



**HAL**  
open science

## Écaillage Ductile Dynamique: extension élasto-viscoplastique du modèle de Gurson

Olivier Arnould, Christophe Denoual, Jean-Marc Diani, Yves-Patrick  
Pellegrini

► **To cite this version:**

Olivier Arnould, Christophe Denoual, Jean-Marc Diani, Yves-Patrick Pellegrini. Écaillage Ductile Dynamique: extension élasto-viscoplastique du modèle de Gurson. Matériaux 2002, Oct 2002, Tours, France. cea-00413010

**HAL Id: cea-00413010**

**<https://cea.hal.science/cea-00413010v1>**

Submitted on 2 Sep 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Ecaillage ductile dynamique

## Extension élasto-viscoplastique du modèle de Gurson

**Olivier Arnould<sup>1</sup> – Christophe Denoual<sup>2</sup> – Jean-Marc Diani<sup>2</sup> – Yves-Patrick Pellegrini<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>LMT Cachan

ENS Cachan/CNRS UMR 8535/Université Pierre et Marie Curie-Paris VI

61, avenue du Président Wilson

94235 Cachan Cedex – France

Tél. : 33(0)1 47 40 22 42 / Fax. : 33(0)1 47 40 22 40 / E-mail. : [arnould@lmt.ens-cachan.fr](mailto:arnould@lmt.ens-cachan.fr)

<sup>2</sup>CEA-DIF

Département de Physique Théorique et Appliquée

B.P. 12

91680 Bruyères-le-Châtel – France

Tél. : 33(0)1 69 26 79 03 / Fax. : 33(0)1 69 26 70 77 / E-mail. : [Yves-Patrick.Pellegrini@cea.fr](mailto:Yves-Patrick.Pellegrini@cea.fr)

---

*RÉSUMÉ. Au cours d'expériences d'impact de plaques métalliques, la cible subit un endommagement ductile par nucléation, croissance et coalescence de pores pouvant conduire à sa rupture par écaillage. Ce phénomène est simulé dans des calculs hydrodynamiques par éléments finis grâce à un modèle d'endommagement ductile reposant sur une extension récente du modèle de Gurson aux matériaux viscoplastiques de Bingham. Les modules d'élasticité du matériau poreux sont obtenus à l'aide d'une procédure d'homogénéisation similaire à celle utilisée pour le comportement viscoplastique. Cela assure la cohérence du comportement élasto-viscoplastique macroscopique. L'implantation numérique du modèle est effectuée en grandes transformations au moyen d'un schéma implicite dans un cadre hypoélastique. Ses performances et ses limitations, ainsi que son implantation, sont évaluées par comparaison avec des résultats expérimentaux d'essais d'écaillage par impact de plaques et par impact laser sur des cibles en cuivre, en aluminium et en tantale.*

*MOTS-CLÉS : écaillage dynamique ductile, modèle de Gurson, élasto-viscoplastique, grandes transformations.*

---

## 1. Introduction

Il a été montré, qu'au cours d'essais d'impact de plaques, les matériaux constitutifs s'endommagent et qu'il peut y avoir formation d'une écaille. Pour les matériaux ductiles, cet endommagement est issu de la nucléation (par cavitation ou par rupture d'inclusions) de pores (dont la fraction volumique joue le rôle de variable d'endommagement) qui croissent principalement par déformation plastique jusqu'à coalescer pour former une fissure.

Le modèle de Johnson (1981) reproduit bien cet effet dans un cadre théorique où la croissance des pores n'est liée qu'à une pression moyenne dans l'élément de volume considéré sans considérer l'effet d'un chargement déviatorique moyen. Cette situation se rencontre en pratique au cours d'un impact de plaques pour les temps avancés de l'écailage d'où la qualité des simulations obtenues avec ce type de modèle. Néanmoins, cette modélisation suppose un découplage entre les seuils plastiques macroscopiques de la partie déviatorique et hydrostatique. Or, il est clairement établi que le critère plastique macroscopique réel des matériaux poreux consiste en une condition simultanée sur (au moins) les deux premiers invariants scalaires du tenseur des contraintes. Le modèle le plus connu est celui de Gurson (1977) qui repose sur un comportement microscopique de matériau rigide-parfaitement plastique formant une sphère creuse de porosité équivalente  $f$ . La surface de plasticité est alors décrite par l'équation

$$F(\Sigma) = (\Sigma^{eq}/Y_0)^2 + 2f \cosh(3\Sigma^m/2Y_0) - (1 + f^2), \quad [1]$$

où  $Y_0$  représente la limite élastique microscopique et où le tenseur des contraintes  $\Sigma$  est réduit à ses deux invariants, *i.e.*,

$$\Sigma = \Sigma^m \mathbf{1} + (2/3)\Sigma^{eq}\hat{\Sigma}', \quad [2]$$

où  $\hat{\Sigma}'$  est le tenseur directionnel déviatorique. Ce modèle a subi de nombreuses évolutions afin de mieux rendre compte de phénomènes microscopiques comme la coalescence, l'anisotropie plastique ou encore des formes non sphériques de vide. D'autres travaux ont visé l'amélioration de son comportement lors de chargements à faible triaxialité (Tvergaard, 1990). Enfin, contrairement au modèle de Johnson, ce modèle ne permet pas de rendre compte des effets de viscosité qui sont extrêmement importants pour les impacts. Le modèle de Johnson repose sur une loi de comportement visqueuse simplifiée. En effet le comportement microscopique y est représenté par un modèle de Bingham associé à un critère de von Mises

$$\sigma^{eq} = Y_0 + 3\eta_0 d_p^{eq}, \quad [3]$$

où  $\eta_0$  représente la viscosité microscopique (linéaire) et  $d_p^{eq}$  le taux de déformation plastique microscopique équivalent. Cette loi, malgré ces limitations, par rapport au modèle de Norton par exemple, a l'avantage de n'être active que lorsque la contrainte déviatorique excède un certain seuil (compatible avec les mécanismes microscopiques de plasticité par mouvement de dislocations). Ainsi, elle est susceptible d'être utilisée tant en régime de grands taux de déformation qu'en régime quasi-statique. De plus, cette loi exprime les effets de viscosité à l'aide d'un terme au contenu physique clair et les modèles macroscopiques qui en dérivent sont plus efficaces (en temps) car plus simple d'implantation numérique (ce qui est primordial lors de simulations d'impacts avec un code hydrodynamique).

Les considérations précédentes nous ont poussé à utiliser une extension viscoplastique du modèle de Gurson par une loi de Bingham en insistant sur un traitement des effets élastiques linéaires compatibles avec toutes les hypothèses qui sont utilisées dans l'homogénéisation « à la Gurson » afin de travailler dans un cadre d'approximation bien contrôlé et cohérent.

## 2. Modèle d'endommagement ductile élasto-viscoplastique

L'extension du modèle de Gurson au cadre viscoplastique de Bingham a été réalisée par Perrin (1997). La démarche adoptée repose sur une approche classique de Hill basée sur la donnée du potentiel de dissipation microscopique (sans tenir compte de son couplage dynamique avec le potentiel élastique *via* les équations d'évolution). La méthode conduisant à la formule de Gurson repose sur la considération d'une classe restreinte de champs de vitesse d'écoulement plastique (incompressible). A champs de vitesse fixé, le potentiel de dissipation macroscopique s'obtient par simple moyenne volumique qui nécessite l'utilisation d'un majorant (Leblond *et al.*, 1994). En introduisant les viscosités effectives hydrostatique et déviatorique

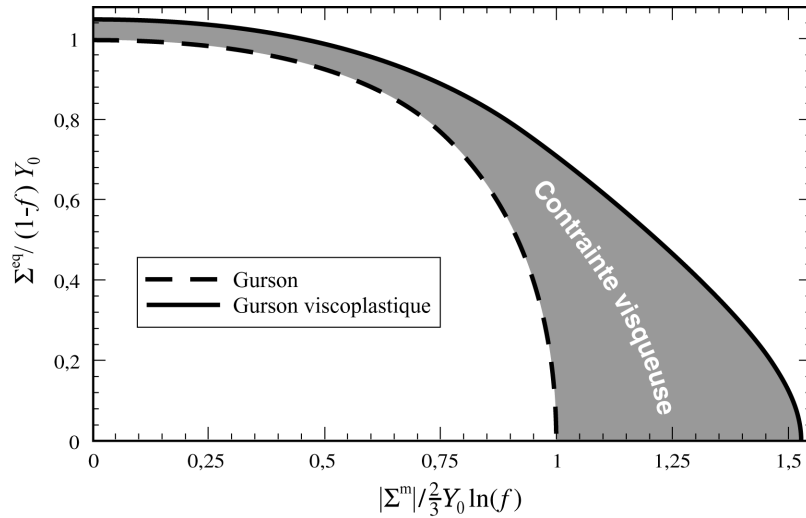
$$\zeta = 4(1-f)\eta_0/3f ; \eta = (1-f)\eta_0, \quad [4]$$

le potentiel viscoplastique macroscopique s'écrit à l'aide des deux relations issues de la loi de normalité

$$\Sigma^m = \overbrace{4(1-f)\eta_0 D_p^m / f}^{\text{partie visqueuse}} + 2Y_0/3 [\text{arcsh}(\lambda/f) - \text{arcsh}(\lambda)], \quad [5]$$

$$\Sigma^{\text{eq}} = \overbrace{3(1-f)\eta_0 D_p^{\text{eq}}}^{\text{partie visqueuse}} + Y_0 \left[ \sqrt{1+\lambda^2} - \sqrt{f^2+\lambda^2} \right], \quad [6]$$

où  $\lambda = 2D_p^m/D_p^{\text{eq}}$  représente une triaxialité du taux de déformation. La partie gauche dans les équations [5] et [6] représente la contribution visqueuse aux contraintes. Poser  $\eta_0=0$  dans ces termes et éliminer  $\lambda$  entre les deux équations restantes conduit à l'équation de la surface de plasticité de Gurson (Eq. [1]). Le seuil de plasticité du modèle viscoplastique est celui du modèle de Gurson (Fig. 1).



**Figure 1.** Surface de (visco)plasticité pour une porosité  $f$  de 0,04. Comparaison de la surface de plasticité de Gurson et du lieu des contraintes du modèle viscoplastique pour  $3\eta_0|D_p|/Y_0 = 0,05$  où  $|D_p| = (D_p^{\text{eq}2} + 2D_p^m)^{1/2}$ . La différence entre les deux courbes traduit la partie visqueuse des contraintes des équations [5] et [6].

Les modules d'élasticité effectifs sont obtenus en calculant les modules macroscopiques de la sphère creuse utilisée pour l'homogénéisation du comportement non-linéaire avec une approximation compatible au calcul précédent. Cela répond à une nécessité logique. En effet, le tenseur de viscosité effectif obtenu précédemment à travers l'homogénéisation « à la Gurson » de la loi de Bingham microscopique (Eq. [4]) a pour seule origine la partie quadratique du potentiel plastique microscopique. Cette partie correspond à un comportement d'écoulement plastique linéaire comparable à la loi d'élasticité linéaire. Il en découle les modules effectifs de compressibilité et de cisaillement

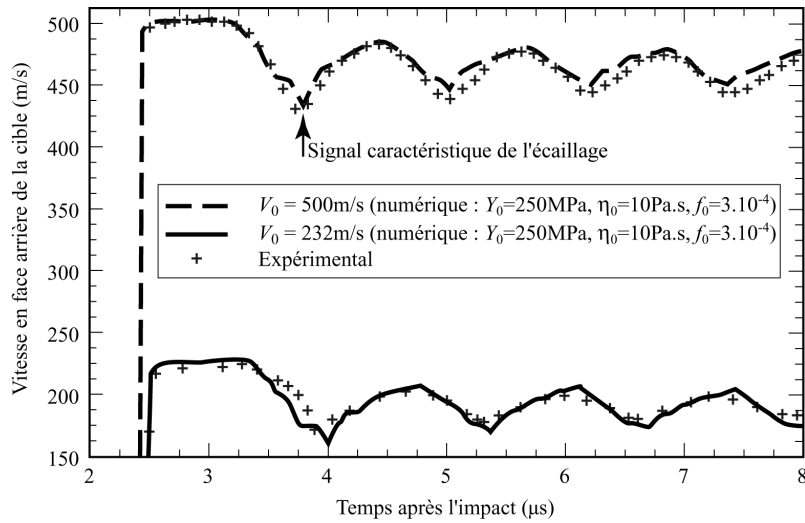
$$K = (1-f)K_0/(1 + (3/4)(K_0/\mu_0)f) ; \mu = (1-f)\mu_0, \quad [7]$$

où  $K_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement les modules d'élasticité (isotrope) de compressibilité et de cisaillement microscopiques. Le module de compressibilité macroscopique ainsi déterminé est « exact » comme il est possible de le constater en résolvant les équations d'élasticité en chargement purement hydrostatique (Mackenzie, 1950). On retrouve ici le défaut du modèle de Gurson pour le comportement déviatorique car le module de cisaillement ainsi obtenu correspond à la borne supérieure de Voigt.. Dans le cadre d'une simulation d'impact rapide, le module de compressibilité dépend de la pression. Il est alors nécessaire d'introduire une équation d'état homogénéisée pour calculer la pression macroscopique à la place de la loi de comportement élastique. Enfin, la loi d'évolution de la porosité est obtenue classiquement en négligeant la contribution de l'élasticité

$$\dot{f} = 3(1-f)D_p^m. \quad [8]$$

Cette équation traduit l'incompressibilité de la déformation plastique. Elle doit être complétée par un accélérateur de porosité. En effet, l'utilisation phénoménologique d'un accélérateur est motivée par la constatation que les propriétés mécaniques du matériau effectif se dégradent rapidement lorsque les pores coalescent. Ainsi on remplace empiriquement (Tvergaard, 1990), dans le modèle précédent, la porosité réelle  $f$  par une porosité « effective »  $f^*(f)$  (sauf dans l'équation [8]). Cette nouvelle porosité contient un seuil en dessous duquel  $f^*=f$ . A partir de ce seuil, la porosité effective évolue plus vite que la porosité réelle pour atteindre la valeur critique de 1 lorsque  $f=f_c$ . En pratique, cette forme linéaire par morceaux est adoucie (surtout pour des simulations avec un code hydrodynamique rapide) aux porosités de transition. Il faut noter ici que la nucléation de la porosité est prise en compte uniquement par la présence d'une porosité initiale  $f_0$ .

### 3. Implantation numérique en grandes transformations et validations



**Figure 2.** Essai d'impact de plaques cuivre/cuivre pour deux vitesses initiales  $V_0$  de l'impacteur. Evolution de la vitesse en face arrière de la cible en fonction du temps. L'écaillage de la cible a eu lieu dans les deux cas.

L'implantation numérique du modèle de comportement décrit plus haut est effectuée dans le cadre des grandes transformations dans un code hydrodynamique rapide. Le code gère l'aspect dynamique dans un cadre lagrangien et fournit en entrée le taux de déformation total macroscopique. L'implantation numérique décrite succinctement ci-après se charge de calculer l'incrément de contraintes et de porosité sur un pas de temps. L'aspect grandes transformations est prise en compte en utilisant la dérivée objective de Jaumann (notée  $\nabla$ ) et une approximation hypoélastique pour le comportement élastique. La partition élastique/plastique des déformations ayant été effectuée dans le cadre des petites déformations, on utilise les « quantités tournées » (Besson *et al.*, 2001)

$$\bar{D} = r^t \cdot D \cdot r ; \bar{\Sigma} = r^t \cdot (\mathcal{J}\Sigma) \cdot r ; \dot{\bar{\Sigma}} = r^t \cdot (\overset{\nabla}{\mathcal{J}}\Sigma) \cdot r, \quad [9]$$

où  $\mathcal{J}$  est le jacobien de la transformation entre la configuration initiale et la configuration déformée,  $r$  la rotation du corotationnel défini par l'équation différentielle  $\dot{r} = w$   $w$  ec la partie antisymétrique du gradient eulérien du champs des vitesses (ou taux de rotation). Le problème numérique revient alors aux équations précédentes dans lesquelles toutes les quantités sont remplacées par les quantités tournées. L'algorithme utilisé repose sur une méthode implicite classique (Aravas, 1987) avec décomposition du tenseur des contraintes sous la forme de l'équation [2]. Un estimateur élastique des contraintes est utilisé dans un premier temps pour savoir s'il y a ou non écoulement viscoplastique. Le traitement de l'écoulement viscoplastique est à notre connaissance original. En effet, l'ensemble des équations [5], [6] et la loi hypoélastique écrite sous la forme

$$(\bar{\Sigma}^m/K) = 3(D^m - D_p^m) ; \left| \bar{\Sigma}^{eq}/\mu \right| = 3(\bar{D}^{eq} - \bar{D}_p^{eq}), \quad [10]$$

permet d'écrire, de façon incrémental, deux équations ne dépendant que des variables  $\lambda$  et  $f$  qui sont résolues simultanément à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson. Ceci permet de résoudre entièrement le problème si le tenseur directionnel du déviateur des contraintes [2] est connu. Celui-ci peut être pris parallèle à la partie déviatorique de l'estimateur élastique (Lush *et al.*, 1989). Il est important de noter qu'un traitement spécifique

des problèmes de non-recompaction en dessous de la porosité initiale  $f_0$  est nécessaire. Un exemple de résultats de simulations d'impact de plaques cuivre/cuivre est donné sur la figure 2. Celle-ci représente la vitesse en face arrière de la cible en fonction du temps après impact obtenue numériquement et expérimentalement. Les paramètres des matériaux ( $Y_0$ ,  $f_0$  et  $\eta_0$ , les modules d'élasticité étant connus) ont été obtenus en ajustant les résultats numériques sur les points expérimentaux. Les valeurs obtenues semblent physiquement cohérentes. Il est important de noter que la limite élastique obtenue pour le cuivre correspond principalement à celle résultant du passage de la première onde de compression. Enfin, ces paramètres ont été utilisés de façon satisfaisante pour simuler des impacts laser sur du cuivre (vitesse de déformation plus grande que lors des impacts de plaques), ce qui permet de valider l'emploi d'un modèle de viscosité linéaire malgré son utilisation pour une gamme de vitesse de sollicitation étendue à  $\eta_0$  fixé. Ces mêmes paramètres ont de plus permis de simuler des essais d'écaillage-recompaction. Des résultats équivalents ont été obtenus avec de l'aluminium et du tantale.

#### 4. Conclusions

La simulation de l'écaillage ductile dynamique dans un code hydrodynamique est obtenue à l'aide d'une extension du modèle de Gurson au comportement viscoplastique de Bingham. Cette extension est complétée par une loi de comportement élastique obtenue avec une homogénéisation similaire à celle utilisée pour le comportement viscoplastique. Ainsi, le modèle macroscopique élasto-viscoplastique obtenu est cohérent. L'implantation numérique est effectuée en grandes transformations avec un algorithme implicite original. Les résultats obtenus avec des coefficients microscopiques des matériaux ajustés sur deux essais d'impacts de plaques permettent aussi de simuler des impacts lasers pour différents types de matériaux métalliques. Néanmoins, l'homogénéisation obtenue ne rend pas bien compte du comportement déviatorique. Elle pourrait être améliorée en modifiant de façon similaire les modules d'élasticité et les coefficients de viscosité effectifs avec les formules de Mackenzie par exemple (Mackenzie, 1950). De plus, il est expérimentalement constaté que les matériaux s'échauffent au cours de l'impact. L'élévation de température consécutive entraîne un adoucissement des propriétés mécaniques. Cet aspect est en cours d'intégration. Enfin, il est nécessaire d'évaluer l'importance des effets d'inertie à l'échelle microscopique et le moyen d'en tenir compte à l'échelle macroscopique par l'intégration d'une longueur interne par exemple (Tong *et al.*, 1995).

**Remerciements.** Les auteurs souhaitent remercier Prof. Hild F. du LMT Cachan pour sa lecture attentive du manuscrit.

#### 5. Bibliographie

- Aravas N., « On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models », *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, 1987, p. 1395-1416.
- Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.L., Forest S., *Mécanique non-linéaire des matériaux*, Hermès Science Publications, Paris, 2001.
- Gurson A.L., « Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile material », *Journal of Engineering Material and Technology*, vol. 99, 1977, p. 2-15.
- Johnson J.N., « Dynamic fracture and spallation in ductile solids », *Journal of Applied Physics*, vol. 52(4), 1981, p. 2812-2825.
- Leblond J.B., Perrin G., Suquet P., « Exact results and approximate model for porous viscoplastic solids », *International Journal of Plasticity*, vol. 10(3), 1994, p. 213-235.
- Lush A.M., Weber G., Anand, L., « An implicit time-integration procedure for a set of internal variable constitutive equations for isotropic elasto-viscoplasticity », *International Journal of Plasticity*, vol. 5, 1989, p. 521-549.
- Mackenzie J.H., « The elastic constants of a solid containing spherical holes », *Proceedings of the Physical Society*, vol. B63, 1950, p. 2-11.
- Perrin G., communication personnelle, 1997. « Homogenized behaviour equations for a porous Bingham viscoplastic material », *Journal of Engineering Material*, 2001, soumis.
- Tong W., Ravichandran G., « Inertial effects on void growth in porous viscoplastic material », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 62, 1995, p. 633-639.
- Tvergaard V., « Material failure by void growth to coalescence », *Advanced in Applied Mechanics*, vol. 27, 1990, p. 23-151.