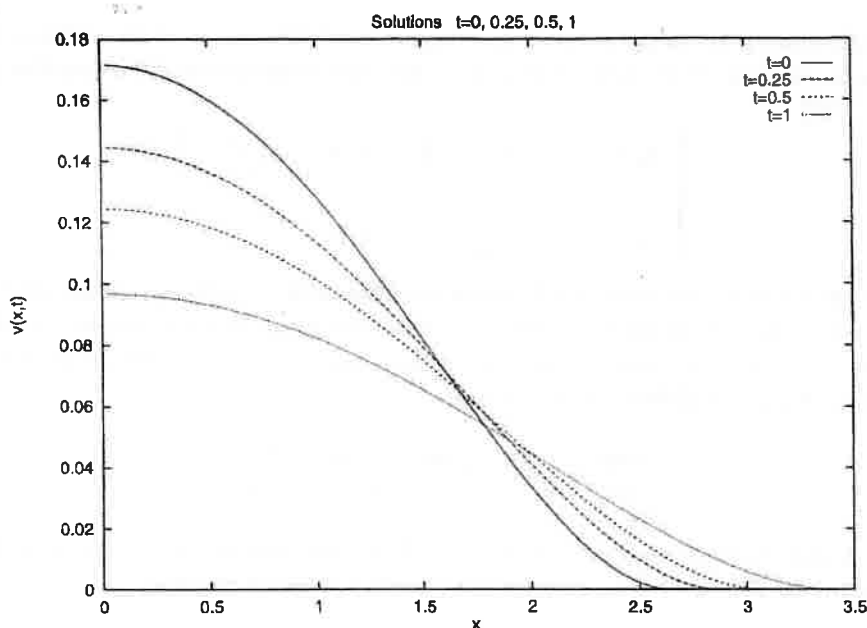


FIG. 3 – Solutions de l'équation de diffusion non linéaire avec absorption

où \mathfrak{N} est la fonction indicatrice définie par :

$$\begin{cases} \mathfrak{N}(w) = 1 & \text{si } w > 0, \\ \mathfrak{N}(w) = 0 & \text{si } w = 0. \end{cases}$$

On notera en particulier que la non linéarité correspondant au terme de production s'est transformé en une fonction constante, ce qui montre l'avantage du changement de variable effectué. Introduisons l'opérateur \mathcal{B} défini par :

$$\mathcal{B}w = \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + mw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c(m-1)w^2 + d(m-1)\mathfrak{N}(w),$$

alors (3.24) s'écrit :

$$(3.25) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{B}w.$$

L'opérateur \mathcal{B} s'exprime très simplement en fonction de l'opérateur \mathcal{A} défini précédemment puisque :

$$\mathcal{B}(w) = \mathcal{A}(w) + d(m-1)\mathfrak{N}(w).$$

Ainsi le sous espace

$$\mathcal{W} = \text{vect}(1, \cosh(\lambda x)),$$

défini au paragraphe précédent est stable pour \mathcal{B} à la condition

$$\lambda = \mp \frac{m-1}{m} \sqrt{c}.$$

On va maintenant chercher w sous la forme du développement suivant :

$$w(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cosh(\lambda x).$$

En substituant ce développement dans l'équation vérifiée par w et en utilisant la stabilité de \mathcal{W} sous l'action de \mathcal{B} , nous obtenons un système d'équations différentielles pour α_0 et α_1 :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0(t) = -c(m-1) \left(\alpha_0^2(t) + \frac{1}{m} \alpha_1^2(t) - \frac{d}{c} \right), \\ \dot{\alpha}_1(t) = -c \frac{m^2-1}{m} \alpha_0(t) \alpha_1(t), \end{cases}$$

dans le cas où $d = 0$ on retrouve le système différentiel obtenu au paragraphe précédent, ce qui est normal. Procédons maintenant à la résolution de ce système. En effectuant le quotient membre à membre des deux équations précédentes, on élimine le temps et on se ramène à l'équation différentielle ordinaire :

$$(3.26) \quad \frac{d\alpha_0}{d\alpha_1} = \frac{m}{m+1} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{1}{m} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{d}{c} \frac{1}{\alpha_0 \alpha_1} \right),$$

et on va chercher α_0 en fonction de α_1 . (3.26) est une équation du type Ricatti. En multipliant (3.26) par α_0 , on aboutit à l'équation linéaire en α_0^2 :

$$(3.27) \quad \frac{d\alpha_0^2}{d\alpha_1} = \frac{2m}{m+1} \left(\frac{\alpha_0^2}{\alpha_1} + \frac{1}{m} \alpha_1 - \frac{d}{c} \frac{1}{\alpha_1} \right),$$

dont la solution s'écrit :

$$(3.28) \quad \alpha_0^2 = \alpha_1^2 + K_0 (\alpha_1^2)^{\frac{m}{m+1}} + \frac{d}{c},$$

où K_0 est une constante d'intégration.

On choisit $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 < 0$ et $K_0 = 0$, ce dernier choix nous permet d'obtenir une solution complètement analytique. Avec les valeurs précédentes nous obtenons immédiatement :

$$(3.29) \quad \alpha_0 = \sqrt{1 + \frac{d}{c} + \alpha_1^2}.$$

Posons alors $\alpha = -\alpha_1$ et $r = \frac{d}{c}$, alors en utilisant l'expression de α_0 en fonction de α ainsi que la deuxième équation du système différentiel précédent, α est solution de :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -c \frac{m^2-1}{m} \alpha(t) \sqrt{\alpha^2(t) + r^2}, \\ \alpha(0) = 1, \end{cases}$$

on impose comme au paragraphe précédent une condition initiale arbitraire $\alpha(0) = 1$. Cette dernière équation s'intègre en utilisant :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+r^2}} = -\frac{1}{r} \ln \left[\frac{r + \sqrt{x^2+r^2}}{x} \right],$$

on obtient après quelques calculs :

$$(3.30) \quad \alpha(t) = \frac{2\sqrt{\frac{d}{c}} \left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right) \exp \left[-\sqrt{cd} \frac{(m^2-1)}{m} t \right]}{\left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right)^2 - \exp \left[-2\sqrt{cd} \frac{(m^2-1)}{m} t \right]}.$$

Le comportement asymptotique de α est le suivant :

$$(3.31) \quad \alpha(t) \sim \frac{2\sqrt{\frac{d}{c}}}{\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}}} \exp \left[-\sqrt{cd} \frac{(m^2 - 1)}{m} t \right].$$

On peut alors donner l'expression de w en fonction de α :

$$(3.32) \quad w(x, t) = \sqrt{\frac{d}{c} + \alpha^2(t)} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda x)}{\sqrt{1 + \frac{d}{c} \alpha^{-2}(t)}} \right]_+;$$

Au vu du comportement asymptotique de α , on en déduit celui de w et de v , pour tout x strictement à l'intérieur du support :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \left(\frac{d}{c} \right)^{\frac{1}{2(m-1)}}.$$

Ainsi en temps grand v atteint un état constant. Cet état constant correspond à la solution stationnaire du problème initial en l'absence de diffusion (i.e. $cv^m = dv^{2-m}$).

On détermine la position de l'interface $x_i(t)$ en résolvant l'équation $w(x_i(t), t) = 0$ et $x_i(t)$ est solution de :

$$\cosh(\lambda x_i(t)) = \sqrt{1 + \frac{d}{c} \alpha^{-2}(t)},$$

d'où

$$(3.33) \quad x_i(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{d}{c} \alpha^{-2}(t)} + \sqrt{\frac{d}{c} \alpha^{-1}(t)} \right].$$

Cette expression peut se simplifier moyennant quelques calculs élémentaires, sachant que :

$$\sqrt{1 + \frac{d}{c} \alpha^{-2}(t)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right)^2 + \exp \left[-2\sqrt{cd} \frac{(m^2 - 1)}{m} t \right]}{2 \left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right) \exp \left[-\sqrt{cd} \frac{(m^2 - 1)}{m} t \right]},$$

il vient :

$$(3.34) \quad x_i(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right) + \frac{1}{\lambda} \sqrt{cd} \frac{(m^2 - 1)}{m} t.$$

La propagation de l'interface est affine au cours du temps.

Examinons la régularité de la solution ainsi obtenue au voisinage de l'interface. En utilisant la définition de x_i , v peut encore s'écrire :

$$(3.35) \quad v(x, t) = [\alpha(t) (\cosh(\lambda x_i(t)) - \cosh(\lambda x))_+]^{\frac{1}{m-1}};$$

ainsi au voisinage de l'interface v se comporte de la manière suivante :

$$(3.36) \quad v(x, t) \sim [\alpha(t) \lambda \sinh(\lambda x_i(t)) (x_i(t) - x)_+]^{\frac{1}{m-1}};$$

- si $1 < m < 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0,$$

- si $m = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\alpha(t) \lambda \sinh(\lambda x_i(t)),$$

- si $m > 2$:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\infty.$$

Le premier cas correspond à l'équation de l'énergie cinétique turbulente ($m = \frac{3}{2}$), il y a propagation d'un front et la solution est régulière au voisinage de ce front.

Récapitulatif: en rassemblant les résultats précédents, nous avons obtenu une solution v qui s'écrit:

$$(3.37) \quad v(x, t) = [\alpha(t) (\cosh(\lambda x_i(t)) - \cosh(\lambda x))_+]^{\frac{1}{m-1}};$$

avec $\lambda = \mp \frac{m-1}{m} \sqrt{c}$, α est donné par

$$\alpha(t) = \frac{2\sqrt{\frac{d}{c}} \left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right) \exp \left[-\sqrt{cd} \frac{(m^2-1)}{m} t \right]}{\left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right)^2 - \exp \left[-2\sqrt{cd} \frac{(m^2-1)}{m} t \right]}$$

et la position de l'interface au cours du temps est:

$$x_i(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\sqrt{\frac{d}{c}} + \sqrt{1 + \frac{d}{c}} \right) + \frac{1}{\lambda} \sqrt{cd} \frac{(m^2-1)}{m} t.$$

la donnée initiale correspondante v^0 s'écrit:

$$v^0(x) = \sqrt{2}^{\frac{1}{m-1}} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda x)}{\sqrt{2}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Application numérique: dans le cas où $m = \frac{3}{2}$ et $c = d = 1$ nous avons: $\lambda = \mp \frac{1}{3}$,

$$v(x, t) = \left[\alpha(t) \left(\cosh\left(\frac{x_i(t)}{3}\right) - \cosh\left(\frac{x}{3}\right) \right)_+ \right]^2,$$

α est donné par

$$\alpha(t) = \frac{2(1 + \sqrt{2}) \exp \left[-\frac{5}{6} t \right]}{(3 + 2\sqrt{2}) - \exp \left[-\frac{5}{3} t \right]},$$

la donnée initiale correspondante v^0 s'écrit:

$$v^0(x) = 2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{2}} \right]_+^2.$$

La propagation de l'interface au cours du temps est donnée par:

$$x_i(t) = 3 \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{5}{2} t.$$

Le comportement de v au voisinage de l'interface au cours du temps est obtenu par un développement de Taylor :

$$v(x, t) = \frac{1}{9} \alpha(t)^2 \sinh^2\left(\frac{x_i(t)}{3}\right) (x_i(t) - x)_+^2 + O\left[(x_i(t) - x)_+^3\right],$$

de plus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \sinh\left(\frac{x_i(t)}{3}\right) = 1,$$

la convergence vers cette valeur limite est très rapide du fait du comportement exponentiel de α ; on en déduit l'allure de v au voisinage de l'interface :

$$(3.38) \quad v(x, t) = \frac{1}{9} \left(3 \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{5}{2}t - x \right)_+^2 + O\left[(x_i(t) - x)_+^3\right].$$

Asymptotiquement, v possède donc **une structure d'onde progressive** qui se déplace dans le sens des $x > 0$ avec la vitesse $\frac{5}{2}$.

On représente en figure (4) les solutions dans le cas où $m = \frac{3}{2}$ à différents instants. En figure (5) on compare la propagation des interfaces pour les deux solutions obtenues

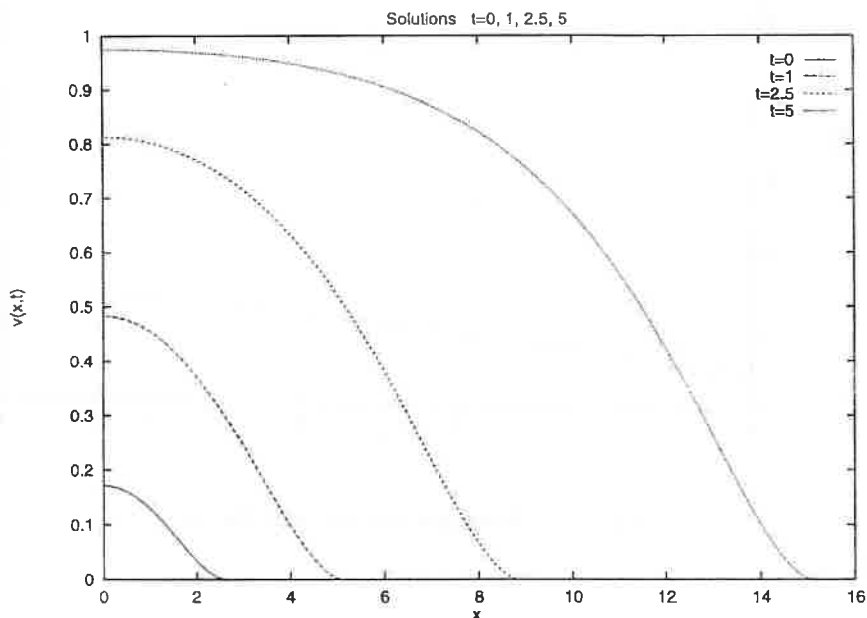


FIG. 4 - Solutions de l'équation de diffusion non linéaire avec absorption et production

précédemment (issues de la même condition initiale) : diffusion non linéaire avec absorption d'une part et diffusion non linéaire avec absorption et production d'autre part. On constate que le terme de production accélère considérablement la propagation de l'interface.

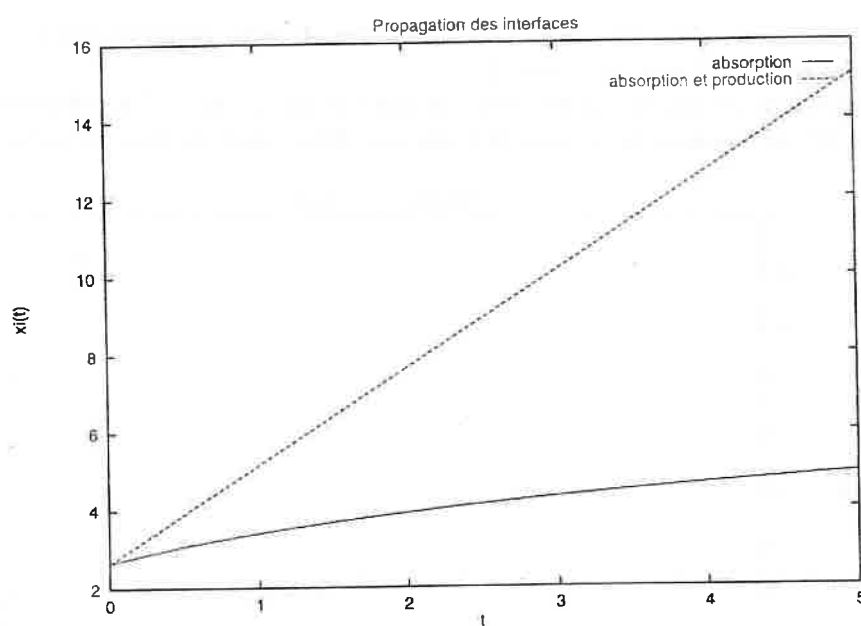


FIG. 5 - Propagation des interfaces

3.4 Analyse en ondes progressives

Nous avons constaté dans la section précédente que la solution analytique de l'équation modèle (*MOD*) avait un comportement d'onde progressive au voisinage de l'interface. Afin de généraliser ce résultat, nous procédons à une analyse en ondes progressives pour une solution quelconque dans le cas où $m = \frac{3}{2}$. On commence par une étude locale au voisinage de l'interface, puis nous présentons une étude globale qui met en évidence l'existence d'une onde progressive pour l'équation modèle.

3.4.1 Etude locale au voisinage du front

On s'inspire pour cela de la démarche adoptée dans la référence [23], où sont étudiés des problèmes de propagation d'ondes thermiques dans des milieux absorbants. Soit v solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^{\frac{3}{2}}) + cv^{\frac{3}{2}} - dv^{\frac{1}{2}} = 0; & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, & \text{à support compact,} \end{cases}$$

avec $c > 0$ et $d \geq 0$. Soit $x_i(t)$ une fonction suffisamment régulière qui représente l'interface d'une onde se propageant dans la direction des $x > 0$. Soit (t^0, x^0) un point de l'interface (i.e. $x^0 = x_i(t^0)$). Alors dans son voisinage, on cherche un développement de v de la forme :

$$(3.39) \quad v(x, t) = K [x^0 - x + A(t - t^0)]^l + K_1 [x^0 - x + A(t - t^0)]^{l_1} + \dots,$$

avec $l_1 > l$, pour $x < x^0$, $t > t^0$ et $K > 0$. Dans le développement ci-dessus A représente la vitesse du front, avec $A > 0$ car on a supposé que le front se déplaçait dans le sens des $x > 0$. En substituant ce développement dans l'équation vérifiée par v et en ne gardant que les termes principaux nous obtenons :

$$(3.40) \quad K l A \xi^{l-1} - K^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} l \left(\frac{3}{2} l - 1\right) \xi^{\frac{3}{2} l - 2} + c K^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2} l} - d K^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{l}{2}} = 0;$$

où $\xi = x^0 - x + A(t - t^0)$. Pour que la relation précédente soit satisfaite de façon non triviale (nullité d'un polynôme en ξ), on doit avoir les relations de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} l - 1 = \frac{3}{2} l - 2, \\ l - 1 = \frac{3}{2} l, \\ l - 1 = \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Seules la première et la dernière relation sont compatibles entre elles et donnent la valeur $l = 2$. Dans ce cas le terme instationnaire, ainsi que celui de diffusion et de production se comportent comme ξ^2 , quant au terme d'absorption il se comporte comme ξ^3 et il est donc négligeable. Ce résultat n'a rien de surprenant puisqu'à première vue pour v proche de 0, $v^{\frac{3}{2}}$ est négligeable devant $v^{\frac{1}{2}}$. Moyennant ce choix de l , pour que l'équation (3.40) soit satisfaite K et A sont liées par la relation de dispersion :

$$(3.41) \quad A = 3\sqrt{K} + \frac{d}{2\sqrt{K}};$$

d'où le comportement de v au voisinage de l'interface :

$$(3.42) \quad v(x, t) = K [x^0 - x + A(t - t^0)]^2 + O(\xi^3).$$

K peut s'interpréter en remarquant que d'après (3.42) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{v(x, t)} \sim -\sqrt{K}.$$

ainsi \sqrt{K} représente le gradient de \sqrt{v} au voisinage du front. En outre, on notera (cf. 3.41) que non seulement le terme de diffusion non linéaire mais aussi le terme de production contribuent à la propagation du front. En remarquant que $x_i(t) = x_i(t^0) + A(t - t^0) + O((t - t^0)^3)$ le comportement de v au voisinage du support peut aussi s'écrire :

$$v(x, t) = K [x_i(t) - x]^2 + O(\xi^3),$$

et on retrouve un comportement similaire à celui exhibé pour la solution particulière (3.38). Pour cette solution, on a $d = 1$, $(K, A) = \left(\frac{1}{9}, \frac{5}{2}\right)$ et on peut vérifier que ce couple (K, A) satisfait la relation de dispersion (3.41).

Pour terminer, signalons qu'il existe une valeur minimale de la vitesse de propagation satisfaisant (3.41), elle correspond à $\bar{K} = \frac{d}{6}$ et on a

$$\bar{A} = \sqrt{6d}.$$

3.4.2 Etude globale

Dans ce paragraphe nous donnons l'ébauche d'une démonstration de l'existence d'une onde progressive solution de l'équation modèle (\mathcal{P}_3). Pour ce faire nous cherchons $v(x, t)$ solution de l'équation modèle, sous la forme :

$$v(x, t) = V(x - At).$$

où A la vitesse de l'onde est supposée **positive**. On pose $\xi = x - At$. $V \geq 0$ vérifie l'équation suivante :

$$(3.43) \quad A \frac{dV}{d\xi} + \frac{3}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{V} \frac{dV}{d\xi} \right) - cV^{\frac{3}{2}} + dV^{\frac{1}{2}} = 0,$$

avec comme conditions aux limites

$$(3.44) \quad \begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} V(\xi) = \frac{d}{c}, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) = 0, \end{cases}$$

ces conditions correspondent aux états stationnaires du problème. L'équation (3.43) possède une singularité pour $V = 0$ due à la non-linéarité du coefficient de diffusion (\sqrt{V}). Pour lever cette singularité, nous effectuons le changement de variables $\xi \mapsto z$ défini par :

$$z(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{\sqrt{V(s)}}.$$

on supposera que cette transformation définit bien un difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} ; on en déduit que $V \equiv V(z)$ vérifie :

$$(3.45) \quad A \frac{dV}{dz} + \frac{3}{2} \frac{d^2V}{dz^2} + V(d - cV) = 0,$$

avec comme conditions aux limites

$$(3.46) \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow -\infty} V(z) = \frac{d}{c}, \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} V(z) = 0. \end{cases}$$

Moyennant l'introduction de la fonction $W(z) = \frac{dV}{dz}$, on peut ramener (3.45) au système autonome du premier ordre suivant :

$$(3.47) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dz} = W, \\ \frac{dW}{dz} = -\frac{2}{3} [AW + V(d - cV)], \end{cases}$$

Ce système admet comme points stationnaires : $(V, W) = (0, 0)$ et $(V, W) = (\frac{d}{c}, 0)$. Nous allons étudier les trajectoires de ce système en utilisant la méthode du plan de phase, afin de prouver l'existence d'une trajectoire stable reliant les états stationnaires. Nous nous inspirons pour cela de la démarche exposée dans [21].

- Etude au voisinage de $(V, W) = (0, 0)$

La linéarisation de (3.47) au voisinage de $(V, W) = (0, 0)$ nous fournit le système suivant :

$$(3.48) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dz} = W, \\ \frac{dW}{dz} = -\frac{2}{3} (AV + dV). \end{cases}$$

Les valeurs propres Λ de ce système sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\Lambda^2 + \frac{2}{3} A\Lambda + \frac{2}{3} d = 0,$$

le discriminant Δ est donné par :

$$\Delta = \frac{4}{9} A^2 - \frac{8}{3} d,$$

on distingue alors les deux cas suivants :

◊ $A < \sqrt{6d}$

le discriminant est strictement négatif et les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$\begin{cases} \Lambda_- = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} A - i\sqrt{-\Delta} \right), \\ \Lambda_+ = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} A + i\sqrt{-\Delta} \right), \end{cases}$$

leur partie réelle est négative, on en déduit que $(0, 0)$ est un **foyer stable**. Dans ce cas la trajectoire dans le plan de phase est une spirale logarithmique qui s'enroule autour de l'origine, ainsi V passe par des valeurs négatives ce qui n'est pas acceptable. Ce cas est donc rejeté.

$$\diamond A \geq \sqrt{6d}$$

dans ce cas le discriminant est positif, l'équation caractéristique admet les deux racines réelles suivantes :

$$\begin{cases} \Lambda_- = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}A - \sqrt{\Delta} \right), \\ \Lambda_+ = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}A + \sqrt{\Delta} \right), \end{cases}$$

qui sont négatives. Il en résulte que $(0, 0)$ est un **noeud stable** avec une dégénérescence dans le cas où les racines sont égales. Il existe alors des trajectoires dans le demi plan $V \geq 0$.

Cette étude met en évidence la condition suivante sur la vitesse A

$$(3.49) \quad A \geq \sqrt{6d},$$

celle-ci confirme la remarque faite au paragraphe précédent concernant l'existence d'une valeur minimale pour A soit $\bar{A} = \sqrt{6d}$.

- Etude au voisinage de $(V, W) = \left(\frac{d}{c}, 0\right)$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \tilde{V} = V - \frac{d}{c}, \\ \tilde{W} = W, \end{cases}$$

pour se ramener au voisinage de l'origine, le système (3.47) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}}{dz} = \tilde{W}, \\ \frac{d\tilde{W}}{dz} = -\frac{2}{3} \left[A\tilde{W} - \tilde{V}(d + c\tilde{V}) \right]. \end{cases}$$

On en déduit le linéarisé :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}}{dz} = \tilde{W}, \\ \frac{d\tilde{W}}{dz} = -\frac{2}{3} (A\tilde{W} - d\tilde{V}). \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée s'écrit :

$$\Lambda^2 + \frac{2}{3}A\Lambda - \frac{2}{3}d = 0,$$

cette équation admet les racines réelles suivantes :

$$\begin{cases} \Lambda_- = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}A - \sqrt{\frac{4}{9}A^2 + \frac{8}{3}d} \right), \\ \Lambda_+ = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}A + \sqrt{\frac{4}{9}A^2 + \frac{8}{3}d} \right), \end{cases}$$

qui vérifient $\Lambda_- < 0$ et $\Lambda_+ > 0$, d'où il découle que $(\frac{d}{c}, 0)$ est un col.

La figure (6) résume la situation dans le plan de phase. Heuristiquement, on constate qu'il existe une trajectoire (en rouge sur la figure) reliant les deux points stationnaires, de plus celle-ci est contenue dans le quadrant $V \geq 0, W \leq 0$. Cette trajectoire correspond à

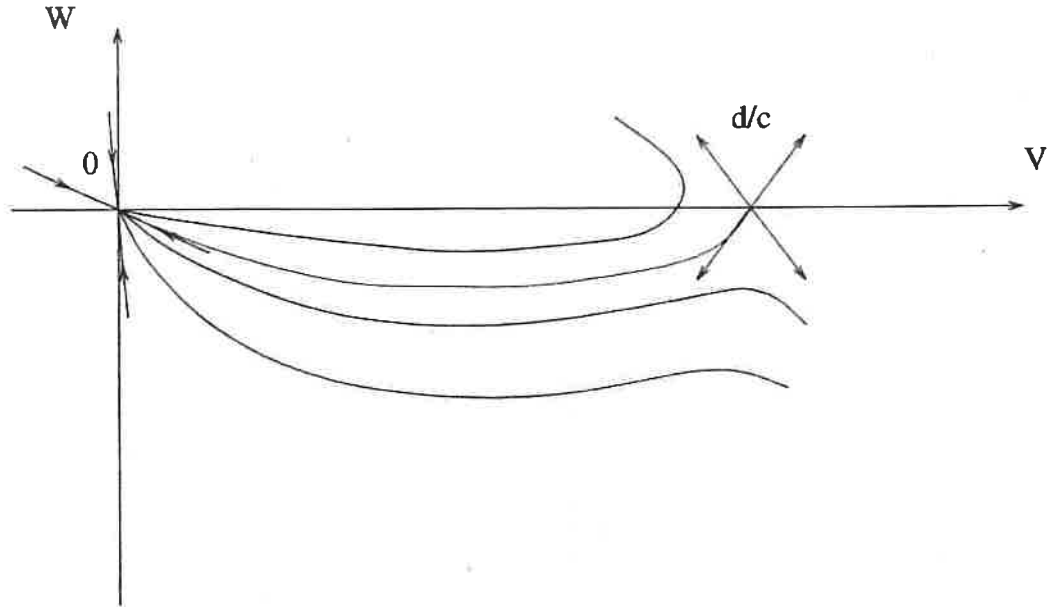


FIG. 6 - Allure des trajectoires

une solution en onde progressive de l'équation modèle. On en représente l'allure en figure (7). La valeur minimale de la vitesse de l'onde est $\bar{A} = \sqrt{6d}$.

Pour clore cette section, signalons un résultat remarquable dû à *Kolmogoroff* que nous avons trouvé dans la référence [21] et qui nous servira pour tester le schéma numérique de l'équation modèle. Ce résultat permet d'identifier des données initiales de l'équation modèle qui vont évoluer vers une solution en onde progressive. Il s'énonce ainsi :

si $v(x, 0) = v^0(x) \geq 0$ avec

$$v^0(x) = \begin{cases} \frac{d}{c} & \text{pour } x \leq x_1, \\ 0 & \text{pour } x \geq x_2, \end{cases}$$

où $x_1 < x_2$ et $v^0(x)$ est continue pour $x \in]x_1, x_2[$ alors $v(x, t)$ tend vers la solution onde progressive $V(\xi)$ avec $\xi = x - \sqrt{6d} t$, il s'agit de l'onde progressive possédant la vitesse minimale $\bar{A} = \sqrt{6d}$.

En conclusion la contribution principale à la propagation de l'interface est due aux termes de diffusion non linéaire et de production. Il conviendra donc de discrétiser correctement ces deux termes. On peut d'ores et déjà affirmer qu'un splitting de ces deux termes est à proscrire. Le terme de dissipation ne contribue qu'à l'ordre suivant. De plus le comportement parabolique de v au voisinage de l'interface rend difficile la capture numérique du front. Il est nécessaire de soigner particulièrement la discrétisation des termes de diffusion et de production afin de restituer correctement la propagation de l'interface. C'est l'objet de la section suivante.

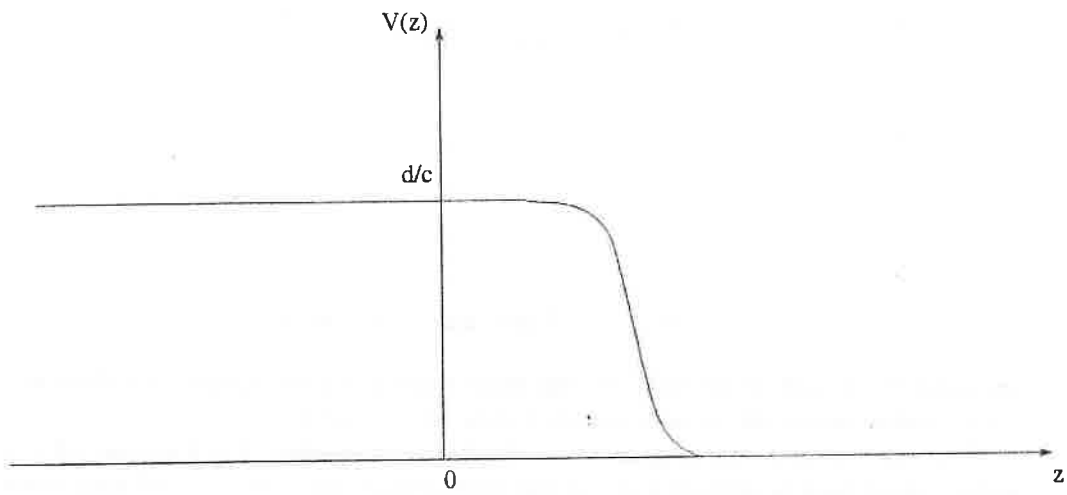


FIG. 7 - *Allure de la solution onde progressive*

4 Discrétisation en 1D

Dans cette partie on présente différents schémas possibles pour la discrétisation du modèle (\mathcal{P}_3). La comparaison de ces différents schémas est basée sur la confrontation à la solution analytique obtenue précédemment. Le but de cette partie est d'analyser les défauts et les qualités de ces schémas, sachant que l'objectif principal est d'avoir un schéma qui restitue la propagation à vitesse finie du support de manière satisfaisante. Soit v solution du problème :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^{\frac{3}{2}}) + cv^{\frac{3}{2}} - dv^{\frac{1}{2}} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, & \text{à support compact,} \end{cases}$$

où c et d sont des constantes positives.

Dans l'équation précédente les termes qui vont être sources de difficultés sont le terme de diffusion non linéaire et le terme de production. Le terme de dissipation (en $v^{\frac{3}{2}}$) ne pose a priori pas de difficulté⁴(terme d'amortissement). Le terme de diffusion assure la propagation à vitesse finie du support, sa discrétisation est donc cruciale. Le terme de production rend le problème mal posé au voisinage de l'interface en raison de son caractère non Lipschitzien. Nous commençons par aborder la discrétisation du terme de dissipation puis nous passerons au terme de production pour finir par le terme de diffusion non linéaire.

4.1 Discrétisation du terme de dissipation

Si l'on omet la diffusion et la production dans (4.1), $u(t) = v(x, t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -cu^{\frac{3}{2}}, \\ u(0) \geq 0. \end{cases}$$

Cette équation admet une unique solution en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz et ce même au voisinage de l'interface ($u(0) \rightarrow 0$). Sa discrétisation ne pose pas de difficulté majeure. On choisit un schéma totalement implicite (ordre 1 en temps) car une discrétisation semi-implicite (ordre 2 en temps) implique une condition sur le pas de temps pour garantir la positivité comme le montre l'étude suivante. Soit Δt le pas de temps, en intégrant l'équation (4.2) sur $[0, \Delta t]$ il vient :

$$u(\Delta t) - u(0) = -c \int_0^{\Delta t} u(t)^{\frac{3}{2}} dt,$$

on en déduit les deux schémas mentionnés précédemment :

- ordre 1 implicite $u(\Delta t) = u(0) - c\Delta t u(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$;
- ordre 2 semi-implicite $u(\Delta t) = u(0) - c\frac{\Delta t}{2} \left[u(0)^{\frac{3}{2}} + u(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \right]$;

4. On adoptera une discrétisation implicite de ce terme pour éviter des problèmes de positivité.

4.1.1 Le schéma d'ordre 1 implicite

Il s'écrit :

$$(4.3) \quad u(\Delta t) = \frac{u(0)}{1 + c\Delta t \sqrt{u(\Delta t)}}$$

$u(\Delta t)$ est solution d'une équation non-linéaire et on met en place un schéma itératif de type point fixe, défini par la suite récurrente u^q :

$$(4.4) \quad \begin{cases} u^{q+1} = \frac{u(0)}{1 + c\Delta t \sqrt{u^q}}, & q \in \mathbb{N} \\ u^0 = u(0) \geq 0. \end{cases}$$

On montre sans peine que la suite précédente est positive et qu'elle converge vers la solution de l'équation (4.3). Afin d'évaluer la précision du schéma, on effectue un développement limité pour $\Delta t \rightarrow 0$ de la solution de (4.3) et on obtient :

$$u(\Delta t) = u(0) - u(0)^{\frac{3}{2}}c\Delta t + \frac{1}{2}c^2u(0)^2\Delta t^2 + O(\Delta t^3).$$

La solution exacte de l'équation différentielle (4.2) est donnée par :

$$U(t) = \frac{4u(0)}{(2 + c\sqrt{u(0)t})^2},$$

au voisinage de Δt on a :

$$U(\Delta t) = u(0) - u(0)^{\frac{3}{2}}c\Delta t + \frac{3}{4}u(0)^2c^2\Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

la comparaison des deux développements montre que le schéma est d'ordre 1 en temps.

On a donc obtenu un schéma positif précis à l'ordre 1.

4.1.2 Le schéma d'ordre 2 semi-implicite

Il s'écrit :

$$(4.5) \quad u(\Delta t) = \frac{u(0) \left[1 - c\frac{\Delta t}{2} \sqrt{u(0)} \right]}{1 + c\frac{\Delta t}{2} \sqrt{u(\Delta t)}},$$

comme précédemment $u(\Delta t)$ est solution d'une équation non linéaire et on met en place un schéma itératif du type point fixe défini par la suite récurrente u^q :

$$(4.6) \quad \begin{cases} u^{q+1} = \frac{u(0) \left[1 - c\frac{\Delta t}{2} \sqrt{u(0)} \right]}{1 + c\frac{\Delta t}{2} \sqrt{u^q}}, & q \in \mathbb{N} \\ u^0 = u(0) \geq 0, \end{cases}$$

la positivité de ce schéma est conditionnée par la contrainte suivante sur le pas de temps :

$$\Delta t < \frac{2}{c\sqrt{u(0)}},$$

cette condition peut s'avérer gênante, d'une part si la valeur de c est importante et d'autre part pour les fortes valeurs de $u(0)$. Cette condition s'interprète physiquement comme le fait que le pas de temps est inférieur à l'échelle de temps intégral de la turbulence.

Par conséquent pour discrétiser le terme de dissipation, nous rejettons le schéma semi-implicite d'ordre 2 au profit du schéma d'ordre 1 implicite.

4.2 Discrétisation du terme de production

On se place au voisinage de l'interface du support; en négligeant la diffusion et la dissipation dans (4.1), $w(t) = v(x, t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dt} = dw^{\frac{1}{2}}, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Peano (voir la référence [7]), cette équation différentielle admet au moins une solution mais il n'y a pas unicité car $w^{\frac{1}{2}}$ n'est pas Lipschitzienne en 0. Soit θ un réel positif, on vérifiera sans peine que les fonctions :

$$(4.8) \quad \begin{cases} W_\theta(t) = 0, & t \in [0, \theta], \\ W_\theta(t) = \left[\frac{d}{2}(t - \theta) \right]^2, & t \geq \theta, \end{cases}$$

sont solutions de l'équation (4.7). θ peut s'interpréter comme un temps de branchement du modèle de turbulence. Maintenant la question se pose de savoir quelle solution nous choisissons. Il est clair que nous éliminons la solution identiquement nulle ($\theta = \infty$) et nous privilégions arbitrairement la solution correspondant à $\theta = 0$, soit $W_0(t) = \frac{d^2}{4}t^2$. Autrement dit parmi les solutions de (4.7) nous choisissons **la solution strictement croissante**. Cette étude sommaire du problème continu étant faite, nous allons la transposer au niveau discret. Le but étant de trouver un schéma permettant de capturer la solution strictement croissante.

On intègre l'équation (4.7) sur $[0, \Delta t]$:

$$w(\Delta t) - w(0) = d \int_0^{\Delta t} w^{\frac{1}{2}}(t) dt,$$

et on en déduit trois schémas de base :

- ordre 1 explicite $w(\Delta t) = w(0) + d\Delta t w^{\frac{1}{2}}(0)$;
- ordre 1 implicite $w(\Delta t) = w(0) + d\Delta t w^{\frac{1}{2}}(\Delta t)$;
- ordre 2 semi-implicite $w(\Delta t) = w(0) + d\frac{\Delta t}{2} \left(w^{\frac{1}{2}}(0) + w^{\frac{1}{2}}(\Delta t) \right)$;

au vu de la condition initiale $w(0) = 0$, il est clair que le schéma explicite est à rejeter car il nous fournit la solution identiquement nulle. Il reste donc à étudier les deux autres schémas.

4.2.1 Le schéma d'ordre 1 implicite

Il s'écrit :

$$(4.9) \quad w(\Delta t) = d\Delta t w^{\frac{1}{2}}(\Delta t),$$

si l'on exclut la solution nulle, on obtient :

$$w(\Delta t) = d^2(\Delta t)^2,$$

ce qui par rapport à la solution exacte $W_0(\Delta t) = \frac{d^2}{4}(\Delta t)^2$ nous conduit à une erreur relative de 75 % par excès. Il est donc indispensable d'augmenter l'ordre du schéma, c'est

ce que nous ferons dans le paragraphe suivant. Le schéma (4.9) est non linéaire, et si l'on oublie le fait que l'on sache obtenir exactement $w(\Delta t)$, il y a nécessité de mettre en place un processus itératif pour calculer $w(\Delta t)$. C'est ce que nous ferons ultérieurement quand nous mettrons en place un schéma pour la résolution de l'équation modèle (4.1). On utilise un algorithme itératif du type point fixe défini par la suite récurrente w^q :

$$(4.10) \quad \begin{cases} w^{q+1} = d\Delta t \sqrt{w^q}, & q \in \mathbb{N} \\ w^0 \text{ connu.} \end{cases}$$

Comment choisir le premier terme w^0 ? Si l'on fait le choix usuel $w^0 = w(0) = 0$ on ne décollera pas de la solution identiquement nulle ! Il faut donc partir d'un premier terme strictement positif. On peut alors montrer que :

- si l'on choisit $0 < w^0 < d^2 \Delta t^2$, w^q est une suite strictement croissante majorée et donc convergente vers $d^2 \Delta t^2$;
- si l'on choisit $w^0 > d^2 \Delta t^2$, w^q est une suite strictement décroissante minorée et donc convergente vers $d^2 \Delta t^2$.

La figure (8) illustre ces deux points de vue. Comme on n'est pas censé connaître la

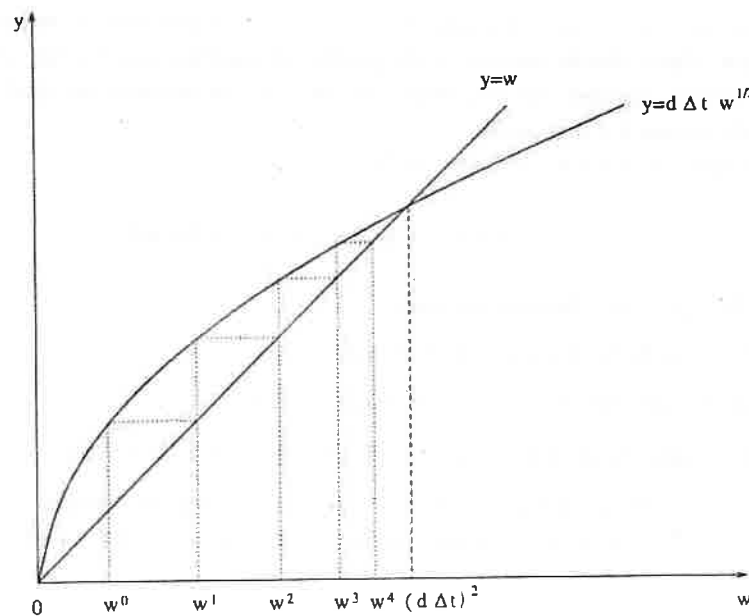


FIG. 8 - Suite w^q

solution exacte $d^2 \Delta t^2$, on partira d'une valeur de w^0 petite : $w^0 = \delta > 0$, sachant qu'en un nombre raisonnable d'itérations on aura atteint la solution.

4.2.2 Le schéma d'ordre 2 semi-implicite

Il s'écrit :

$$(4.11) \quad w(\Delta t) = d \frac{\Delta t}{2} w^{\frac{1}{2}}(\Delta t).$$

si l'on exclut la solution nulle, on obtient :

$$w(\Delta t) = \frac{d^2}{4}(\Delta t)^2,$$

ce qui correspond à la solution exacte. Il sera donc préférable de discrétiser le terme de production à l'ordre 2 en temps car une discrétisation à l'ordre 1 le surévaluerait. Le schéma (4.11) est non linéaire, et si l'on oublie le fait que l'on sache obtenir exactement $w(\Delta t)$, il y a nécessité de mettre en place un processus itératif pour calculer $w(\Delta t)$ comme précédemment. On utilise un algorithme itératif du type point fixe défini par la suite récurrente w^q :

$$(4.12) \quad \begin{cases} w^{q+1} = d \frac{\Delta t}{2} \sqrt{w^q}, & q \in \mathbb{N} \\ w^0 \text{ connu.} \end{cases}$$

Les conclusions sont les mêmes que celles du paragraphe précédent, à savoir que pour $w^0 > 0$, aussi petit soit-il, le point fixe converge vers la solution strictement croissante.

Cette propriété est intéressante mais peut aussi nous amener des problèmes. En effet si une mauvaise discrétisation du terme de diffusion génère une avancée parasite du front de diffusion avec des valeurs de la solution de l'ordre de $\delta > 0$, cette avancée sera naturellement amplifiée par le schéma (4.11).

4.3 Discrétisation du terme de diffusion non linéaire

Si l'on néglige la dissipation et la production dans l'équation modèle (4.1) celle-ci se ramène à :

$$(\mathcal{D}_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^{\frac{3}{2}}) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, & \text{à support compact,} \end{cases}$$

qui est une équation parabolique non linéaire dégénérée. Au voisinage de l'interface le terme de diffusion s'annule, ce qui implique une propagation à vitesse finie du support de la donnée initiale. L'objet de ce paragraphe est de construire différents schémas pour l'équation (\mathcal{D}_1) et de comparer leur qualité respective quant à la propagation à vitesse finie du support. Nous disposons pour cela des solutions analytiques présentées dans la section (3.3.1). Ces schémas sont basés sur des écritures différentes (mais équivalentes) du problème (\mathcal{D}_1) que nous donnons ci-après.

- En explicitant le flux de diffusion, (\mathcal{D}_1) peut aussi s'écrire :

$$(\mathcal{D}_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, & \text{à support compact,} \end{cases}$$

cette écriture plus physique met en évidence le flux de diffusion non linéaire $-\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x}$, ainsi que le coefficient de diffusion $-\frac{3}{2} \sqrt{v}$ qui tend vers 0 avec v .

- En utilisant le changement de variable $w = \sqrt{v}$, (\mathcal{D}_1) peut aussi s'écrire :

$$(\mathcal{D}_3) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{3}{2} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(x, 0) = \sqrt{v^0(x)} \geq 0, & \text{à support compact.} \end{cases}$$

Cette formulation illustre bien le caractère de propagation à vitesse finie du support. En effet le deuxième terme qui peut s'interpréter comme un terme convectif assure la propagation du support et le troisième terme s'interprète comme un terme de diffusion à l'intérieur du support.

- En utilisant le changement de variable $\Theta = v^{\frac{3}{2}}$, (\mathcal{D}_1) peut aussi s'écrire :

$$(\mathcal{D}_4) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \Theta(x, 0) = v^{\frac{3}{2}}(x) \geq 0, & \text{à support compact.} \end{cases}$$

Cette dernière forme de (\mathcal{D}_1) se distingue des trois autres car la non linéarité a basculé du terme de diffusion sur le terme instationnaire.

4.3.1 Discrétisation du problème (\mathcal{D}_1)

Dans un premier temps nous effectuons la discrétisation spatiale du problème (\mathcal{D}_1) , nous obtenons alors un système différentiel de la taille du nombre de mailles, que nous discrétisons en temps.

- Discrétisation spatiale

Soit $x \in [0, L]$ avec L suffisamment grand pour que le support de la solution soit strictement inclus dans $[0, L]$ pour l'intervalle de temps considéré. Soit $\{x_i\}_{i=1, \dots, I+1}$, une subdivision à pas constant⁵ Δx de $[0, L]$, avec $x_1 = 0$ et $x_{I+1} = L$. La discrétisation spatiale est effectuée à l'aide de la méthode des volumes finis (voir la référence [10]) pour une présentation exhaustive de cette méthode). La fonction v est supposée constante par maille et on pose :

$$v_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x, t) dx.$$

En intégrant (\mathcal{D}_1) sur $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient :

$$\Delta x \frac{d}{dt} v_i - \left[\frac{\partial}{\partial x} v^{\frac{3}{2}} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0,$$

Les flux aux bords de la maille sont approchés par différences finies et on a par exemple en x_{i+1} :

$$\frac{\partial}{\partial x} v^{\frac{3}{2}}(x_{i+1}) = \frac{v_{i+1}^{\frac{3}{2}} - v_i^{\frac{3}{2}}}{\Delta x};$$

en x_1 et x_I les conditions aux limites interviennent, on opte pour des conditions de flux nuls (Neumann homogène), on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} v^{\frac{3}{2}}(0) = \frac{\partial}{\partial x} v^{\frac{3}{2}}(L) = 0,$$

5. Tout ce qui suit peut se généraliser sans difficulté à une subdivision à pas variables.

ces conditions sont naturellement prises en compte dans le schéma. On en déduit que les fonctions v_i , $i = 1, \dots, I$ satisfont le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} \frac{d}{dt} v_1 - \frac{1}{\Delta x^2} (v_2^{\frac{3}{2}} - v_1^{\frac{3}{2}}) = 0, \\ \frac{d}{dt} v_i - \frac{1}{\Delta x^2} \left[v_{i+1}^{\frac{3}{2}} - v_i^{\frac{3}{2}} - (v_i^{\frac{3}{2}} - v_{i-1}^{\frac{3}{2}}) \right] = 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt} v_I + \frac{1}{\Delta x^2} (v_I^{\frac{3}{2}} - v_{I-1}^{\frac{3}{2}}) = 0. \end{cases}$$

(\mathcal{S}_1) est un système différentiel non linéaire de taille I . On l'écrit sous une forme équivalente plus adaptée pour la discrétisation temporelle. Cette écriture découle de l'identité :

$$v_{i+1}^{\frac{3}{2}} - v_i^{\frac{3}{2}} = \frac{v_{i+1} + \sqrt{v_{i+1}v_i} + v_i}{\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i}} (v_{i+1} - v_i), \text{ pour } \sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i} > 0.$$

On introduit alors :

$$\begin{cases} d_{i,i+1} = \frac{v_{i+1} + \sqrt{v_{i+1}v_i} + v_i}{\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i}} \text{ si } \sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i} > 0, \\ d_{i,i+1} = 0 \text{ sinon,} \\ d_{i,i-1} = \frac{v_i + \sqrt{v_iv_{i-1}} + v_{i-1}}{\sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}}} \text{ si } \sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}} > 0, \\ d_{i,i-1} = 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

pour $i = 2, \dots, I-1$, avec $d_{I,I+1} = 0$ et $d_{1,0} = 0$ (conditions aux limites).

Alors les fonctions v_i pour $i = 1, \dots, I$ sont solutions du système :

$$(4.13) \quad \frac{d}{dt} v_i + \frac{1}{\Delta x^2} [-d_{i,i+1}v_{i+1} + (d_{i,i+1} + d_{i,i-1})v_i - d_{i,i-1}v_{i-1}] = 0,$$

d'où en adoptant une écriture matricielle :

$$(4.14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} v + D(v)v = 0, \\ v(0) = v^0, \end{cases}$$

où $v = (v_1, \dots, v_I)$ est le vecteur des inconnues, $v^0 = (v_1^0, \dots, v_I^0)$ celui des conditions initiales; D est la matrice tridiagonale dont les éléments non nuls sont $D_{i,i} = \frac{d_{i,i+1} + d_{i,i-1}}{\Delta x^2}$,

$D_{i,i+1} = -\frac{d_{i,i+1}}{\Delta x^2}$ et $D_{i,i-1} = -\frac{d_{i,i-1}}{\Delta x^2}$. Il s'agit d'une M-matrice, symétrique, semi-définie et positive. Ces propriétés nous seront utiles pour la discrétisation temporelle que nous allons expliciter dans le paragraphe suivant.

- Discrétisation temporelle

On écrit la discrétisation temporelle du système (4.14) sur le pas de temps $[0, \Delta t]$ en utilisant un θ schéma (voir la référence [22]), soit en posant $v = v(\Delta t)$:

$$(4.15) \quad v - v^0 + \Delta t [\theta D(v)v + (1 - \theta)D(v^0)v^0] = 0,$$

avec $\theta \in [0, 1]$.

On rappelle que pour $\theta = 0$ le schéma est explicite en temps, il est stable sous une condition sur le pas en temps du type

$$(4.16) \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\max_{i=1, \dots, J} (d_{i,i+1} + d_{i,i-1})},$$

cette condition peut s'avérer trop contraignante sur le pas en temps, c'est pourquoi nous privilégierons une méthode implicite.

Avec $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, on montre que le schéma est inconditionnellement stable (cf. [22]). Pour $\theta = 1$ le schéma est implicite et d'ordre 1 en temps, en outre il vérifie un principe du maximum discret, à savoir que si la valeur initiale v^0 est positive alors la valeur à la fin du pas en temps l'est aussi.

Pour $\theta = \frac{1}{2}$ le schéma est semi-implicite (Crank-Nicolson) et d'ordre 2 en temps, par contre il ne vérifie le principe du maximum discret que sous une condition sur le pas en temps du même type que (4.16). Ainsi, dans certains cas, pour un pas en temps trop élevé on constate l'apparition d'oscillations. Il convient donc comme toujours de trouver un compromis entre robustesse et précision.

Le schéma (4.15) étant non linéaire, il y a nécessité de mettre de place un algorithme itératif pour achever la résolution numérique. On choisit un algorithme du type point fixe. On construit la suite de vecteurs $\{v\}^q$ pour q entier naturel :

- **initialisation :**

$$q = 0, \quad v^0 = v^*;$$

pour éviter une confusion de notation, on note v^* la valeur de v^q correspondant à l'initialisation du processus itératif. En général, on prendra $v^* = v(0)$ valeur au début du pas en temps.

- **connaissant v^q , calcul de v^{q+1} solution de :**

$$F(v^{q+1}) = v^{q+1} - v^0 + \Delta t [\theta D(v^q) v^{q+1} + (1 - \theta) D(v^0) v^0] = 0;$$

on arrête d'itérer lorsque l'on atteint un seuil de convergence suffisant : soit pour $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance

$$\frac{\|v^{q+1} - v^q\|}{\|v^q\|} < \varepsilon,$$

on vérifie également

$$\|F(v^{q+1})\| < \varepsilon,$$

afin de s'assurer que la solution de l'équation précédente est approchée avec une précision suffisante. Dans les expressions précédentes $\| \cdot \|$ désigne une norme de \mathbb{R}^I (norme l^1 par exemple).

À chaque étape du processus itératif on résout le système linéaire suivant :

$$[\text{Id} + \Delta t \theta D(v^q)] v^{q+1} = [\text{Id} - \Delta t (1 - \theta) D(v^0)] v^0,$$

où Id désigne la matrice identité de taille I . La matrice $[\text{Id} + \Delta t \theta D(v^q)]$ est inversible (diagonale dominante) de plus il s'agit d'une M-matrice ce qui garantit la positivité de v^{q+1} (quelque soit Δt dans le cas où $\theta = 1$, ou sous condition dans le cas où $\theta = \frac{1}{2}$), sous réserve que $v^0 > 0$. En théorie, pourvu que Δt soit suffisamment petit on sait démontrer

la convergence du processus itératif (cf. le rapport [19] et ses références). Pour fixer les idées écrivons la i ème ligne du système non linéaire précédent :

$$(4.17) \quad \begin{cases} v_i^{q+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \theta \left[d_{i,i+1}^q (v_{i+1}^{q+1} - v_i^{q+1}) - d_{i,i-1}^q (v_i^{q+1} - v_{i-1}^{q+1}) \right] = \\ v_i^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \theta) \left[d_{i,i+1}^0 (v_{i+1}^0 - v_i^0) - d_{i,i-1}^0 (v_i^0 - v_{i-1}^0) \right]. \end{cases}$$

Remarque 4 Pour faire l'économie d'un point fixe, on utilise souvent le schéma suivant :

$$(4.18) \quad v - v^0 + \Delta t \left[\theta D(v^0)v + (1 - \theta)D(v^0)v^0 \right] = 0,$$

qui est linéaire. On a explicité la non linéarité de la matrice de diffusion D . Ce schéma correspond à la première itération du point fixe défini précédemment. À moins d'utiliser des petits pas en temps, ce type de schéma donnera de moins bons résultats que le point fixe dans le cas de forte non-linéarité. De plus dans le cas où $\theta = \frac{1}{2}$ on perd l'ordre 2 en temps.

Nous terminons en examinant la propagation du support avec les schémas précédents.

- Propagation du support au niveau discret

Soit $k-1$ l'indice de la dernière maille du support discret de v à $t=0$, autrement dit pour $1 \leq i \leq k-1$ on a $v_i^0 > 0$ et pour $k \leq i \leq I$ on a $v_i^0 = 0$, ainsi $v_{k-1}^0 > 0$, $v_k^0 = v_{k+1}^0 = 0$ (voir la figure 9). On en déduit la valeur des coefficients de la matrice D au début du

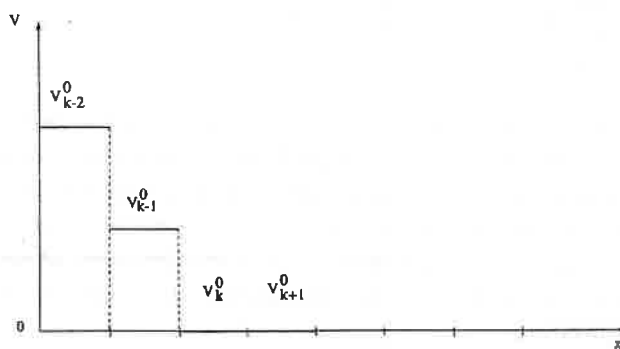


FIG. 9 - Support à $\Delta t = 0$

pas de temps : pour $1 \leq i \leq k-1$ on a $d_{i,i+1}^0 > 0$ et pour $k \leq i \leq I$ on a $d_{i,i+1}^0 = 0$. Observons alors comment se propage le support au cours d'un pas de temps, suivant le type de schéma envisagé, on examine pour cela la valeur de v_k à la fin du pas de temps.

- Schéma explicite :

on pose $\theta = 0$ et on en déduit

$$v_k = v_k^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[d_{k,k+1}^0 (v_{k+1}^0 - v_k^0) - d_{k,k-1}^0 (v_k^0 - v_{k-1}^0) \right],$$

étant donnée la valeur des coefficients de la matrice D , nous obtenons :

$$v_k = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} d_{k,k-1}^0 v_{k-1}^0 = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{k-1}^0)^{3/2} > 0;$$

et il est clair que $v_i = 0$ pour $k < i \leq I$. Ainsi avec le schéma explicite le support se propage d'une maille à chaque pas de temps, quelle que soit sa valeur (sous la condition (4.16)). Concrètement si l'on calcule la solution au bout d'un temps τ suffisamment petit en 1 ou 10 pas en temps on n'obtiendra pas la même solution. Dans le deuxième cas de figure le support se sera propagé de 10 mailles avec des valeurs de v très petites. Il y aura lieu de tronquer ces valeurs pour éviter une propagation anarchique du front, notamment lors de la prise en compte du terme de production qui aura un effet amplificateur (nous reviendrons sur ce point dans la suite de l'exposé).

– Schéma implicite :

on pose $\theta = 1$ et on écrit la première étape du point fixe pour les lignes $k-1$, k et $k+1$ du système :

$$\begin{cases} v_{k-1}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [d_{k-1,k}^0 (v_k^1 - v_{k-1}^1) - d_{k-1,k-2}^0 (v_{k-1}^1 - v_{k-2}^1)] = v_{k-1}^0, \\ v_k^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [d_{k,k+1}^0 (v_{k+1}^1 - v_k^1) - d_{k,k-1}^0 (v_k^1 - v_{k-1}^1)] = v_k^0, \\ v_{k+1}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [d_{k+1,k+2}^0 (v_{k+2}^1 - v_{k+1}^1) - d_{k+1,k}^0 (v_{k+1}^1 - v_k^1)] = v_{k+1}^0, \end{cases}$$

or $d_{k-1,k}^0 > 0$, $d_{k-1,k-2}^0 > 0$, $d_{k,k+1}^0 = d_{k+1,k+2}^0 = 0$, d'où :

$$\begin{cases} v_{k-1}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [d_{k-1,k}^0 (v_k^1 - v_{k-1}^1) - d_{k-1,k-2}^0 (v_{k-1}^1 - v_{k-2}^1)] = v_{k-1}^0, \\ v_k^1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} d_{k,k-1}^0 (v_k^1 - v_{k-1}^1) = 0, \\ v_{k+1}^1 = 0, \end{cases}$$

on montre alors que la résolution du système précédent conduit à : $v_k^1 > 0$ et $v_i^1 = 0$ pour $i \in [k+1, I]$. Le support s'est propagé d'une maille en une itération de point fixe. La propagation numérique du support est encore plus rapide qu'avec le schéma explicite. Il est nécessaire de tronquer les faibles valeurs de v en cours de processus itératif (troncature numérique correspondant à la précision machine). On peut aussi envisager le schéma implicite sans point fixe (4.18), alors la propagation numérique du support se limite à une maille par pas de temps.

4.3.2 Discrétisation du problème (\mathcal{D}_2)

Comme au paragraphe précédent nous effectuons d'abord la discrétisation spatiale du problème (\mathcal{D}_2), nous obtenons alors un système différentiel de taille le nombre de mailles, que nous discrétisons en temps.

– Discrétisation spatiale

On reprend les notations précédentes et la méthode des volumes finis pour la discrétisation. v est supposée constante par maille et on pose :

$$v_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x, t) dx.$$

En intégrant (\mathcal{D}_2) sur $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient :

$$\Delta x \frac{d}{dt} v_i - \left[\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0,$$

l'approximation du flux aux bords de la maille est plus délicate que précédemment. En effet v étant définie au centre des mailles, il se pose le problème d'approcher le coefficient de diffusion \sqrt{v} aux bords x_i et x_{i+1} . Pour ce faire, en suivant [10] nous allons écrire la continuité du flux aux bords x_i et x_{i+1} . On détaille le calcul pour x_{i+1} . On approche le flux à gauche de x_{i+1} par différences finies (voir figure 10) :

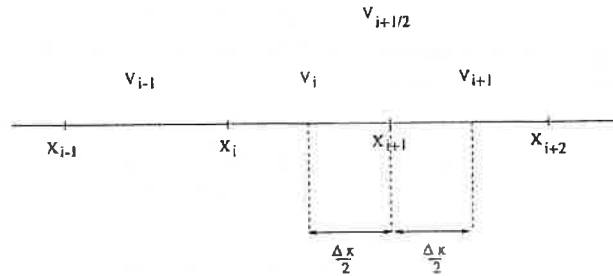


FIG. 10 - Notations schéma

$$\left[\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] (x_{i+1}^g) = \frac{3}{2} \sqrt{v_i} \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_i}{\frac{\Delta x}{2}},$$

puis à droite :

$$\left[\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] (x_{i+1}^d) = \frac{3}{2} \sqrt{v_{i+1}} \frac{v_{i+1} - v_{i+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

où $v_{i+\frac{1}{2}}$ représente la valeur de v au noeud x_{i+1} , a priori inconnue, mais que l'on détermine en écrivant l'égalité des flux de part et d'autre du noeud x_{i+1} :

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{v_{i+1}} v_{i+1} + \sqrt{v_i} v_i}{\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i}}.$$

En substituant ce résultat dans l'expression précédente des flux nous obtenons finalement :

$$\left[\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] (x_{i+1}) = \frac{3}{2} \frac{2\sqrt{v_i} \sqrt{v_{i+1}}}{\sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i+1}}} \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x}.$$

Remarquons que l'écriture précédente met en évidence un coefficient de diffusion effectif qui n'est autre que **la moyenne harmonique** des coefficients de diffusion de part et d'autre du noeud x_{i+1} .

En x_1 et x_L les conditions aux limites interviennent, on opte comme précédemment pour des conditions de flux nuls (Neumann homogène), on a alors :

$$\left[\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] (0) = \left[\frac{3}{2} \sqrt{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] (L) = 0$$

ces conditions sont naturellement prises en compte dans le schéma.

On introduit :

$$\begin{cases} \bar{d}_{i,i+1} = 3 \frac{\sqrt{v_{i+1}} \sqrt{v_i}}{\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i}} & \text{si } \sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i} > 0, \\ \bar{d}_{i,i+1} = 0 & \text{sinon,} \\ \bar{d}_{i,i-1} = 3 \frac{\sqrt{v_i} \sqrt{v_{i-1}}}{\sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}}} & \text{si } \sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}} > 0, \\ \bar{d}_{i,i-1} = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i = 2, \dots, I-1$, avec $\bar{d}_{I,I+1} = 0$ et $\bar{d}_{1,0} = 0$ (conditions aux limites).

On en déduit que les fonctions v_i , $i = 1, \dots, I$ satisfont le système différentiel suivant :

$$(4.19) \quad \frac{d}{dt} v_i + \frac{1}{\Delta x^2} [-\bar{d}_{i,i+1} v_{i+1} + (\bar{d}_{i,i+1} + \bar{d}_{i,i-1}) v_i - \bar{d}_{i,i-1} v_{i-1}] = 0.$$

On remarque que le système obtenu est semblable au système (4.13) résultant de la discrétisation de (\mathcal{D}_1) . Afin d'estimer la différence entre les deux discrétisations, nous comparons les coefficients $d_{i,i-1}$ et $\bar{d}_{i,i-1}$:

$$\frac{\bar{d}_{i,i-1}}{d_{i,i-1}} = \frac{3\sqrt{v_i}\sqrt{v_{i-1}}}{v_i + v_{i-1} + \sqrt{v_i}\sqrt{v_{i-1}}},$$

en posant $r = \frac{v_i}{v_{i-1}}$, avec $v_{i-1} > 0$, il vient tous calculs faits :

$$\frac{\bar{d}_{i,i-1}}{d_{i,i-1}} = f(r) = \frac{3\sqrt{r}}{\sqrt{r} + r + 1},$$

on représente en figure (11) le graphe de f pour $r \in]0, +\infty[$. L'examen du graphe de f

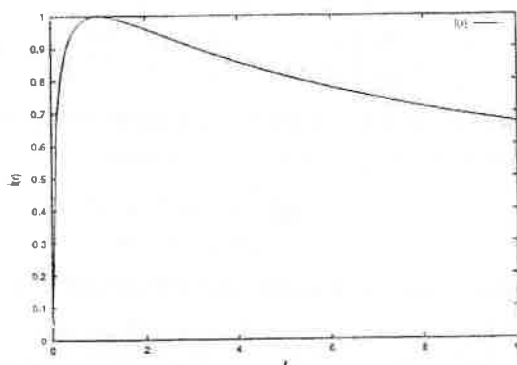


FIG. 11 - Graphe de f

nous montre que le flux issu de la discrétisation de \mathcal{D}_2 est toujours inférieur à celui issu de la discrétisation de \mathcal{D}_1 . **On en déduit que le front numérique se propage plus vite avec (4.13), qu'avec (4.19).** Les écarts sont d'autant plus importants que la valeur de r est éloignée de 1. Dans le cas où $r = 0$ (i.e. au front de diffusion) le flux correspondant à la discrétisation de \mathcal{D}_2 est toujours nul, ce qui n'est pas surprenant dans la mesure où le coefficient de diffusion à l'interface est proportionnel à la moyenne harmonique de v_{i-1} et v_i . Par conséquent, pour assurer la propagation du front de diffusion, il est indispensable de soigner la discrétisation temporelle de \mathcal{D}_2 .

Remarque 5 Une discrétisation également consistante du flux de diffusion aux interfaces peut être obtenue en posant :

$$\tilde{d}_{i,i-1} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{v_{i-1}} + \sqrt{v_i}}{2} \right),$$

on a choisi la moyenne arithmétique pour définir un coefficient de diffusion équivalent. On note que cette discrétisation ne respecte pas la continuité du flux aux interfaces. Afin de la comparer à la moyenne harmonique, formons le rapport $\frac{\bar{d}_{i,i-1}}{\tilde{d}_{i,i-1}}$:

$$\frac{\bar{d}_{i,i-1}}{\tilde{d}_{i,i-1}} = g(r) = \frac{4\sqrt{r}}{1+r+2\sqrt{r}},$$

on représente en figure (12) les graphes de f et g . On constate que la moyenne arithmétique diffuse davantage que la moyenne harmonique. L'examen de la figure (12) montre également que $\bar{d}_{i,i-1} \leq \tilde{d}_{i,i-1} \leq d_{i,i-1}$. Il semblerait que parmi les discrétisations envisageables, la moyenne harmonique soit celle qui minimise le flux de diffusion aux interfaces. Cette conjecture reste à démontrer.

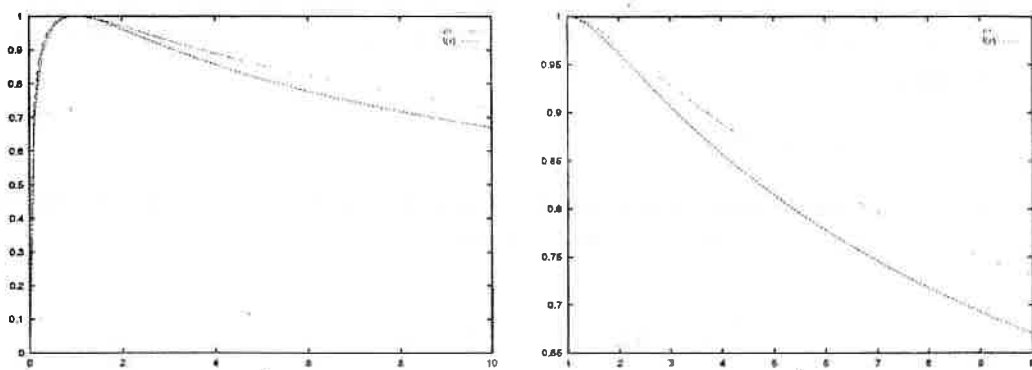


FIG. 12 - Comparaison f et g

- Discrétisation temporelle

Pour l'équation (4.19) on adopte l'écriture matricielle suivante :

$$(4.20) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}v + \bar{D}(v)v = 0, \\ v(0) = v^0, \end{cases}$$

avec des notations identiques à celles utilisées pour (4.14). \bar{D} est la matrice tridiagonale dont les éléments non nuls sont $\bar{D}_{i,i} = \frac{\bar{d}_{i,i+1} + \bar{d}_{i,i-1}}{\Delta x^2}$, $\bar{D}_{i,i+1} = -\frac{\bar{d}_{i,i+1}}{\Delta x^2}$ et $\bar{D}_{i,i-1} = -\frac{\bar{d}_{i,i-1}}{\Delta x^2}$. Il s'agit d'une M-matrice, symétrique, semi-définie et positive. La discrétisation temporelle du système (4.20) sur le pas de temps $[0, \Delta t]$ est identique à celle du système (4.14) et nous obtenons :

$$(4.21) \quad v - v^0 + \Delta t [\theta \bar{D}(v)v + (1 - \theta) \bar{D}(v^0)v^0] = 0,$$

avec $\theta \in [0, 1]$. La présentation des différents schémas (explicite, implicite) est en tout point similaire à celle du paragraphe précédent en substituant D à \bar{D} . Nous rappelons la

ième ligne du système linéaire dont v_i^{q+1} est solution dans le cadre d'un processus itératif de type point fixe (cf. (4.17)).

$$\begin{cases} v_i^{q+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \theta \left[\bar{d}_{i,i+1}^q (v_{i+1}^{q+1} - v_i^{q+1}) - \bar{d}_{i,i-1}^q (v_i^{q+1} - v_{i-1}^{q+1}) \right] = \\ v_i^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \theta) \left[\bar{d}_{i,i+1}^0 (v_{i+1}^0 - v_i^0) - \bar{d}_{i,i-1}^0 (v_i^0 - v_{i-1}^0) \right]. \end{cases}$$

Nous terminons en examinant la propagation du support avec le schéma précédent.

- Propagation du support au niveau discret

On se place dans la même situation qu'au paragraphe précédent à savoir $v_1^0, \dots, v_{k-1}^0 > 0$ et $v_k^0 = v_{k+1}^0 = \dots = v_I^0 = 0$ (cf. figure (9)). On en déduit la valeur des coefficients de \bar{D} au début du pas de temps. Comme $\bar{d}_{i,i+1}$ est proportionnelle à la **moyenne harmonique** de v_i et v_{i+1} , il vient $\bar{d}_{k,k-1}^0 = 0$ contrairement au paragraphe précédent, $\bar{d}_{i,i+1}^0 > 0$ pour $i \leq k-2$ et $\bar{d}_{i,i+1}^0 = 0$ pour $i \in [k-1, I]$. Nous passons en revue les différents types de schémas :

- Schéma explicite :

on écrit la k ième ligne du système non linéaire pour $\theta = 0$ (on supprime les exposants $q+1$ car il n'y a pas de point fixe) et il vient :

$$v_k = v_k^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\bar{d}_{k,k+1}^0 (v_{k+1}^0 - v_k^0) - \bar{d}_{k,k-1}^0 (v_k^0 - v_{k-1}^0) \right],$$

étant donnée les valeurs de v_k^0 et $\bar{d}_{k,k-1}$, nous obtenons : $v_k = 0$ et $v_i = 0$ pour $k < i \leq I$. Ainsi le support ne se propage pas avec un schéma explicite, ceci est le fait de la définition de $\bar{d}_{i,i+1}$ (moyenne harmonique). **Ce type de schéma est donc à proscrire.**

Remarque 6 Pour contourner le problème de la moyenne harmonique avec le schéma explicite, on peut remplacer la moyenne harmonique par une moyenne qui n'annule pas le coefficient de diffusion à l'interface du support. Ainsi l'utilisation de la moyenne arithmétique permet la propagation du support. Par contre, ce choix n'est pas satisfaisant d'un point de vue numérique car il n'assure pas la continuité du flux aux interfaces. Le schéma résultant s'écrit :

$$(4.22) \quad v_i = v_i^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\bar{d}_{i,i+1}^0 (v_{i+1}^0 - v_i^0) - \bar{d}_{i,i-1}^0 (v_i^0 - v_{i-1}^0) \right],$$

avec pour le coefficient de diffusion :

$$\bar{d}_{i,i+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i}}{2} \right).$$

- Schéma implicite :

Avec $\theta = 1$ on obtient un schéma itératif de type point fixe, à l'étape $q+1$, v_i^{q+1} est solution du système non linéaire dont la i ième ligne s'écrit :

$$v_i^{q+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\bar{d}_{i,i+1}^q (v_{i+1}^{q+1} - v_i^{q+1}) - \bar{d}_{i,i-1}^q (v_i^{q+1} - v_{i-1}^{q+1}) \right] = v_i^0,$$

écrivons la première étape du point fixe sur les lignes $k-1$, k et $k+1$, on choisit l'initialisation classique $v_i^* = v_i^0$

$$\begin{cases} v_{k-1}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\bar{d}_{k-1,k}^0 (v_k^1 - v_{k-1}^1) - \bar{d}_{k-1,k-2}^0 (v_{k-1}^1 - v_{k-2}^1)] = v_{k-1}^0, \\ v_k^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\bar{d}_{k,k+1}^0 (v_{k+1}^1 - v_k^1) - \bar{d}_{k,k-1}^0 (v_k^1 - v_{k-1}^1)] = v_k^0, \\ v_{k+1}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\bar{d}_{k+1,k+2}^0 (v_{k+2}^1 - v_{k+1}^1) - \bar{d}_{k+1,k}^0 (v_{k+1}^1 - v_k^1)] = v_{k+1}^0, \end{cases}$$

d'où sachant que $v_i^0 = 0$ pour $i \in [k, I]$:

$$\begin{cases} v_{k-1}^1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \bar{d}_{k-1,k-2}^0 (v_{k-1}^1 - v_{k-2}^1) = v_{k-1}^0, \\ v_k^1 = 0, \\ v_{k+1}^1 = 0, \end{cases}$$

on en déduit que $v_i^1 = 0$ pour $i \in [k, I]$ et plus généralement $v_i^q = 0$ pour $i \in [k, I]$ et ce quelque soit q . Là encore le support discret ne se propage pas et ce pour la même raison que précédemment (définition de $\bar{d}_{i,i+1}$ basée sur la moyenne harmonique). Pourtant on sait que (cf. solutions analytiques et théories) pour $\Delta t > 0$ alors $v_k > 0$. Pour pallier cet inconvénient, on propose de modifier quelque peu la procédure d'initialisation du point fixe, en définissant v^* de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } i \text{ tel que } v_i(0) > 0 \text{ alors } v_i^* = v_i(0), \\ \text{et } v_k^* = \delta > 0, \end{cases}$$

où δ est un petit paramètre. De manière heuristique, on conçoit que la solution discrète va se propager. En effet, avec $v_k^* > 0$ il vient :

$$\bar{d}_{k-1,k}^* = \frac{3\sqrt{v_{k-1}^0}\sqrt{\delta}}{\sqrt{v_{k-1}^0} + \sqrt{\delta}},$$

et donc $v_k^1 > 0$. Des essais numériques prouvent l'efficacité de la méthode, ils seront présentés au paragraphe (4.4.4). Sur un plan théorique, nous sommes incapables de démontrer cette conjecture.

Remarque 7 Sachant que $v_i(t)$ est solution de (4.20), on a :

$$\frac{dv_i}{dt} - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\frac{\sqrt{v_i}\sqrt{v_{i+1}}}{\sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i+1}}} (v_{i+1} - v_i) - \frac{\sqrt{v_i}\sqrt{v_{i-1}}}{\sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}}} (v_i - v_{i-1}) \right] = 0,$$

ce qui, compte tenu de l'identité $v_{i+1} - v_i = (\sqrt{v_{i+1}} - \sqrt{v_i})(\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i})$, peut encore s'écrire :

$$(4.23) \quad \frac{dv_i}{dt} - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\sqrt{v_i}\sqrt{v_{i+1}}(\sqrt{v_{i+1}} - \sqrt{v_i}) - \sqrt{v_i}\sqrt{v_{i-1}}(\sqrt{v_i} - \sqrt{v_{i-1}})] = 0,$$

cette formulation équivalente du système est intéressante car en simplifiant par $\sqrt{v_i}$, il vient tous calculs faits :

$$2 \frac{d\sqrt{v_i}}{dt} - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\sqrt{v_{i+1}}(\sqrt{v_{i+1}} - \sqrt{v_i}) - \sqrt{v_{i-1}}(\sqrt{v_i} - \sqrt{v_{i-1}})] = 0.$$

Si l'on pose $\psi_i = \sqrt{v_i}$, on obtient le schéma suivant pour ψ_i :

$$\frac{d\psi_i}{dt} - \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\psi_{i+1}(\psi_{i+1} - \psi_i) - \psi_{i-1}(\psi_i - \psi_{i-1})] = 0.$$

Cette fois le problème est désingularisé au voisinage du front et il y a propagation du support discret. Nous retrouvons ce schéma au paragraphe suivant en discrétisant directement le problème continu issu du changement de variable $\psi = \sqrt{v}$.

4.3.3 Discrétisation du problème (\mathcal{D}_3)

- Discrétisation spatiale

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{3}{2} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, nous posons :

$$w_i(t) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x, t) dx,$$

en intégrant l'équation précédente sur $[x_i, x_{i+1}]$ il vient :

$$\Delta x \frac{dw_i}{dt} - 3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{3}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = 0,$$

compte tenu de l'identité :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w^2}{\partial x} \right) - w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

l'équation précédente devient :

$$\Delta x \frac{dw_i}{dt} - \frac{3}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w^2}{\partial x} \right) dx + \frac{3}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = 0,$$

d'où puisque w est constant par mailles :

$$\Delta x \frac{dw_i}{dt} - \frac{3}{2} \left[\frac{\partial w^2}{\partial x} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{3}{2} w_i \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0,$$

après regroupement des différents termes, nous obtenons :

$$(4.24) \quad \frac{dw_i}{dt} - \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [w_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - w_{i-1}(w_i - w_{i-1})] = 0.$$

Remarque 8 Cette discrétisation se généralise sans peine au multidimensionnel avec l'identité :

$$(\nabla w)^2 = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla w^2) - w \Delta w.$$

Remarque 9 Cette discrétisation spatiale nous conduit au même schéma que celui obtenu avec la moyenne harmonique pour la variable $\sqrt{v} = w$. Cette constatation renforce la perennité du choix de la moyenne harmonique.

Avant de discuter la discrétisation temporelle, écrivons le schéma sous forme matricielle en introduisant la matrice M de taille I définie par :

$$\begin{cases} M_{i,i} = \frac{3}{2\Delta x^2}(w_{i-1} + w_{i+1}), \\ M_{i,i-1} = \frac{3}{2\Delta x^2}w_{i-1}, \\ M_{i,i+1} = \frac{3}{2\Delta x^2}w_{i+1}. \end{cases}$$

Si w est le vecteur des inconnues $w_i, i = 1..I$, alors w est solution du système différentiel non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} + Mw = 0, \\ w(0) = w^0. \end{cases}$$

On aboutit comme dans les autres cas au même type de système, toutefois il convient de remarquer le fait que **la matrice M n'est pas symétrique**, ce qui aura des conséquences sur le choix de la méthode de résolution du système linéaire final, dans le cas d'un problème bidimensionnel.

N.B. : comme dans les cas précédents, on impose des conditions de flux nuls aux bord du domaine, en x_1 et en x_{I+1} .

- Discrétisation temporelle

Les mêmes commentaires que ceux énoncés précédemment s'appliquent ici en remplaçant D par M . Pour fixer les idées, écrivons la i ème ligne du système non linéaire dont w_i^{q+1} est solution, dans le cadre d'un processus itératif de type point fixe :

$$(4.25) \quad \begin{cases} w_i^{q+1} - \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2}\theta [w_{i+1}^q(w_{i+1}^{q+1} - w_i^{q+1}) - w_{i-1}^q(w_i^{q+1} - w_{i-1}^{q+1})] = \\ w_i^0 + \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2}(1 - \theta) [w_{i+1}^0(w_{i+1}^0 - w_i^0) - w_{i-1}^0(w_i^0 - w_{i-1}^0)]. \end{cases}$$

- Propagation du support au niveau discret

Soient $w_1^0, \dots, w_{k-1}^0 > 0$ et $w_k^0 = w_{k+1}^0 = \dots = w_I^0 = 0$.

- Schéma explicite :

En faisant $\theta = 0$ dans (4.25), on obtient :

$$w_k = \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2} (w_{k-1}^0)^2 > 0,$$

il y a alors propagation du support à raison d'une maille par pas de temps.

- Schéma implicite :

On fait $\theta = 1$ dans (4.25) et on écrit les lignes du système qui correspondent au calcul de $w_{k-1}^1, w_k^1, w_{k+1}^1$ (première itération du point fixe). On choisit l'initialisation classique $w_i^* = w_i^0$.

$$\begin{cases} w_{k-1}^1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2} [w_k^0(w_k^1 - w_{k-1}^1) - w_{k-2}^0(w_{k-1}^1 - w_{k-2}^1)] = w_{k-1}^0; \\ w_k^1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2} [w_{k+1}^0(w_{k+1}^1 - w_k^1) - w_{k-1}^0(w_k^1 - w_{k-1}^1)] = w_k^0; \\ w_{k+1}^1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2} [w_{k+2}^0(w_{k+2}^1 - w_{k+1}^1) - w_k^0(w_{k+1}^1 - w_k^1)] = w_{k+1}^0; \end{cases}$$

compte tenues des valeurs initiales, les lignes précédentes se simplifient en :

$$\begin{cases} w_{k-1}^1 + \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2} [w_{k-2}^0 (w_{k-1}^1 - w_{k-2}^1)] = w_{k-1}^0; \\ w_k^1 + \frac{3\Delta t}{2\Delta x^2} [w_{k-1}^0 (w_k^1 - w_{k-1}^1)] = 0; \\ w_{k+1}^1 = 0; \end{cases}$$

d'où $w_i^1 = 0$ pour $i \in [k+1, I]$ et $w_k^1 > 0$. Ainsi, à chaque étape du point fixe le support progresse d'une maille.

On retrouve pour (\mathcal{D}_3) les mêmes conclusions que pour (\mathcal{D}_1) , à savoir qu'une troncature numérique est nécessaire si l'on veut garder un support compact. Cette troncature semble plus efficace sur le dernier schéma. En effet si η est le seuil de troncature et si $w = \sqrt{v}$ alors tronquer w à η près revient à tronquer v à η^2 près.

4.3.4 Discrétisation du problème (\mathcal{D}_4)

Le changement de fonction inconnue $\Theta = v^{\frac{3}{2}}$ nous conduit à considérer le problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0.$$

Le schéma que l'on présente s'inspire de schémas développés pour la diffusion non linéaire dans les références [14] et [20]. Ces schémas sont caractérisés par l'utilisation du changement de variable $\Theta = v^{\frac{3}{2}}$: la non linéarité bascule alors du terme de diffusion vers le terme instationnaire. Le problème de la propagation du front de diffusion ne disparaît pas pour autant. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{2}{3} \Theta^{-1/3} \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

au voisinage du front de diffusion $\Theta \rightarrow 0$ et $\Theta^{-1/3} \rightarrow \infty$, le terme instationnaire n'est pas borné. Pour résoudre cette difficulté, en suivant la référence [14], nous proposons la discrétisation temporelle suivante. La discrétisation spatiale sera sommairement abordée dans la mesure où elle ne présente aucune difficulté (terme de diffusion linéaire).

- Discrétisation temporelle

Soient $\alpha \in]0, 1[$ un réel très proche de 1 (nous précisons cela par la suite), $K > 0$ un réel arbitrairement grand. On définit la fonction $\gamma_K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\gamma_K(x) = x$ si $x \in [0, K]$ et $\gamma_K(x) = K$ si $x \in]K, +\infty[$. Cette fonction est représentée en figure (13) L'algorithme

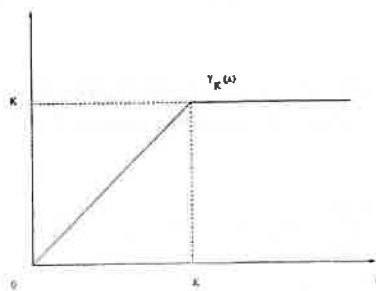


FIG. 13 - Graphe de γ_k

que nous présentons permet de calculer la valeur de $v = \Theta^{\frac{2}{3}}$ à la fin du pas de temps Δt , connaissant la valeur initiale $v^0 = \left(\Theta^{\frac{2}{3}}\right)^0$. La discrétisation temporelle de (\mathcal{D}_4) est immédiate :

$$\Theta^{\frac{2}{3}} - \left(\Theta^{\frac{2}{3}}\right)^0 - \Delta t \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0.$$

L'idée principale du schéma est d'introduire la linéarisation suivante du terme instationnaire :

$$\Theta^{\frac{2}{3}} - \left(\Theta^{\frac{2}{3}}\right)^0 \equiv \mu(\Theta)(\Theta - \Theta^0),$$

où μ est une fonction judicieusement choisie qui permet d'approcher la dérivée de $\Theta^{\frac{2}{3}}$ en restant borné au voisinage du front de diffusion. On introduit alors le processus itératif suivant (cf. [14]) :

- **initialisation** : pour $q=0$, on définit $\Theta^0 = (v^0)^{3/2}$ et $\mu^0 = \gamma_K \left[\frac{2}{3} (v^0)^{-1/2} \right]$; on remarque que μ^0 correspond à une régularisation de la dérivée de $\left(\Theta^{\frac{2}{3}}\right)^0$.

- **calcul de Θ^{q+1}** : on suppose connus μ^q et Θ^q , on calcule alors Θ^{q+1} solution de

$$(4.26) \quad \mu^q \left[\Theta^{q+1} - (v^0)^{3/2} \right] - \Delta t \frac{\partial^2 \Theta^{q+1}}{\partial x^2} = 0;$$

et on définit μ^{q+1} par :

$$(4.27) \quad \mu^{q+1} = \gamma_K \left[\frac{\left\{ \alpha \Theta^q + (1 - \alpha) (v^0)^{3/2} \right\}^{\frac{2}{3}} - v^0}{\Theta^q - (v^0)^{3/2}} \right].$$

Sachant que α est proche de 1, le terme entre crochets dans (4.27) représente une approximation de la dérivée de $\Theta^{2/3}$. L'utilisation de la fonction γ_K permet de borner l'approximation de cette dérivée lorsque $\Theta \rightarrow 0$.

- **test de convergence** : on évalue pour cela la convergence de la manière suivante : soit pour $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance

$$\frac{\| \Theta^{q+1} - \Theta^q \|}{\| \Theta^q \|} < \varepsilon,$$

$$\frac{\| \mu^{q+1} - \mu^q \|}{\| \mu^q \|} < \varepsilon,$$

où $\| \|$ désigne une norme de \mathbb{R}^I (norme l^1 par exemple).

- **valeur de v à la fin du pas de temps** : on définit v par la formule :

$$(4.28) \quad v = v^0 + \mu \left[\Theta - (v^0)^{3/2} \right].$$

La preuve de la convergence de cet algorithme est donnée dans la référence ([14]).

- **Discrétisation spatiale** Elle ne présente pas de difficulté car l'opérateur de diffusion est linéaire. Nous écrivons directement la i ème ligne du système non linéaire permettant de calculer Θ_i (discrétisation de (4.26)) :

$$(4.29) \quad \mu_i^q \left[\Theta_i^{q+1} - (v_i^0)^{3/2} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left(\Theta_{i+1}^{q+1} - \Theta_i^{q+1} \right) - \left(\Theta_i^{q+1} - \Theta_{i-1}^{q+1} \right) \right] = 0;$$

on aboutit à un système tridiagonal symétrique dont la résolution ne pose aucun problème.

- Propagation du support au niveau discret

L'examen de la propagation du support au niveau discret peut se faire en réécrivant (4.29) sous la forme :

$$\Theta_i^{q+1} - (v_i^0)^{3/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\frac{1}{\mu_i^q} (\Theta_{i+1}^{q+1} - \Theta_i^{q+1}) - \frac{1}{\mu_i^q} (\Theta_i^{q+1} - \Theta_{i-1}^{q+1}) \right] = 0;$$

Pour fixer les idées on explicite le calcul de Θ pour la première itération. On suppose comme d'habitude que $v_1^0, \dots, v_{k-1}^0 > 0$ et $v_k^0 = v_{k+1}^0 = \dots = v_l^0 = 0$ (cf. figure (9)). Θ^1 est solution de :

$$\Theta_i^1 - (v_i^0)^{3/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\frac{1}{\mu_i^0} (\Theta_{i+1}^1 - \Theta_i^1) - \frac{1}{\mu_i^0} (\Theta_i^1 - \Theta_{i-1}^1) \right] = 0;$$

par définition $\mu^0 = \gamma_K \left[\frac{2}{3} (v^0)^{-1/2} \right]$. Supposons que $\frac{2}{3} (v^0)^{-1/2} \leq K$ alors $v_{k-1}^0 \geq \frac{4}{9K^2}$. ce qui montre que le choix de K est lié à la finesse de la discrétisation spatiale, ainsi qu'au comportement de la fonction $v^0(x)$ au voisinage du front. Il vient naturellement $\mu_{k-1}^0 = \frac{2}{3} (v^0)^{-1/2} > 0$ et $\mu_k^0 = \mu_{k+1}^0 = \dots = \mu_l^0 = K$. On en déduit

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_{k-1}^0} = \frac{3}{2} (v^0)^{1/2}; \\ \frac{1}{\mu_k^0} = \frac{1}{K}; \\ \frac{1}{\mu_{k+1}^0} = \frac{1}{K}; \end{cases}$$

d'où il découle que $\Theta_k^1 > 0$, il y a bien propagation du front et celle-ci est contrôlée par le paramètre K . Si l'on n'avait pas introduit la régularisation de la dérivée de $\Theta^{2/3}$ par la fonction γ_K alors le coefficient $\frac{1}{\mu_k^0}$ serait nul et le front ne se propagerait pas. $\frac{1}{K}$ peut aussi s'interpréter comme un paramètre de perturbation du processus itératif, dans le même esprit que la méthode présentée pour le schéma avec la moyenne harmonique.

4.3.5 Résultats numériques

Afin de comparer les différents schémas présentés précédemment, nous les confrontons au cas test de diffusion non linéaire en géométrie plane (cf. la section 3.3.1); on rappelle que la solution est donnée par

$$\begin{cases} v(r, t) = (15t + 1)^{-\frac{2}{5}} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{\lambda(t)} \right)^2 \right)_+ \right]^2; \\ \lambda(t) = (15t + 1)^{\frac{2}{5}}; \\ v(r, 0) = \left[(1 - r^2)_+ \right]^2. \end{cases}$$

On effectue les calculs numériques pour $x \in [0, 5]$ et $t \in [0, 0.5]$, le paramètre de troncature numérique est fixé à la valeur $\eta = 10^{-15}$, le seuil de convergence du point fixe est par défaut fixé à la valeur $\epsilon = 10^{-4}$.

La variable discriminante pour comparer les schémas est la position de l'interface au cours du temps. Son expression analytique est donnée par la fonction λ .

- schéma (\mathcal{D}_1)

Pour le maillage grossier ($\Delta x = 0.1$), l'interface se propage par palier temporel (deux ou trois pas de temps pour faire avancer le front) : ceci est dû à la troncature en η . On constate que l'accord avec la solution analytique à $t = 0.5$ est correct. Quant à la propagation de l'interface, elle est rendue de manière acceptable par le schéma (\mathcal{D}_1). On note cependant une avance (de l'ordre de 20% pour $\Delta x = 0.1$) de la solution numérique et ce dès les premiers pas de temps. Cette avance reste constante au cours du temps. La diminution du pas d'espace, comme celle du pas de temps permettent de réduire l'écart (convergence du schéma). On remarquera également l'insensibilité des résultats au seuil de convergence du point fixe ϵ .

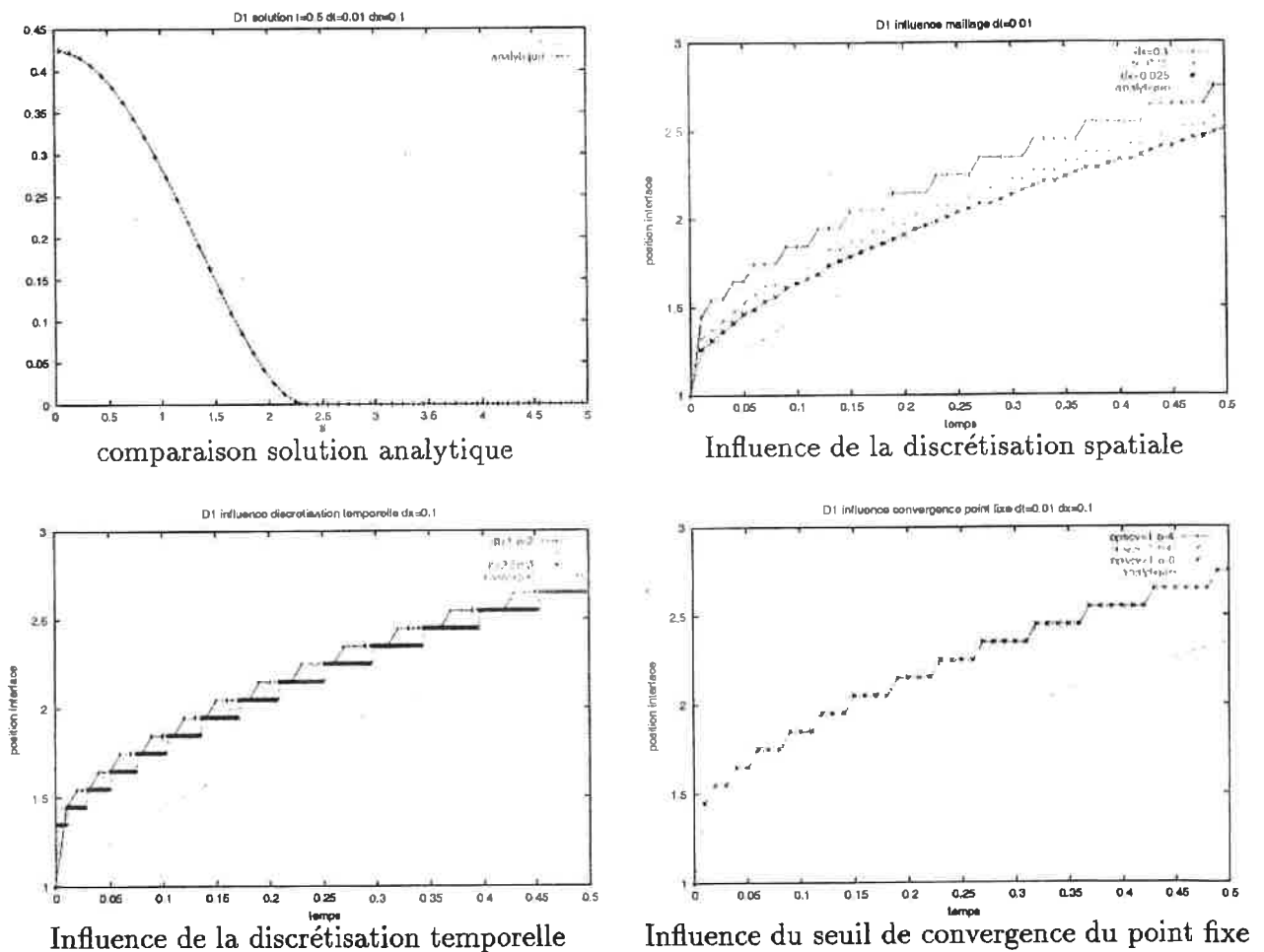
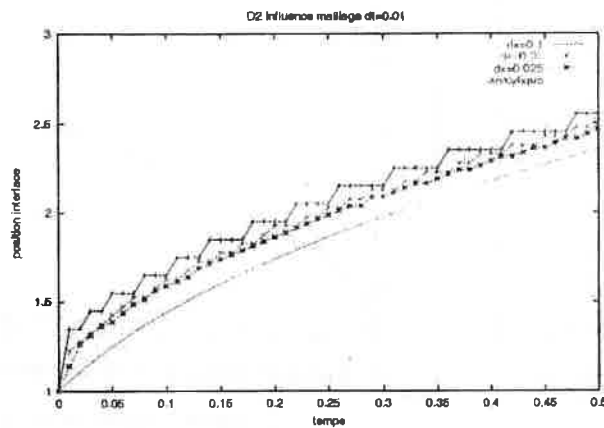


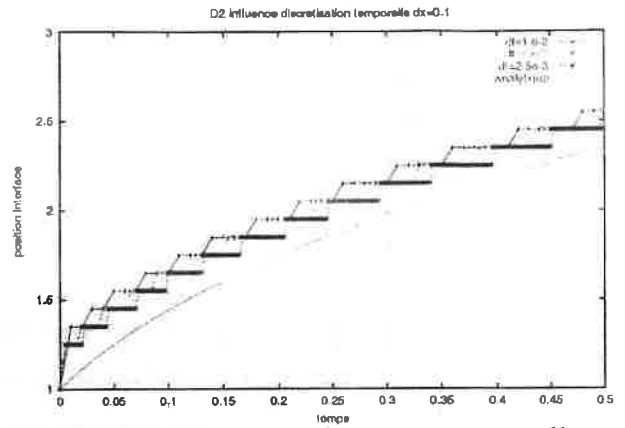
FIG. 14 – Résultats relatifs au schéma (\mathcal{D}_1)

– schéma (\mathcal{D}_2)

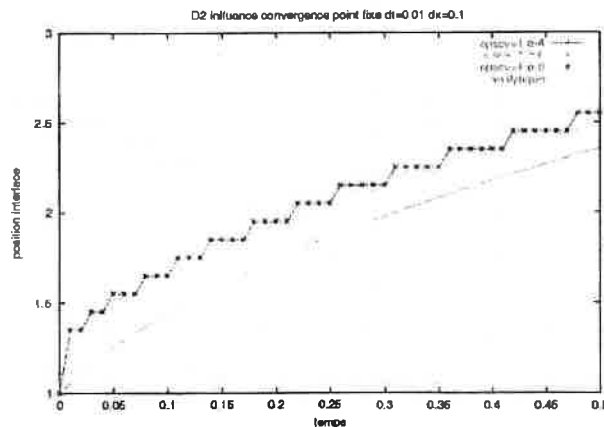
L'accord avec la solution à $t = 0.5$ est tout aussi bon qu'avec le schéma (\mathcal{D}_1). La propagation de l'interface est mieux restituée (pour $\Delta x = 0.1$ l'écart est de l'ordre de 10%). Ceci confirme le fait que la moyenne harmonique minimise le flux à l'interface et donc rend mieux compte de la propagation de celle-ci. La sensibilité aux pas de temps et d'espace montre la convergence du schéma. De même que pour (\mathcal{D}_1), le schéma (\mathcal{D}_2) est peu sensible à la valeur du seuil de convergence du point fixe. Pour terminer, soulignons le fait que la propagation de l'interface est indépendante du choix du paramètre de perturbation initiale du point fixe. Pour ce cas test on a défini δ de la manière suivante : $\delta = \text{coef} * \min_{i=1..I} \{v_i^0 > 0\}$ en utilisant les valeurs suivantes : $\text{coef} = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$



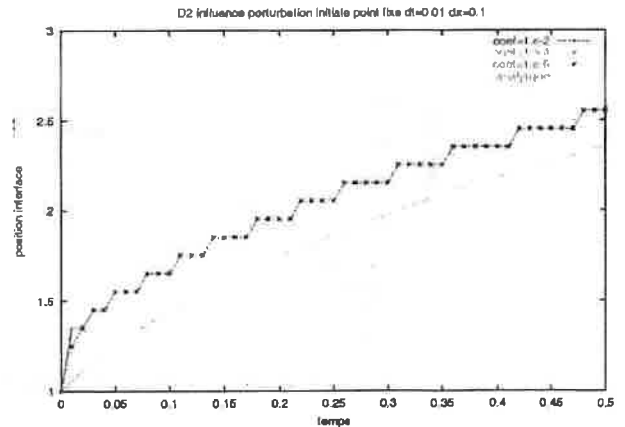
Influence de la discrétisation spatiale



Influence de la discrétisation temporelle



Influence du seuil de convergence du point fixe



Influence perturbation initiale du point fixe

FIG. 15 – Résultats relatifs au schéma (\mathcal{D}_2)

- schéma (\mathcal{D}_3)

La variable utilisée pour le schéma (\mathcal{D}_3) est $w = \sqrt{v}$, par conséquent le seuil de troncature utilisé pour w est $\sqrt{\eta}$ avec $\eta = 10^{-15}$. Comme pour les schémas précédents, la solution analytique à $t = 0.5$ se superpose quasiment avec la solution numérique. La propagation de l'interface est mieux restituée qu'avec le schéma (\mathcal{D}_2), on note cependant toujours une avance sur la solution analytique. Les résultats sont également satisfaisant en ce qui concerne la convergence du schéma. De plus, à l'identique de (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2), le schéma (\mathcal{D}_3) reste insensible à la valeur du seuil de convergence du point fixe.

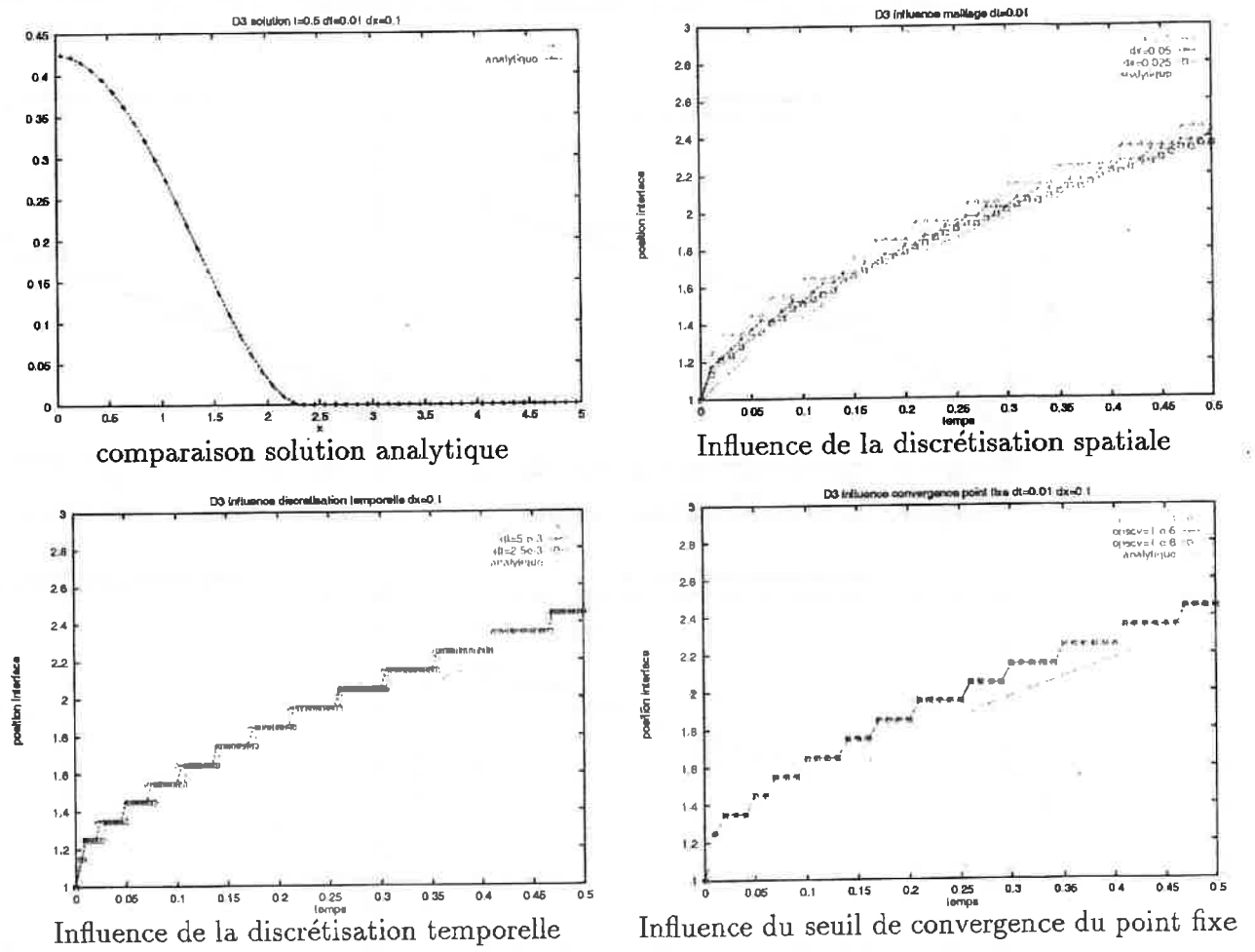


FIG. 16 - Résultats relatifs au schéma (\mathcal{D}_3)

- schéma (\mathcal{D}_4)

Le point clef du schéma (\mathcal{D}_4) est la détermination de la valeur du paramètre K . Le paramètre α lui ne pose pas de problème, on l'a fixé à la valeur $\alpha = 0.9999$. Dans la référence [20] où figurent des tests numériques portant sur le schéma (\mathcal{D}_4) aucune indication n'est fournie pour fixer la valeur de K . Dans notre cas, la figure (17) illustre la très grande sensibilité de la méthode à la valeur de K , notamment pour $K = 10^{14}$, on bloque la propagation de l'interface. Pour cette raison, nous abandonnons l'utilisation de ce schéma.

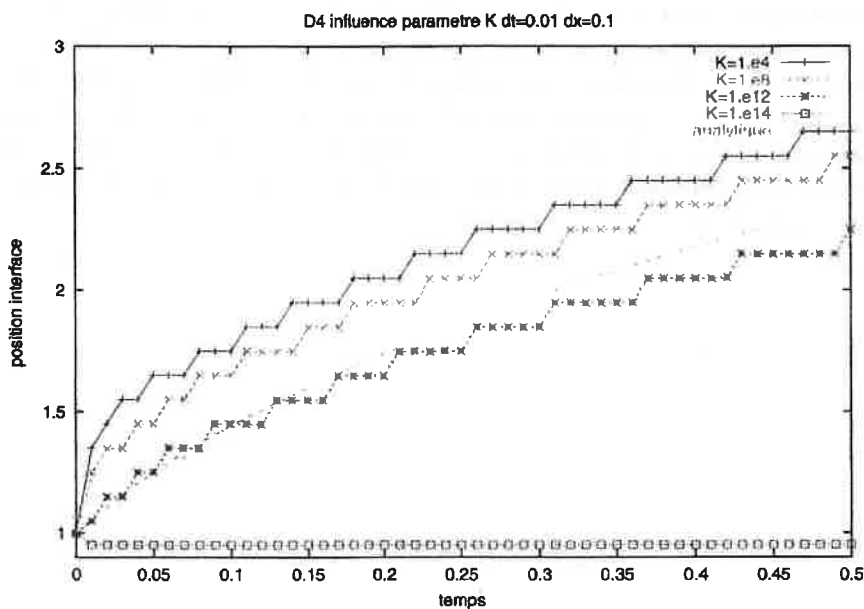


FIG. 17 - Influence du paramètre K

– Comparaison et choix de schéma(s)

Ce qui nous importe est de sélectionner le schéma qui minimise l'écart à la solution analytique du point de vue de la propagation de l'interface. En effet même si l'avance numérique du front est faible et concerne des valeurs petites, elle peut avoir des conséquences ennuyeuses quand on prendra en compte le terme de production en \sqrt{v} car celui-ci amplifiera les erreurs commises sur la discrétisation de la diffusion. La figure (18) distingue les deux schémas (\mathcal{D}_2) et (\mathcal{D}_3) comme ceux qui restituent le mieux la propagation de l'interface et ce pour trois maillages différents ($\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.05$ et $\Delta x = 0.025$). Ce sont donc eux que nous retiendrons par la suite. Remarquons qu'ils sont liés dans la mesure où (\mathcal{D}_3) découle naturellement de (\mathcal{D}_2) (simplification par \sqrt{v}). Le schéma (\mathcal{D}_3) est le plus précis, cependant il est spécifique de la non-linéarité du modèle en k . Pour cette raison, il ne pourra pas être généralisé à un modèle de type $k - \varepsilon$. Nous lui préférons donc le schéma (\mathcal{D}_2) qui lui peut s'étendre sans difficulté à d'autres types de non-linéarité. Signalons également une variante explicite avec la moyenne arithmétique (cf. remarque (6)) dont le résultat est acceptable. Ce type de schéma ne sera pas utilisé pour éviter des contraintes trop draconiennes sur le pas de temps.

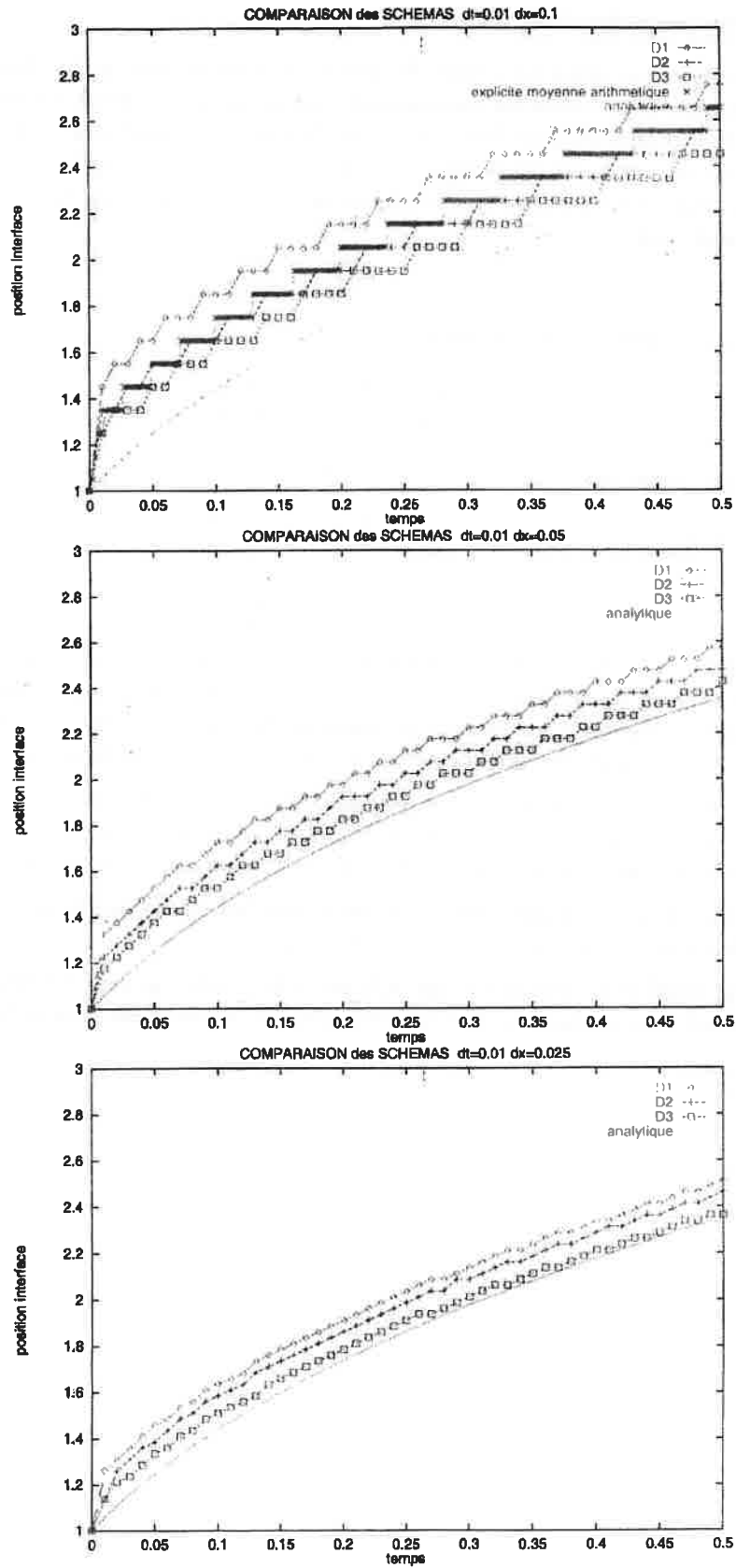


FIG. 18 - Comparaison des schémas

- D'autres schéma(s)...

Tous les schémas précédents sont du même type en ce sens qu'ils découlent tous de la discrétisation d'un problème parabolique. Aucun ne donne entière satisfaction du point de vue de la propagation du front (nécessité de mettre en place une troncature numérique). Une autre approche du problème consiste à mettre l'accent sur la propagation à vitesse finie du front et à essayer des schémas adaptés à des problèmes hyperboliques. Ainsi en remarquant que :

$$\frac{3}{2}\sqrt{v}\frac{\partial v}{\partial x} = 3v\frac{\partial\sqrt{v}}{\partial x},$$

l'équation de diffusion non linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{2}\sqrt{v}\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Hv) = 0,$$

avec

$$H = -3v\frac{\partial\sqrt{v}}{\partial x}.$$

Cette dernière écriture fait apparaître une équation d'advection. Sachant que l'intégrale de v sur le support est invariante au cours du temps, on peut envisager l'usage d'une méthode lagrangienne comme suggéré dans la référence [5]. Dans ce cadre le suivi de l'interface est exactement restitué. Toutefois ce type de méthodes présente deux inconvénients :

- la prise en compte des termes de production et de dissipation n'est pas immédiate car on perd la notion d'invariant; pour pallier ce problème on peut utiliser une méthode de splitting en prenant garde à la discrétisation du terme de production;
- l'extension de la méthode à une géométrie bidimensionnelle est délicate du fait des distorsions que risque de subir le maillage.

Nous ne détaillerons pas davantage ce type de méthode, car pour les applications qui nous intéressent nous choisissons de travailler avec des schémas de type diffusion.

4.4 Discrétisation de l'équation modèle

L'objet de cette section est de faire la synthèse des sections précédentes afin d'obtenir un schéma de discrétisation pour l'équation modèle :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^{\frac{3}{2}}) + cv^{\frac{3}{2}} - dv^{\frac{1}{2}} = 0; & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = v^0(x) \geq 0, & \text{à support compact,} \end{cases}$$

avec $c > 0$ et $d \geq 0$. On commence par exposer la discrétisation spatiale, puis la discrétisation temporelle et nous terminons par un exposé détaillé de la méthode de troncature utilisée pour assurer une propagation correcte de l'interface.

4.4.1 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale découle des choix effectués précédemment, elle est basée sur l'utilisation de la moyenne harmonique pour discrétiser le flux de diffusion aux interfaces du maillage (schéma (\mathcal{D}_2)). On rappelle les notations utilisées :

on discrétise l'équation modèle sur l'intervalle $[0, L]$ avec L suffisamment grand pour que le support de la solution soit strictement inclus dans $[0, L]$ pour l'intervalle de temps considéré. Soit $\{x_i\}_{i=1, \dots, I+1}$, une subdivision à pas constant⁶ Δx de $[0, L]$, avec $x_1 = 0$ et $x_{I+1} = L$. La fonction v est supposée constante par maille et on pose :

$$v_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x, t) dx.$$

En intégrant l'équation modèle sur $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient pour v_i , $i = 1, \dots, I$ le système différentiel suivant :

$$(4.30) \quad \frac{d}{dt} v_i + \frac{1}{\Delta x^2} [-\bar{d}_{i,i+1} v_{i+1} + (\bar{d}_{i,i+1} + \bar{d}_{i,i-1}) v_i - \bar{d}_{i,i-1} v_{i-1}] + cv_i^{\frac{3}{2}} - dv_i^{\frac{1}{2}} = 0,$$

avec comme conditions initiales : $v_i(0) = v_i^0$, $i = 1, \dots, I$.

On rappelle que :

$$\begin{cases} \bar{d}_{i,i+1} = 3 \frac{\sqrt{v_{i+1}} \sqrt{v_i}}{\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i}} & \text{si } \sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_i} > 0, \\ \bar{d}_{i,i+1} = 0 & \text{sinon,} \\ \bar{d}_{i,i-1} = 3 \frac{\sqrt{v_i} \sqrt{v_{i-1}}}{\sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}}} & \text{si } \sqrt{v_i} + \sqrt{v_{i-1}} > 0, \\ \bar{d}_{i,i-1} = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i = 2, \dots, I-1$, avec $\bar{d}_{I,I+1} = 0$ et $\bar{d}_{1,0} = 0$ (conditions aux limites de type Neumann homogène en $x = 0$ et $x = L$).

4.4.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle du système (4.30) sur le pas de temps $[0, \Delta t]$ nous conduit à un système non linéaire que nous résolvons à l'aide d'une méthode itérative de type point

6. Tout ce qui suit peut se généraliser sans difficulté à une subdivision à pas variables.

fixe. Nous donnons la i ème ligne du système linéaire dont v_i^{q+1} est solution, à l'étape $q+1$ du point fixe :

$$\begin{cases} v_i^{q+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \theta \left[\bar{d}_{i,i+1}^q (v_{i+1}^{q+1} - v_i^{q+1}) - \bar{d}_{i,i-1}^q (v_i^{q+1} - v_{i-1}^{q+1}) \right] \\ + \Delta t c \sqrt{v_i^q v_i^{q+1}} - \frac{\Delta t}{2} d \left(\sqrt{v_i^q} + \sqrt{v_i^0} \right) = \\ v_i^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \theta) \left[\bar{d}_{i,i+1}^0 (v_{i+1}^0 - v_i^0) - \bar{d}_{i,i-1}^0 (v_i^0 - v_{i-1}^0) \right], \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, 1]$, étant donné que la discrétisation du terme de dissipation est d'ordre 1 en temps on choisit $\theta = 1$ (implicite pur pour la diffusion). Dans ce cas on obtient :

$$(4.31) \quad \begin{cases} v_i^{q+1} - v_i^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\bar{d}_{i,i+1}^q (v_{i+1}^{q+1} - v_i^{q+1}) - \bar{d}_{i,i-1}^q (v_i^{q+1} - v_{i-1}^{q+1}) \right] \\ + \Delta t c \sqrt{v_i^q v_i^{q+1}} - \frac{\Delta t}{2} d \left(\sqrt{v_i^q} + \sqrt{v_i^0} \right) = 0. \end{cases}$$

Les termes de production et dissipation sont discrétisés conformément aux conclusions de la section précédente. On rappelle que le terme de production est centré en temps afin de minimiser l'erreur de discrétisation. Pour assurer la propagation de l'interface, l'initialisation du point fixe doit être perturbée pour les mailles au delà du front. Pour ce faire on met en place la procédure suivante :

$$(4.32) \quad \begin{cases} v_i^* = v_i^0, & \text{pour } v_i^0 > 0; \\ v_i^* = \delta, & \text{pour } v_i^0 = 0. \end{cases}$$

Typiquement la valeur minimale de v_i^0 est obtenue dans la maille où se trouve l'interface, il semble donc naturel de définir δ de la manière suivante :

$$(4.33) \quad \delta = \text{coef} * \min_{i=1..l} \{v_i^0 > 0\}.$$

où $\text{coef} \in]0, 1[$. De cette façon le front se propage, cependant un problème apparaît du fait du terme de production dans les mailles perturbées au delà du front. Si l'on ne fait rien il en résulte une croissance trop rapide du support de la solution. Pour remédier à cette situation nous devons mettre en place une troncature numérique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.4.3 Mise en place d'une troncature numérique

Pour les mailles situées après l'interface (propagation dans le sens des $x > 0$), le terme de diffusion est négligeable et l'équation (4.31) se réduit à :

$$(4.34) \quad v_i^{q+1} + \Delta t c \sqrt{v_i^q v_i^{q+1}} - \frac{\Delta t}{2} d \sqrt{v_i^q} = 0,$$

car $v_i^0 = 0$. En vertu de (4.32), on a pour l'initialisation du point fixe $v_i^* = \delta$ et à la première itération, nous obtenons :

$$(4.35) \quad v_i^1 = \frac{\frac{\Delta t}{2} d \sqrt{\delta}}{1 + \Delta t c \sqrt{\delta}}.$$

Ainsi, dès la première itération, le support de v recouvre tout le domaine de calcul. Nous corrigeons ce défaut en tronquant les valeurs de v définies par (4.35). Le seuil de troncature η à l'issue de chaque itération du point fixe est déterminé de la façon suivante :

$$(4.36) \quad \eta = \frac{\frac{\Delta t}{2} d \sqrt{\delta}}{1 + \Delta t c \sqrt{\delta}} (1 + \tau),$$

où τ est un réel strictement positif. Le choix du paramètre τ permet de moduler le niveau de troncature, il sera calibré à l'aide de la solution analytique dans la section suivante. Nous devons aussi nous assurer que le seuil de troncature η est toujours supérieur au niveau de la perturbation δ . Pour ce faire, on étudie la fonction

$$f(\delta) = \eta - \delta = \frac{\sqrt{\delta} \left[(1 + \tau) d \frac{\Delta t}{2} - \sqrt{\delta} - \Delta t c \delta \right]}{1 + \Delta t c \delta},$$

on montre sans difficulté que cette fonction s'annule pour

$$\delta_0 = \left[\frac{\Delta t d (1 + \tau)}{1 + \sqrt{1 + 2 \Delta t^2 c d (1 + \tau)}} \right]^2,$$

et donc pour $\delta \in]0, \delta_0[$, on a $\eta > \delta$. On modifie alors la définition de δ :

$$(4.37) \quad \delta = \min \left[\text{coef} * \min_{i=1..I} \{v_i^0 > 0\}, \frac{1}{4} \delta_0 \right],$$

si bien que $\eta \geq 2\delta > \delta$.

δ et par conséquent η sont évalués au début du pas en temps, et v est tronquée à l'issue de chaque itération du point fixe.

Dans le cas particulier où $d = 0$, le terme de production s'annule et les problèmes évoqués ci-dessus disparaissent. On a $\delta_0 = 0$ et donc d'après (4.37), $\delta = 0$. Dans ce cas, on revient à la définition initiale de δ (cf. (4.33)) afin de construire une valeur de δ non nulle car il est indispensable de perturber le point fixe pour que le front de diffusion se propage. La troncature est moins délicate, la formule (4.36) nous donne $\eta = 0$, on fixera dans ce cas un seuil minimal en posant $\eta = 10^{-15}$.

Remarquons que cette méthode de troncature est généralisable sans difficultés à un problème bidimensionnel, elle peut également s'appliquer à la discrétisation des équations du modèle $k - \varepsilon$. D'un point de vue théorique, nous sommes incapables pour le moment de prouver la convergence de la méthode. Dans le paragraphe suivant, nous l'appliquons au cas test défini précédemment en vue de sa qualification.

4.4.4 Résultats numériques

- 1 Cas test analytique :

L'évaluation du schéma de discrétisation présenté dans le paragraphe précédent est effectué à l'aide de la solution analytique rappelée ci-dessous : pour $c = d = 1$ nous avons :

$$v(x, t) = \left[\alpha(t) \left(\cosh\left(\frac{x_i(t)}{3}\right) - \cosh\left(\frac{x}{3}\right) \right) \right]_+^2,$$

α est donné par

$$\alpha(t) = \frac{2(1 + \sqrt{2}) \exp\left[-\frac{5}{6}t\right]}{(3 + 2\sqrt{2}) - \exp\left[-\frac{5}{3}t\right]},$$

la donnée initiale correspondante v^0 s'écrit :

$$v^0(x) = 2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{2}} \right]_+.$$

La propagation de l'interface au cours du temps est donnée par :

$$x_i(t) = 3 \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{5}{2}t.$$

On effectue les simulations numériques pour $x \in [0, 6]$ et $t \in [0, 1]$. Le seuil de convergence du point fixe est fixé à la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$, le coefficient intervenant dans la définition de δ est fixé à la valeur $\text{coef} = 10^{-2}$. Dans un premier temps nous calibrons la valeur du paramètre τ relatif au seuil de troncature. Ensuite nous examinerons pour cette valeur la convergence en temps et en espace du schéma numérique. La quantité discriminante pour cette étude numérique est la position de l'interface au cours du temps $x_i(t)$.

- Calibrage du paramètre τ

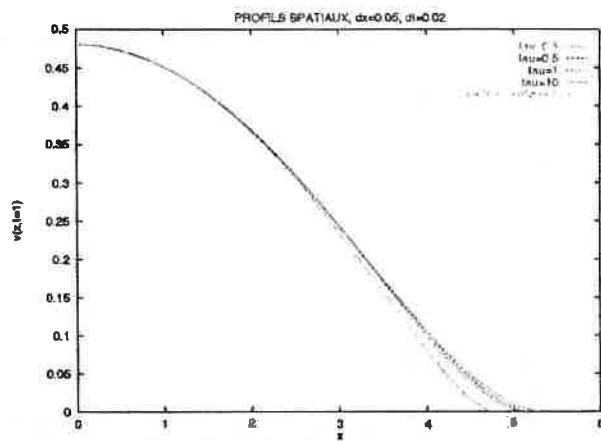
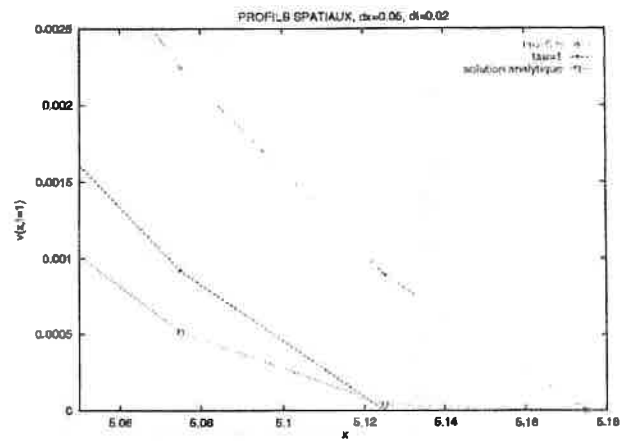
Pour calibrer la valeur de τ on compare les solutions numériques et analytique pour les valeurs suivantes du paramètre : $\tau = 0.1, 0.5, 1, 10$. La discrétisation est caractérisée par $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$ et $\Delta x = 5 \cdot 10^{-2}$. L'examen de la figure (19) montre que pour ces valeurs de τ la solution numérique reste à support compact. Cependant pour $\tau = 0.1$, la troncature est insuffisante et le front numérique est en avance sur la solution analytique, de plus cet écart semble croître au cours du temps. Pour $\tau = 10$, la troncature est trop forte et l'interface numérique est en retard. Il apparaît que ce sont les valeurs de τ proche de l'unité qui fournissent les résultats les plus satisfaisants. On retiendra la valeur $\tau = 0.5$ pour laquelle l'écart relatif (numérique/analytique) sur la position de l'interface est inférieur à 1%. Nous ne chercherons pas à affiner davantage la valeur de τ car celle-ci dépend du maillage et du pas de temps utilisés. La valeur $\tau = 0.5$ va nous servir de référence pour tous les autres calculs et nous montrons dans les paragraphes suivant que le schéma est convergent en temps et en espace.

- Convergence en temps

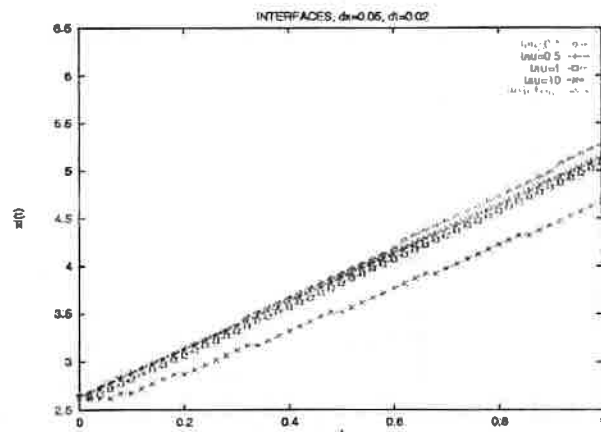
Pour l'étude de la convergence en temps du schéma, nous travaillons avec un maillage caractérisé par $\Delta x = 0.1$ et nous fixons la valeur de τ à $\tau = 0.5$. La convergence en temps de la méthode est illustrée par la figure (20). On observe une convergence correcte quant à la restitution de la position de l'interface. L'allure des courbes d'écarts relatifs est caractéristique de la troncature. En effet l'interface numérique peut stagner dans une même maille sur quelques pas de temps. L'erreur relative sur la position de l'interface est satisfaisante puisqu'elle est de l'ordre de 1% pour $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$.

- Convergence en espace

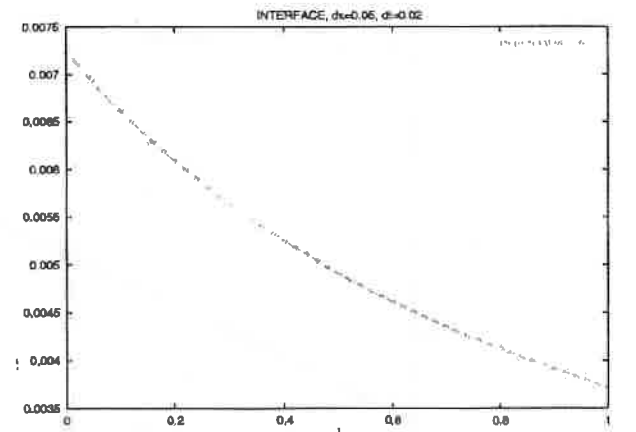
Nous étudions la convergence en espace du schéma pour $\tau = 0.5$ et $\Delta t = 0.02$. Pour ce qui concerne les profils spatiaux la convergence en espace semble satisfaisante. Cependant un grossissement au voisinage du front montre un léger défaut pour la courbe correspondant au calcul le plus finement maillé ($\Delta x = 0.025$) : il semble que la troncature soit un peu trop élevée. On retrouve ce défaut en examinant les courbes d'écart à la solution analytique

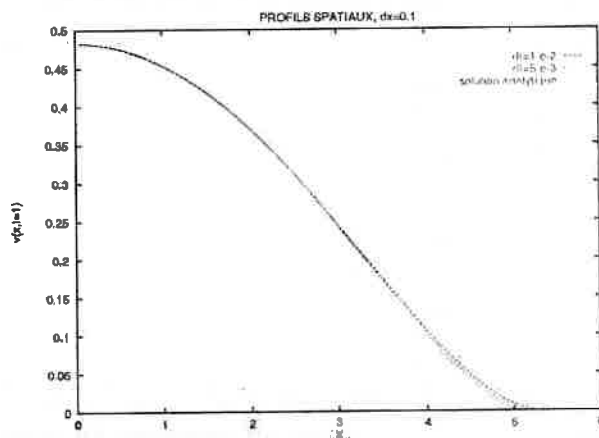
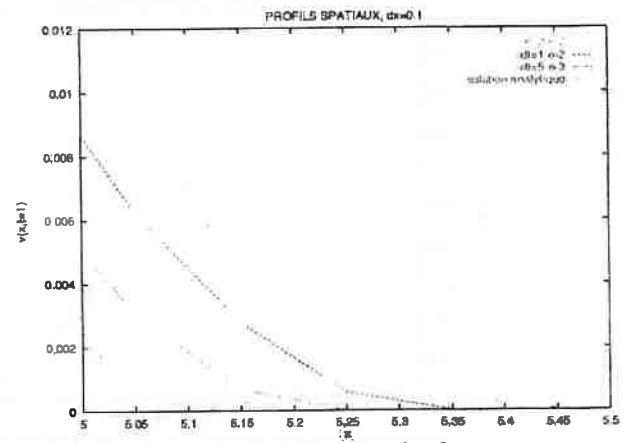
comparaison solution analytique à $t=1$ 

zoom au voisinage du front

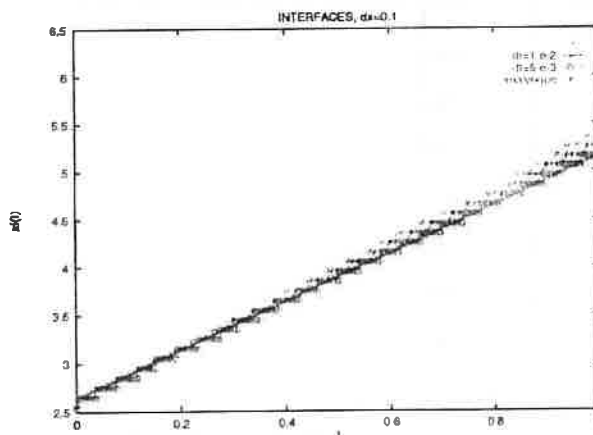


position de l'interface

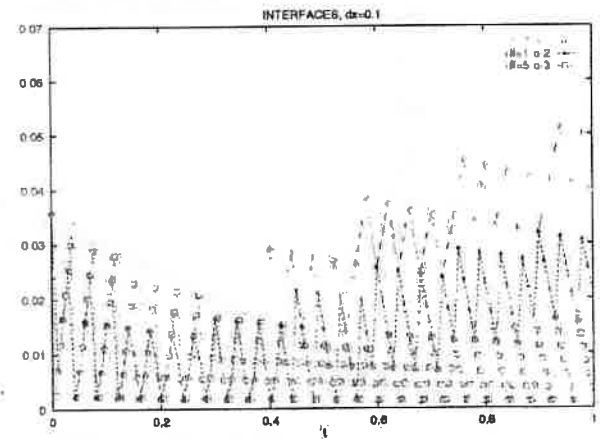
erreur relative pour $\tau = 0.5$ FIG. 19 – Comparaison des solutions pour différentes valeurs de τ

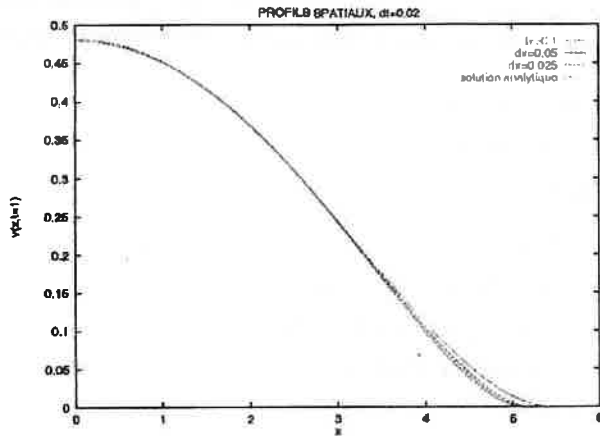
comparaison solution analytique à $t=1$ 

zoom au voisinage du front

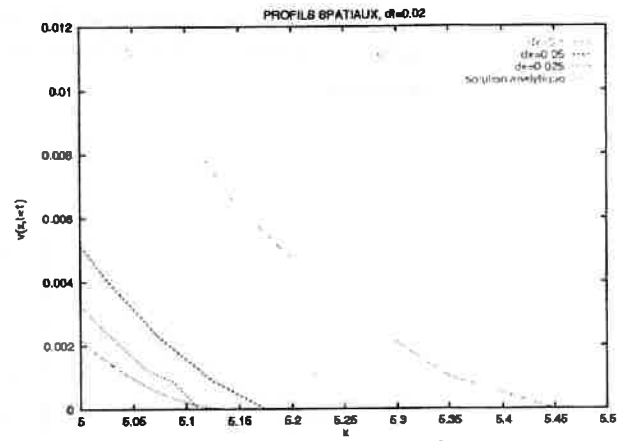


position de l'interface

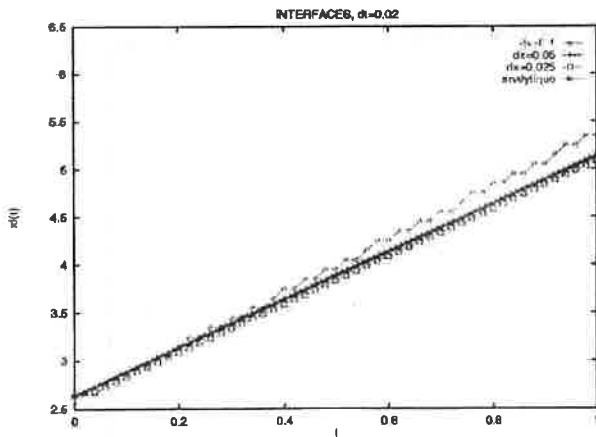
erreur relative sur $x_i(t)$ FIG. 20 - Etude de la convergence en temps pour $\Delta x = 0.1$



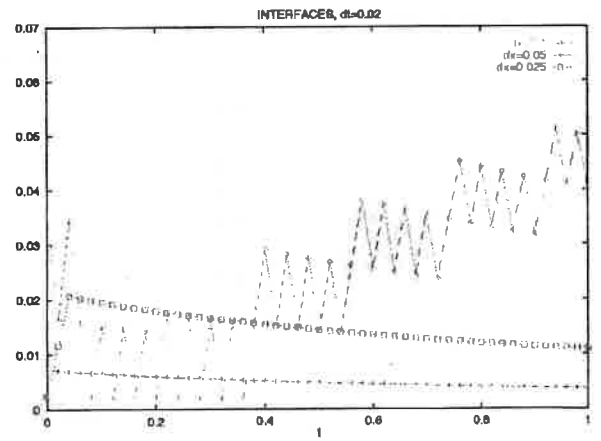
comparaison solution analytique à $t=1$



zoom au voisinage du front



position de l'interface



erreur relative sur $x_i(t)$

FIG. 21 - Etude de la convergence en espace pour $\Delta t = 0.02$

pour la position de l'interface : l'erreur pour $\Delta x = 0.025$ est deux fois plus importante que pour $\delta x = 0.05$, le niveau d'erreur reste cependant acceptable puisqu'il est de l'ordre de 1 à 2%. Une piste pour corriger ce défaut serait de moduler le coefficient τ en fonction du maillage. Une telle étude sera envisagée ultérieurement. Une amélioration possible réside aussi dans l'évaluation d'une borne inférieure pour le seuil de troncature, qui prenne en compte la part de la diffusion dans la propagation de l'interface.

- 2 Solution en ondes progressives :

Dans ce paragraphe nous testons la capacité du schéma numérique à rendre compte du comportement asymptotique en onde progressive pour certains types de conditions initiales (cf. la section (3.4)). Nous proposons deux cas tests définis par les conditions initiales suivantes :

$$v^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq 0.5, \\ 2(1-x) & \text{pour } x \in]0.5, 1[, \\ 0 & \text{pour } x \geq 1, \end{cases}$$

$$w^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq 0.5, \\ 1 - 5(x - 0.5) & \text{pour } x \in]0.5, 0.6[, \\ 0.5 + 5(x - 0.6) & \text{pour } x \in]0.6, 0.9[, \\ -20(x - 1) & \text{pour } x \in]0.9, 1[, \\ 0 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

Les graphes des deux fonctions sont représentées en figure (22). On sait que pour ces deux

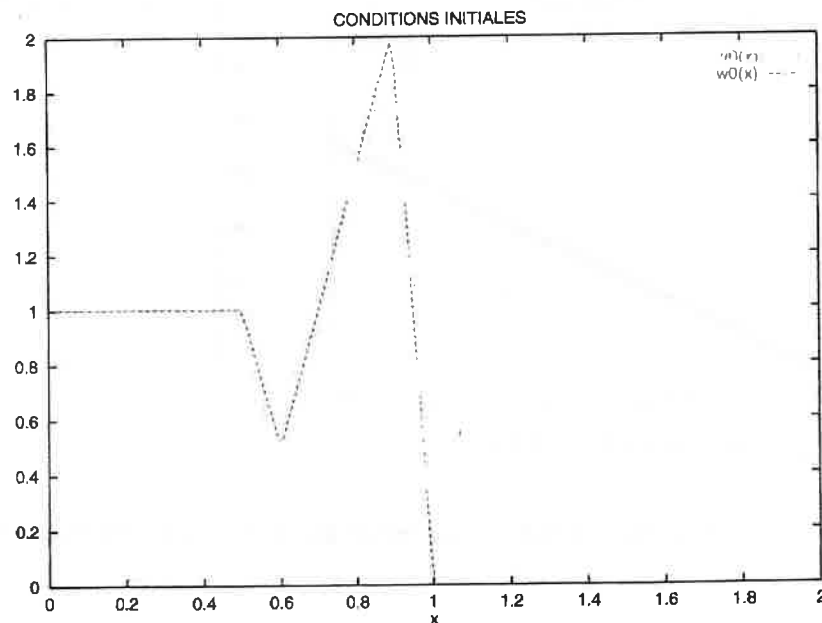


FIG. 22 - Conditions initiales

conditions initiales les solutions évoluent vers une onde progressive dont la vitesse vaut $\sqrt{6}$. L'objet des cas-tests est de vérifier ce résultat numériquement. Pour les deux cas nous travaillons avec $x \in [0, 40]$ et $t \in [0, 10]$, le pas d'espace vaut $\Delta x = 0.01$ et le pas de temps

$\Delta t = 0.01$, enfin le coefficient τ est fixé à la valeur $\tau = 0.5$. On représente en figure (23) les profils des solutions numériques obtenues pour les deux cas à $t = 10$. Ces solutions

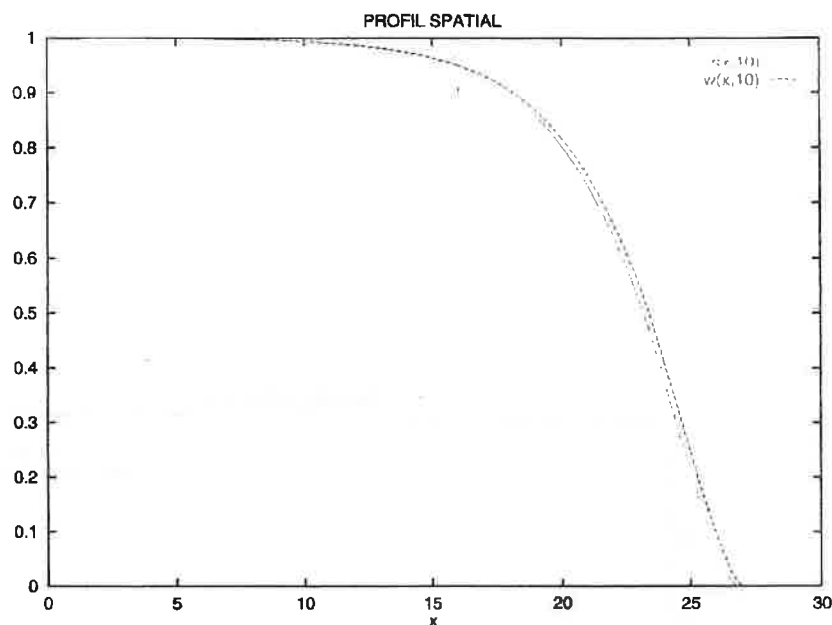


FIG. 23 – Solutions à $t = 10$

sont très proches l'une de l'autre et ce en dépit de conditions initiales différentes. Pour analyser plus finement le comportement de ces solutions, on représente en figure (24) le graphe de la position de l'interface pour chacune des solutions en fonction du temps. On retrouve numériquement le résultat de Kolmogoroff à savoir que les solutions évoluent vers une onde progressive de vitesse $\sqrt{6}$. En effet pour les deux solutions en temps grand la position de l'interface au cours du temps $x_i(t)$ tend vers une droite dont la pente est voisine de $\sqrt{6}$. Une régression linéaire effectuée pour $t \in [1, 10]$ permet de calculer les pentes p_v et p_w relatives aux solutions v et w . Nous obtenons $p_v = 2.500932$ et $p_w = 2.500194$, soit un écart relatif de l'ordre de 2% par rapport à la valeur théorique.

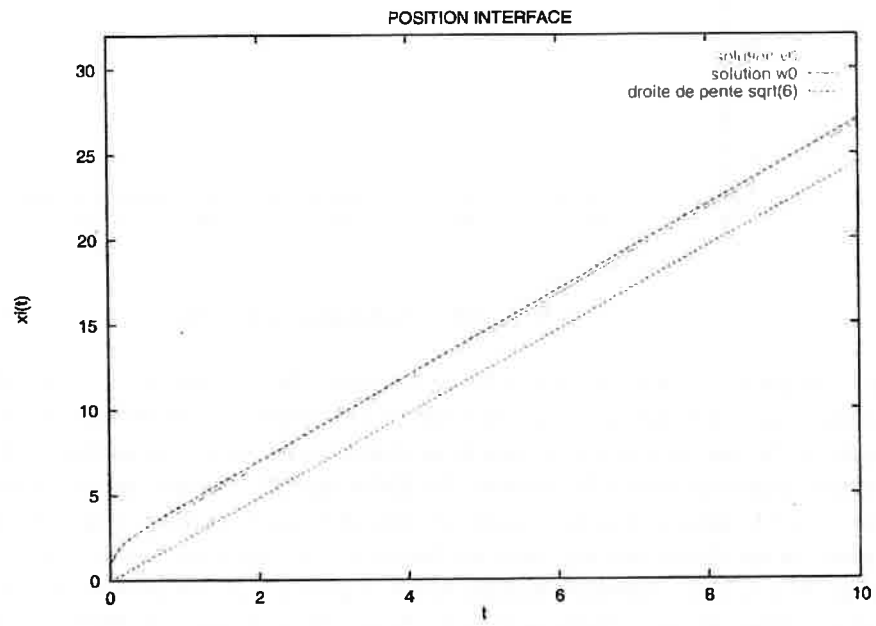


FIG. 24 – Position de l'interface au cours du temps

5 Discrétisation en 2D

Nous présentons la discrétisation bidimensionnelle de l'équation de l'énergie cinétique turbulente pour une géométrie plane et axisymétrique. Le schéma utilisé est une généralisation de celui présenté dans la section précédente. Nous commençons par rappeler les notations principales, puis nous présentons la discrétisation spatiale en détaillant la discrétisation du terme de diffusion. Nous achevons l'exposé avec la discrétisation temporelle. Nous ne fournissons pas de résultats numériques, la validation de la discrétion bidimensionnelle sera effectuée dans un prochain rapport.

5.1 Notations

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $T > 0$, pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$ on cherche $k(x, t) \geq 0$ solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \rho \frac{dk}{dt} + \left(\frac{2}{3}\rho k\right) \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) - \nabla \cdot \left(\rho \frac{C_\mu}{\sigma_k} L \sqrt{k} \nabla k\right) \\ + \rho \frac{D}{L} k^{\frac{3}{2}} - \rho \left(2L \frac{C_\mu}{\sigma_u} S : S + LC_\mu \left[\frac{\nabla \rho \cdot \nabla P}{\rho^2}\right]_-\right) \sqrt{k} = 0, \\ k(x, 0) = k^0(x) \geq 0, \\ \frac{\partial k}{\partial n}(x, t) = 0, \text{ pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour le détail des notations et la signification physique de chacun des termes, on se reportera à la section (2.2). Afin de simplifier l'écriture du problème on pose :

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{C_\mu}{\sigma_k} L, \\ c = \frac{D}{L}, \\ d(x, t) = 2L \frac{C_\mu}{\sigma_u} S : S + LC_\mu \sqrt{k} \left[\frac{\nabla \rho \cdot \nabla P}{\rho^2}\right]_-, \end{cases}$$

on remarque que c et Λ sont des constantes strictement positives. Par contre d est une fonction de l'hydrodynamique et donc dépendante du temps et de l'espace, c'est une quantité positive par définition. d est non nul lorsque l'écoulement est cisailé ou lorsque celui est en phase d'instabilité (Rayleigh Taylor). Avec ces notations condensées le problème précédent s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \rho \frac{dk}{dt} + \left(\frac{2}{3}\rho k\right) \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) - \nabla \cdot (\rho \Lambda \sqrt{k} \nabla k) + \rho c k^{\frac{3}{2}} - \rho d \sqrt{k} = 0, \\ k(x, 0) = k^0(x) \geq 0, \\ \frac{\partial k}{\partial n}(x, t) = 0, \text{ pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On retrouve une structure proche de celle de l'équation modèle étudiée dans la section précédente. Les différences résident dans la prise en compte de l'hydrodynamique : travail de la pression turbulente et terme de production non constant. On supposera pour la suite de l'exposé que toutes les quantités hydrodynamiques sont connues.

5.2 Discrétisation en espace

Dans cette section nous explicitons la discrétisation spatiale du problème (\mathcal{P}).

5.2.1 Notations et hypothèses

La résolution de l'hydrodynamique est effectuée à l'aide d'un schéma Eulerien qui se décompose en une phase Lagrangienne suivie d'une phase de projection. La phase Lagrangienne se scinde en une phase de prédiction suivie d'une phase de correction afin d'obtenir une précision d'ordre 2 en temps. Au cours de ces deux phases Lagrangienne, le maillage initial subit une déformation. Nous supposons donc que le maillage est formé de quadrilatères non dégénérés convexes.

La géométrie des objets étudiés est bidimensionnelle plane ou axisymétrique, dans ce cas, (Ox) est l'axe de rotation. Soit Q_i une maille générique, on note m_i sa masse et V_i son volume, m_i est constante au cours de la phase Lagrange par contre V_i est une fonction de t . La densité dans la maille i est donnée par la relation $m_i = \rho_i V_i$.

Avant de discrétiser le problème (\mathcal{P}) nous rappelons un résultat bien connu (cf. [12]) concernant l'expression de la dérivée temporelle d'une quantité intégrale sur un domaine variant au cours du temps. Soient $\mathcal{D}(t)$ un domaine variant au cours du temps et $f(x, t)$ une quantité scalaire pour $x \in \mathcal{D}(t)$, on alors le résultat suivant connu sous le nom de formule de transport :

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} f(x, t) dx \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{df}{dt} + f \nabla \cdot u \right) dx$$

dans cette formule $\frac{df}{dt}$ désigne la dérivée Lagrangienne (particulare) de f , dx est la mesure volumique de $\mathcal{D}(t)$, $u(x, t)$ est le champ de vitesse associé à l'écoulement, supposé suffisamment régulier.

Une application immédiate de (5.1) nous fournit :

$$(5.2) \quad \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{df}{dt} dx = \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \rho f dx \right].$$

On introduit $\Phi = -\rho \Lambda \sqrt{k} \nabla k$ le flux de diffusion, $k_i(t)$ la valeur moyenne de $k(x, t)$ sur Q_i :

$$k_i(t) = \frac{1}{V_i(t)} \int_{Q_i} k(x, t) dx.$$

Intégrons chacun des termes de l'équation vérifiée par k sur la maille Q_i avec la mesure dx :

◊ terme instationnaire

en appliquant la formule (5.2) il vient immédiatement :

$$(5.3) \quad \int_{Q_i} \rho \frac{dk}{dt} dx = m_i \frac{dk_i}{dt};$$

◊ travail de la pression turbulente

de la même façon :

$$(5.4) \quad \int_{Q_i} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) dx = \frac{2}{3} m_i k_i \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dt};$$

◊ terme de dissipation

$$(5.5) \quad \int_{Q_i} \rho c k^{\frac{3}{2}} dx = m_i c k_i^{\frac{3}{2}};$$

◊ terme de production

$$(5.6) \quad \int_{Q_i} \rho d k^{\frac{1}{2}} dx = m_i d_i k_i^{\frac{1}{2}};$$

pour la discrétisation du terme de Rayleigh Taylor contenu dans d_i on se reportera à la référence [4];

◊ terme de diffusion

en appliquant la formule de Green

$$(5.7) \quad \int_{Q_i} \nabla \cdot \Phi dx = \int_{\partial Q_i} \Phi \cdot n dS;$$

où ∂Q_i est la frontière de la maille Q_i , dS la mesure associée et n la normale sortante. La discrétisation du flux de diffusion étant plus délicate, elle fait l'objet du paragraphe suivant.

5.2.2 Approximation du flux de diffusion

Nous commençons par introduire quelques notations. On définit k_i^O , k_i^S , k_i^E et k_i^N les valeurs de k dans les mailles adjacentes ouest, sud, est et nord de Q_i , de la même façon on introduit les normales n_i^O , n_i^S , n_i^E et n_i^N , et on numérote les noeuds de la maille Q_i de 1 à 4 dans le sens trigonométrique, le noeud 1 étant le premier noeud en bas à gauche. On se reportera à la figure (25) pour plus de précisions. Soient p_O , p_S , p_E , et p_N les longueurs des côtés de la maille Q_i , respectivement (4, 1), (1, 2), (2, 3) et (3, 4). L'intégrale intervenant au second membre de (5.7), soit $\int_{\partial Q_i} \Phi \cdot n dS$, se décompose sur les quatre bras de la maille Q_i comme suit :

$$\int_{\partial Q_i} \Phi \cdot n dS = \int_{(1,2)} \Phi \cdot n_i^S dS + \int_{(2,3)} \Phi \cdot n_i^E dS + \int_{(3,4)} \Phi \cdot n_i^N dS + \int_{(4,1)} \Phi \cdot n_i^O dS,$$

on fait l'hypothèse que $\Phi \cdot n$ est **constant sur chaque bras** d'où :

$$\int_{\partial Q_i} \Phi \cdot n dS = \Phi \cdot n_i^S \int_{(1,2)} dS + \Phi \cdot n_i^E \int_{(2,3)} dS + \Phi \cdot n_i^N \int_{(3,4)} dS + \Phi \cdot n_i^O \int_{(4,1)} dS,$$

on pose $S^S = \int_{(1,2)} dS$, $S^E = \int_{(2,3)} dS$, $S^N = \int_{(3,4)} dS$ et $S^O = \int_{(4,1)} dS$. On note Φ_S la valeur absolue du produit scalaire $\Phi \cdot n_i^S$ et on suppose (convention de signe) que n_i^N et n_i^E sont orientés positivement. On en déduit :

$$(5.8) \quad \int_{\partial Q_i} \Phi \cdot n dS = \Phi_N S^N - \Phi_S S^S + \Phi_E S^E - \Phi_O S^O.$$

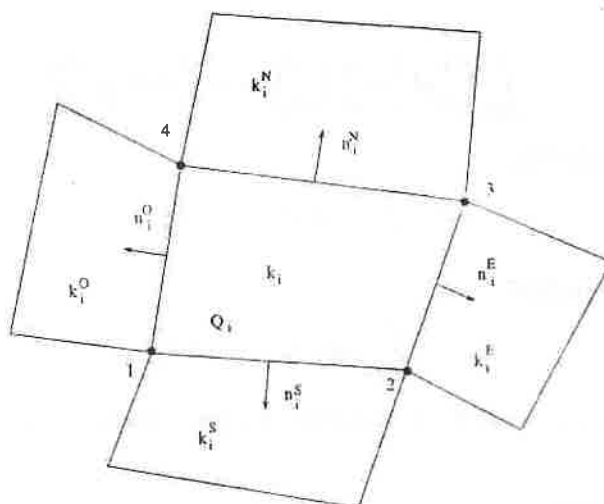


FIG. 25 - Notations

Il reste à évaluer les surfaces S^N , S^S , S^E et S^O ainsi que Φ_N , Φ_S , Φ_E et Φ_O .

Détaillons le calcul de S^O :

- géométrie axisymétrique

S^O est la surface engendrée par la rotation du bras (4,1) de longueur p^O autour de l'axe (Ox) . Soient r_1 et r_4 les distances à l'axe (Ox) des points 1 et 4. Le centre de gravité du bras (4,1) est à la distance $(r_1 + r_4)/2$ de l'axe (Ox) . d'où par application de la formule de Guldin :

$$S^O = \pi(r_1 + r_4)p^O.$$

- géométrie plane

de manière évidente il vient :

$$S^O = p^O.$$

Soit α l'entier naturel tel que $\alpha = 0$ si la géométrie est plane et $\alpha = 1$ si la géométrie est axisymétrique, alors les quatre surfaces sont données par :

$$\begin{cases} S^O = \pi^\alpha (r_1 + r_4)^\alpha p^O, \\ S^S = \pi^\alpha (r_2 + r_1)^\alpha p^S, \\ S^E = \pi^\alpha (r_2 + r_3)^\alpha p^E, \\ S^N = \pi^\alpha (r_3 + r_4)^\alpha p^N, \end{cases}$$

Pour achever la discrétisation du flux de diffusion, il reste à trouver une approximation de $\Phi = -\rho\Lambda\sqrt{k}\nabla k$ sur chaque bras de la maille sachant que k est constant par mailles. Cette approximation est obtenue en écrivant la continuité du flux normal à travers les cloisons d'une maille. Détaillons le calcul de Φ^O . On note G_i l'isobarycentre de la maille Q_i et G_i^O celui de la maille ouest de Q_i , soit Q_i^O (voir figure 26). On définit les demi profondeurs de maille l^O , l^E , l^N et l^S , respectivement les distances de G_i aux bras (4,1), (2,3), (3,4) et (1,2). Pour la maille Q_i^O , on note l_i^E la demi profondeur relative au bras (4,1). On

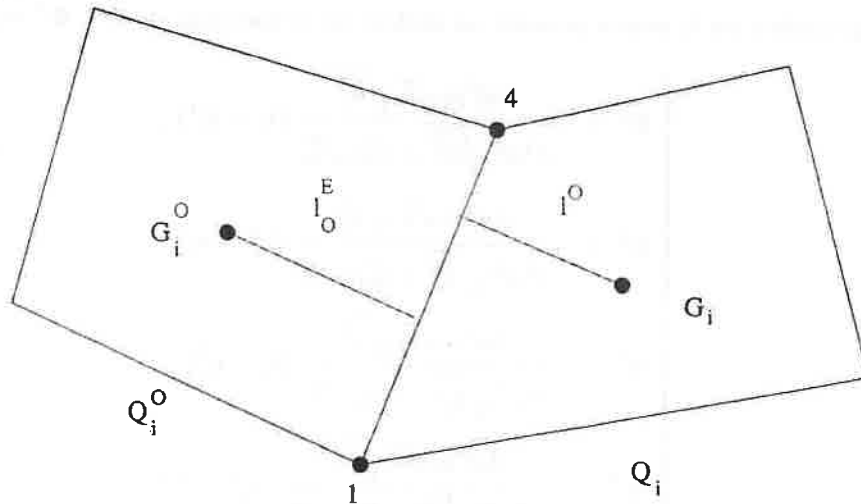


FIG. 26 - Approximation des flux

discrétise alors Φ^O à gauche et à droite de (4, 1) :

$$\begin{cases} \Phi_y^O = -\rho_i^O \Lambda \sqrt{k_i^O} \frac{k_{bord} - k_i^O}{l_O^E}, \\ \Phi_d^O = -\rho_i \Lambda \sqrt{k_i} \frac{k_i - k_{bord}}{l^O}, \end{cases}$$

dans ces formules k_{bord} désigne la valeur de k sur le bras (4, 1), a priori inconnue, mais que l'on détermine en écrivant la continuité du flux normal (cf. [10]), c'est à dire $\Phi_y^O = \Phi_d^O$. Nous obtenons :

$$k_{bord} = \frac{l^O \rho_i^O (k_i^O)^{\frac{3}{2}} + l_O^E \rho_i k_i^{\frac{3}{2}}}{l^O \rho_i^O + l_O^E \rho_i}.$$

d'où l'expression finale de Φ^O :

$$(5.9) \quad \Phi^O = -\frac{\Lambda \rho_i^O \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^O}}{l^O \rho_i^O \sqrt{k_i^O} + l_O^E \rho_i \sqrt{k_i}} (k_i - k_i^O)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\Phi^O = -\frac{(l^O + l_O^E) \Lambda}{\frac{l^O}{\rho_i \sqrt{k_i}} + \frac{l_O^E}{\rho_i^O \sqrt{k_i^O}}} \frac{(k_i - k_i^O)}{l^O + l_O^E},$$

cette écriture met en évidence un coefficient de diffusion effectif, qui n'est autre que la moyenne harmonique des coefficients de diffusion des mailles Q_i et Q_i^O , pondérée par les demi profondeurs de mailles l^O et l_O^E .

Remarque 10 L'expression (5.9) du flux que nous avons obtenue est à rapprocher de celle donnée dans le rapport [19]. Notamment dans le cas d'un maillage rectangulaire les deux formulations sont identiques.

En procédant de la même manière on obtient les expressions de Φ^E , Φ^N et Φ^S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^O = -\frac{\Lambda \rho_i^O \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^O}}{l^O \rho_i^O \sqrt{k_i^O} + l_O^E \rho_i \sqrt{k_i}} (k_i - k_i^O), \\ \Phi^E = -\frac{\Lambda \rho_i^E \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^E}}{l^E \rho_i^E \sqrt{k_i^E} + l_E^O \rho_i \sqrt{k_i}} (k_i^E - k_i), \\ \Phi^S = -\frac{\Lambda \rho_i^S \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^S}}{l^S \rho_i^S \sqrt{k_i^S} + l_S^N \rho_i \sqrt{k_i}} (k_i - k_i^S), \\ \Phi^N = -\frac{\Lambda \rho_i^S \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^N}}{l^N \rho_i^N \sqrt{k_i^N} + l_N^S \rho_i \sqrt{k_i}} (k_i^N - k_i). \end{array} \right.$$

Posons pour finir :

$$\left\{ \begin{array}{l} CO = S^O \frac{\Lambda \rho_i^O \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^O}}{l^O \rho_i^O \sqrt{k_i^O} + l_O^E \rho_i \sqrt{k_i}}, \\ CE = S^E \frac{\Lambda \rho_i^E \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^E}}{l^E \rho_i^E \sqrt{k_i^E} + l_E^O \rho_i \sqrt{k_i}}, \\ CS = S^S \frac{\Lambda \rho_i^S \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^S}}{l^S \rho_i^S \sqrt{k_i^S} + l_S^N \rho_i \sqrt{k_i}}, \\ CN = S^N \frac{\Lambda \rho_i^S \rho_i \sqrt{k_i} \sqrt{k_i^N}}{l^N \rho_i^N \sqrt{k_i^N} + l_N^S \rho_i \sqrt{k_i}}. \end{array} \right.$$

CO, CE, CS, CN sont les termes de conduction non linéaire ouest, est, sud et nord relatifs à la maille Q_i , ils dépendent de la géométrie et de k . Compte tenu de ces notations, le terme de diffusion prend la forme suivante :

$$(5.10) \quad \int_{\partial Q_i} \Phi \cdot ndS = - [CN (k_i^N - k_i) - CS (k_i - k_i^S) + CE (k_i^E - k_i) - CO (k_i - k_i^O)].$$

5.2.3 Système différentiel

Finalement, en rassemblant les résultats (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) et (5.10) nous obtenons :

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_i \frac{dk_i}{dt} + \frac{2}{3} m_i k_i \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dt} \\ - [CN (k_i^N - k_i) - CS (k_i - k_i^S) + CE (k_i^E - k_i) - CO (k_i - k_i^O)] \\ + m_i c k_i^{\frac{3}{2}} - m_i d_i k_i^{\frac{1}{2}} = 0. \end{array} \right.$$

On remarque que le calcul de la valeur de k dans la maille k au cours du temps dépend des 5 valeurs suivantes : $k_i, k_i^E, k_i^O, k_i^N, k_i^S$, d'où l'appellation de schéma à 5 points pour ce type de discrétisation. Si I désigne le nombre de mailles, $\{k_i(t)\}$, pour $i = 1..I$ est solution d'un système différentiel non linéaire de taille I , dont la i ème ligne est donné par (5.11).

Soient D la matrice de dimension I et $\{k\}$ le vecteur de dimension I définis par :

$$\{k\} = (k_1, \dots, k_i, \dots, k_I)^T,$$

$$(D\{k\})_i = - [CN (k_i^N - k_i) - CS (k_i - k_i^S) + CE (k_i^E - k_i) - CO (k_i - k_i^O)];$$

D est une matrice creuse à structure pentadiagonale, pour la i ème ligne il y a cinq coefficients non nuls : le coefficient diagonal vaut $CO + CE + CN + CS$ et les termes extradiagonaux valent $-CO, -CE, -CS$ et $-CN$. C'est une matrice symétrique semi-définie positive. Les conditions aux limites étant de type Neumann homogènes, elles n'affectent pas la forme de la matrice D . Ainsi D est singulière, on constate aisément que $(1, \dots, 1)^T$ est vecteur propre de D associé à la valeur propre 0. Ceci ne pose pas de problème car lors de la discrétisation temporelle, le terme instationnaire va venir renforcer la diagonale.

5.3 Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps on utilise le schéma présenté dans la section (4.4). On travaille sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t]$. Pour $i = 1..I$ on note $k_i^0 = k_i(0)$, $V_i^0 = V_i(0)$, $k_i = k_i(\Delta t)$ et $V_i = V_i(\Delta t)$. Les valeurs des volumes en début et en fin de pas de temps sont fournies par l'hydrodynamique, il en va de même pour le terme de production d_i . k_i est solution d'un système non linéaire dont la i ème ligne s'écrit :

$$(5.12) \quad \begin{cases} m_i(k_i - k_i^0) + \frac{2}{3}m_i k_i \frac{V_i - V_i^0}{V_i^0} \\ - \Delta t [CN (k_i^N - k_i) - CS (k_i - k_i^S) + CE (k_i^E - k_i) - CO (k_i - k_i^O)] \\ + \Delta t m_i c k_i^{\frac{3}{2}} - \frac{\Delta t}{2} m_i d_i (\sqrt{k_i} + \sqrt{k_i^0}) = 0. \end{cases}$$

Conformément à la méthode présentée en section (4.4) nous avons discrétisé le terme de diffusion et le terme de dissipation de manière implicite, le terme de production quant à lui est discrétisé de façon semi-implicite. Pour le terme relatif au travail de la pression turbulente, nous avons opté pour une discrétisation implicite. L'équation (5.12) est non linéaire du fait des termes de production, dissipation et diffusion (CN, CS, CO et CE sont fonctions de $\sqrt{k_i}$). On met en place un processus itératif de type point fixe, à l'étape $q+1$, on suppose k_i^q connu, alors k_i^{q+1} est solution d'un système linéaire dont la i ème ligne s'écrit :

$$(5.13) \quad \begin{cases} m_i(k_i^{q+1} - k_i^0) + \frac{2}{3}m_i k_i^{q+1} \frac{V_i - V_i^0}{V_i^0} \\ - \Delta t [CN^q (k_i^{N, q+1} - k_i^{q+1}) - CS^q (k_i^{q+1} - k_i^{S, q+1}) \\ + CE^q (k_i^{E, q+1} - k_i^{q+1}) - CO^q (k_i^{q+1} - k_i^{O, q+1})] \\ + \Delta t m_i c \sqrt{k_i^q} k_i^{q+1} - \frac{\Delta t}{2} m_i d_i (\sqrt{k_i^q} + \sqrt{k_i^0}) = 0. \end{cases}$$

Comme en géométrie monodimensionnelle, pour assurer la propagation de l'interface, l'initialisation du point fixe doit être perturbée pour les mailles au delà du front. On

rappelle la procédure d'initialisation :

$$\begin{cases} k_i^* = k_i^0, & \text{pour } k_i^0 > 0; \\ k_i^* = \delta, & \text{pour } k_i^0 = 0. \end{cases}$$

où δ le paramètre de perturbation est défini par :

$$\delta = \text{coef} * \min_{i=1..I} \{k_i^0 > 0\},$$

où $\text{coef} \in]0, 1[$. Afin d'éviter une propagation trop rapide du front, il convient de tronquer les valeurs de k dans les mailles perturbées au delà du front. La méthode de troncature utilisée est la même que celle développée en 1D. On se reportera donc à la section (4.4) pour sa description.

6 Conclusion et perspectives

L'étude menée dans ce rapport a permis de mettre au point un schéma numérique pour l'équation d'énergie cinétique turbulente dans le cadre d'un modèle de turbulence à une équation. Ce schéma basé sur une méthode de troncature originale, restitue correctement la propagation du front turbulent pour des cas tests analytiques représentatifs. On peut donc considérer qu'il est validé d'un point de vue numérique. Cependant, il est susceptible d'être amélioré, notamment en ce qui concerne la calibration du paramètre de troncature τ . Soulignons également l'absence de résultats théoriques sur la consistance et la convergence du schéma. Ces points pourront faire l'objet d'une étude ultérieure.

Nous avons également fourni l'extension bidimensionnelle de ce schéma. Celle-ci ne présente a priori aucune difficulté majeure. Sa validation numérique n'a pas été effectuée, elle le sera dans un prochain rapport.

Cette étude est un point de départ pour aborder des problèmes plus complexes. En adoptant la même méthodologie (équations modèles, recherche de solutions analytiques représentatives), on peut raisonnablement envisager de mettre au point un schéma numérique pour un modèle de type $k-\varepsilon$ qui garantisse une bonne restitution de la propagation du front turbulent. Un travail sur ce sujet est en cours et il sera publié prochainement (cf. [18]).

Références

- [1] D. G. ARONSON *Regularity properties of flows through porous media* SIAM J. Appl. Math. Vol. 17, No 2, 1969.
- [2] G. I. BARENBLATT *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1996.
- [3] M. BERTSCH, R. KERSNER, L. A. PELETIER *Positivity versus localisation in degenerate diffusion equations* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 9, No 9, pp. 987-1008, 1985.
- [4] P. BONNEMASON *Communication personnelle*.
- [5] C.J. BUDD, G.J. COLLINS *An invariant moving mesh scheme for the non linear diffusion equation* Applied Numerical Mathematics 26 (1998) 23-29.
- [6] J. COUSTEIX *Turbulence et couche limite* Cours de l'E.N.S.A.E. 1992.
- [7] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT *Analyse numérique des équations différentielles* Masson, Paris 1983.
- [8] A. FAVRE et al. *La turbulence en mécanique des fluides* Gauthier-Villars, Paris 1976.
- [9] V. A. GALAKTIONOV, S. A. POSASHKOV *Exact solutions and invariant spaces for non linear gradient diffusion equations* Comp. Maths Math. Phys., Vol. 34, No 3, pp. 313-321, 1994.
- [10] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN *Finite volume methods* Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet, J.L. Lions editors, Vol 7, 2001.
- [11] S. GAUTHIER, M. BONNET *A k- ϵ model for turbulent mixing in shock tube flows induced by Rayleigh Taylor instability* Phys. Fluids A2 1685 ,1990.
- [12] P. GERMAIN *Mécanique des milieux continus* Masson, 1962.
- [13] M. A. HERRERO, J. L. VASQUEZ *The one dimensionnal non linear heat equation with absorption: regularity of solutions and interfaces* SIAM Journal of Mathematical Analysis, vol 18, pp 149-167, 1987.
- [14] J. KACUR, A. HANDLOVICOVA, M. KACUROVA *Solution of non linear diffusion problems by linear approximations schemes* SIAM Journal of Numerical Analysis, vol 30, pp 1703-1722, 1993.
- [15] S. KAMENOMOSTSKAYA *The asymptotic behaviour of the solution of the filtration equation* Israel J. Math. , Vol. 14, pp. 77-87, 1973.
- [16] L. LANDAU, E. LIFCHITZ *Mécanique des fluides* Éditions MIR, 1989.
- [17] J. D. LOGAN *An introduction to non linear partial differential equations* John Wiley and Sons, 1994.

- [18] P.-H. MAIRE *Une famille de solutions analytiques pour le modèle $k - \epsilon$ sans dissipation par une méthode de séparation des variables* à paraître en 2001.
- [19] G. MEURANT *Résolution de l'équation d'énergie dans l'approximation de la diffusion Rosseland* Rapport interne DAM/CEL-V/DS/SMA/SEM DO 278 du 25/02/84.
- [20] K. MIKULA *Numerical solution of non linear diffusion with finite extinction phenomenon* Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXIV, 2(1995), pp 173-184.
- [21] J. D. MURRAY *Mathematical Biology* Biomathematics Texts, Springer, 1993.
- [22] P. A. RAVIART, J. M. THOMAS *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles* Masson, Paris 1988.
- [23] P. ROSENAU, S. KAMIN *Thermal waves in an absorbing and convecting medium* Physica 8D pp. 273-283, 1983.
- [24] Y. B. ZEL'DOVICH, Y. P. RAIZER *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Vol. 2* Academic Press, 1967.

