



HAL
open science

INTERACTIONS A LONGUE PORTEE ET SYSTEMES NON EXTENSIFS

Jacques Villain

► **To cite this version:**

Jacques Villain. INTERACTIONS A LONGUE PORTEE ET SYSTEMES NON EXTENSIFS.
Jahrbuch für Computerphilologie, 2008, 7, pp.10. cea-00255028

HAL Id: cea-00255028

<https://cea.hal.science/cea-00255028>

Submitted on 13 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INTERACTIONS A LONGUE PORTEE ET SYSTEMES NON EXTENSIFS

Jacques Villain, 14 décembre 2007

Résumé. Si des interactions à longue portée sont présentes dans un milieu, certaines lois classiques de la thermodynamique peuvent être violées. Par exemple, l'énergie n'est plus proportionnelle, à densité constante, au nombre de particules. Plus grave, certains états instables à l'équilibre avec un thermostat (situation « canonique ») peuvent devenir stables pour un système isolé (situation « microcanonique »). A l'équilibre microcanonique, la capacité calorifique peut devenir négative. Nous analysons brièvement ces paradoxes en termes simples à l'usage du non-spécialiste.

1. Introduction

« L'énergie U et l'entropie S sont additives ; ceci veut dire que lorsque le nombre de particules N varie, U et S sont proportionnelles à N . » C'est essentiellement ce qu'on lit, par exemple, au § 24 du traité de Landau et Lifshitz (1967).

Or il n'y a pas additivité (ou « extensivité ») pour des interactions à longue portée¹ telles que les interactions gravitationnelles. Les progrès récents de l'astronomie ont provoqué un renouveau d'intérêt pour la mécanique statistique non extensive (Dauxois et al. 2002). Mais on connaît depuis longtemps (Weizsäcker 1935) la non-extensivité dans le noyau, due aux forces coulombiennes dans le noyau atomique².

Si des interactions à longue portée sont présentes, il peut arriver que certains concepts fondamentaux soient en défaut. Ainsi la capacité calorifique peut-elle (dans des conditions très particulières) devenir négative (Thirring 1970). Le présent article s'efforce de trier l'essentiel de ce qui reste valable dans la thermodynamique de nos manuels, et ce qui doit être revu quand les interactions sont à longue portée. Nous choisirons la simplicité du raisonnement au détriment de la rigueur et nous utiliserons des modèles non physiques quand ils peuvent aider à la compréhension des mécanismes.

2. Concepts fondamentaux de la mécanique statistique.

Ces concepts exposés dans les manuels (Reif 1994) seront rappelés brièvement ici dans le cas d'un système physique ayant un volume V donné, un nombre de particules N donné et (conformément aux règles de la mécanique quantique) des états discrets i d'énergie E_i . La mécanique statistique repose sur une expression de la probabilité p_i que ce système soit dans l'état i . Pour un tel système, il existe deux expressions classiques de p_i correspondant à deux conditions différentes. L'une correspond à un système isolé dont l'énergie E est fixée. C'est la distribution microcanonique. Elle postule que les $g(E)$ états d'énergie E sont également probables (hypothèse ergodique). Par conséquent

$$p_i = 1/g(E_i) \text{ si } E_i = E \quad ; \quad p_i = 0 \text{ si } E_i \neq E \quad (1)$$

L'autre distribution est valable pour un système en équilibre avec un très grand système (thermostat) avec lequel il a un très faible contact thermique. C'est la distribution canonique

$$p_i = \exp(-\beta E_i) / \sum_j \exp(-\beta E_j) \quad (2)$$

où $\beta = 1/(k_B T)$, T est la température du thermostat, et k_B la constante de Boltzmann.

A partir de (1) ou (2), on peut en principe calculer les fonctions thermodynamiques si on connaît les interactions, c'est à dire le hamiltonien. Les physiciens de la matière condensée préfèrent utiliser la distribution canonique (2). Les astrophysiciens ne l'aiment guère, car leurs énormes objets seraient bien en peine de trouver un thermostat. Mais les deux distributions sont souvent équivalentes, comme nous allons le voir.

3. Du canonique au microcanonique et vice versa (interactions à portée finie).

De (2) on peut déduire la valeur moyenne canonique $\langle X \rangle_c(T)$ d'une quantité X qui prend la valeur X_i dans l'état i :

$$\langle X \rangle_c = \frac{\sum_i X_i \exp(-\beta E_i)}{\sum_i \exp(-\beta E_i)} \quad (3a)$$

C'est une fonction continue de T pour tout système fini. En faisant $X_i = E_i$, dans (3a), on montre assez facilement que l'énergie interne canonique $U = \langle X \rangle_c$ est une fonction croissante de la température T . Par suite la capacité calorifique $C = dU/dT$ est positive.

Pour un grand système, on peut récrire les sommes dans (3a) comme des intégrales sur l'énergie, dans lesquelles apparaît la valeur moyenne microcanonique $\langle X \rangle_{mc}$:

$$\langle X \rangle_c = \frac{\int \langle X \rangle_{mc} e^{S(E)/k_B - \beta E} dE}{\int e^{S(E)/k_B - \beta E} dE} = \frac{\int \langle X \rangle_{mc} e^{-\beta F(E)} dE}{\int e^{-\beta F(E)} dE} \quad (3b)$$

où $\exp[S(E)/k_B]$ est la densité d'états (à un facteur de normalisation δE près) ce qui définit l'entropie $S(E)$. En général l'exponentielle $\exp[-\beta F(E)]$ a un maximum très aigu pour une valeur unique E_M , et (3b) se réduit à $\langle X \rangle_{mc}(E_M)$. Les distributions canonique et microcanonique sont équivalentes. Les quantités qui apparaissent naturellement sont l'énergie libre $F = E - TS$ et la température T dans le premier cas, l'énergie interne U et l'entropie S dans le second, mais le changement de variables est sans problème puisque $T = dU/dS$ et $F = U - TS$. Il peut toutefois arriver que $\exp[-\beta F(E)]$ n'ait pas un, mais deux maxima aigu. Cela arrive quand il a une transition d'une phase 1 d'énergie U_1 à une phase 2 d'énergie U_2 , à une certaine température T_c . Un exemple est donné par un fluide qui subit la liquéfaction ou la vaporisation à pression constante ; il faut alors modifier un peu les formules, faisant notamment apparaître dans l'exposant de (3b) l'enthalpie libre $E - TS + PV$ au lieu de l'enthalpie libre $E - TS$. Rappelons que le refroidissement du fluide à volume constant mène à la coexistence de deux phases dans un intervalle fini de température, sans discontinuité de l'énergie ou d'autres quantités. Nous introduirons plus loin un modèle artificiel qui a une transition du premier ordre à volume constant.

C'est donc une transition du premier ordre à volume constant, avec discontinuité de l'énergie U_1 à U_2 , que nous allons désormais considérer. Dans la statistique canonique, cette discontinuité n'existe qu'à la limite $N \rightarrow \infty$, puisque (3a) est une fonction continue de T pour N fini. La limite de la fonction $T(U)$ est une fonction continue, non décroissante, avec un palier à T_c entre U_1 et U_2 (Fig. 1). Ceci est vrai pour la distribution canonique, avec des interactions à courte ou à longue portée.

Tout ce qui est dit jusqu'ici est, sur le fond, en accord avec les manuels, même si ce n'y est pas toujours écrit explicitement et si la forme peut être différente. Ainsi la positivité de la capacité calorifique est-elle démontrée par Landau & Lifshitz sans passer par la formule de Gibbs (2), mais en utilisant seulement l'équilibre avec le « milieu extérieur » que nous avons appelé « thermostat ». Si maintenant on veut traiter une transition du premier ordre avec discontinuité d'énergie dans le cas *microcanonique*, l'aide des manuels n'est plus très efficace, surtout dans le cas d'interactions à longue portée. Nous rappellerons d'abord le cas des interactions à *courte portée*, auxquelles est consacré le reste de ce paragraphe. Il est facile de voir que dans la limite $N \rightarrow \infty$, la fonction $T(U)$ dans le cas microcanonique est alors la même que dans le cas canonique, avec une partie horizontale entre U_1 et U_2 (Fig. 1). La chaleur spécifique est également la même, donc positive. Plus généralement, la plupart des manuels considèrent explicitement ou implicitement que les distributions canonique et

microcanonique sont équivalentes pour des interactions à courte portée, au moins dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Il y a pourtant une différence, qui dans le cas d'interactions à longue distance aura des conséquences capitales. Dans le cas canonique, les énergies comprises entre U_1 et U_2 sont interdites pour un grand système. Au contraire on peut imposer à l'énergie d'un système isolé (microcanonique) n'importe quelle valeur comprise entre U_1 et U_2 en le partageant en un domaine de la phase 1 et un domaine de la phase 2, séparés par une paroi. Celle-ci a une énergie U_w proportionnelle, pour un échantillon tridimensionnel, à $N^{2/3}$. Si N tend vers l'infini, cette énergie est négligeable par rapport à $U_1 - U_2$, de sorte qu'elle ne joue pas un grand rôle dans l'analyse microcanonique. Mais, dans la probabilité canonique (2), elle introduit un facteur de la forme $\exp[-\text{Const.}N^{2/3}/T]$ de sorte que les états comportant une paroi ont une probabilité pratiquement nulle pour un grand système. Comme l'écrit Gross (2006) la statistique microcanonique est « plus riche » puisqu'elle autorise des états qui sont interdits dans l'ensemble canonique. Mais il est excessif de conclure, comme le fait cet auteur, « qu'une transition de phase de premier ordre ... est traitée correctement uniquement par la statistique microcanonique ». La statistique canonique n'interdit d'ailleurs pas la coexistence de deux phases comme par exemple l'eau liquide et sa vapeur, à volume fixé.

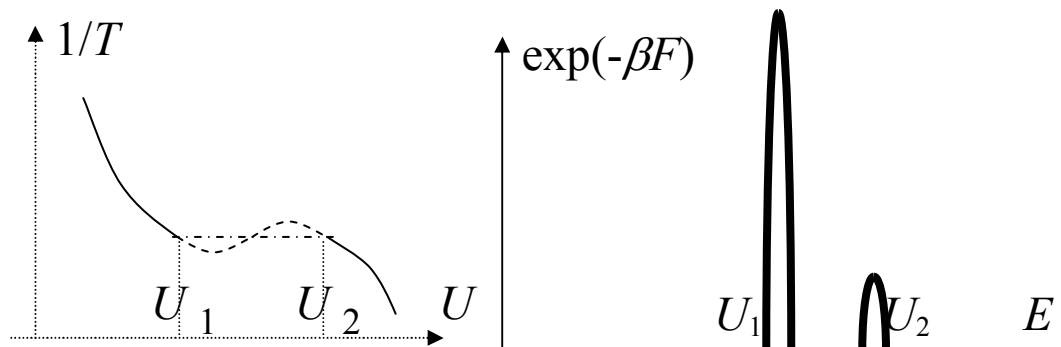


Figure 1. Transition de phase dans un grand système quand les deux phases ont des énergies différentes U_1 et U_2 . A gauche : Entre U_1 et U_2 , pour des interactions à courte portée, la fonction $T(U)$ tend vers un segment de droite (tirets et points). Pour des interactions à longue portée, la capacité calorifique dU/dT peut devenir négative (tirets) dans le cas microcanonique comme il est démontré au § 6. A droite, les deux maxima de la probabilité au voisinage d'une transition de phase du premier ordre. A T_c , les deux maxima deviennent égaux.

4. Interactions à longue portée ayant un intérêt physique : interactions gravitationnelles, coulombiennes, hydrodynamiques.

Rappelons quelques propriétés de ces interactions importantes en astronomie, en mécanique, en physique nucléaire.

a) *L'interaction gravitationnelle* (ou « gravité ») est un potentiel attractif proportionnel à $1/r$ entre deux masses à distance r . Le coefficient de proportionnalité est faible, de sorte que, dans un laboratoire, l'interaction gravitationnelle entre les atomes d'un gaz ou d'un liquide est négligeable. La pesanteur ne l'est pas, mais il est facile d'en tenir compte. La gravitation introduit pas contre des complications essentielles à l'échelle d'une galaxie, ou même d'un astre : l'écroulement gravitationnel, qui finit par transformer une étoile de masse supérieure à un certain seuil en trou noir, est une manifestation spectaculaire de la non extensivité.

b) *L'interaction coulombienne*, également en $1/r$, est bien différente, puisque répulsive entre charges de même signe. Aux échelles de longueur qui nous sont familières, toute charge électrique est généralement compensée par des charges électriques voisines de signe opposé,

de sorte que l'interaction coulombienne donne naissance à des interactions chimiques attractives, à courte portée. Le cas d'un noyau atomique est différent puisqu'il est chargé positivement. Son énergie est donnée approximativement par la formule de Bethe-Weizsäcker (Weizsäcker 1935) qui contient un terme non extensif dû à la répulsion coulombienne, proportionnel à $Z^2/A^{1/3}$ où Z est le nombre de protons et A le nombre de nucléons. Ce terme explique l'instabilité des noyaux trop lourds.

c) La *turbulence bidimensionnelle* (Robert & Sommeria 1992, Bouchet & Sommeria 2002) constitue une application récente inattendue de la mécanique statistique non-extensive. Les « particules » sont alors des tourbillons (Chavanis 2002). La longue portée de l'interaction vient de la décroissance de la vitesse en $1/r$ à distance r d'un tourbillon. Il faut chercher une situation bidimensionnelle, où la dissipation d'énergie est faible. On la trouve dans la planète Jupiter, dont les étranges propriétés sont décrites par Boischoy et al. (2005).

5. Modèles académiques d'interaction à longue portée. (Barré et al. 2005)

Pour ne pas affronter trop de difficultés à la fois, il est bon de considérer des modèles non réalistes, où certaines de ces difficultés sont exclues artificiellement. Ainsi, au lieu d'un fluide (sujet à des catastrophes telles que l'écroulement gravitationnel) nous considérerons un réseau rigide aux N points \mathbf{R}_i duquel sont placées des variables $S_i=1$ ou -1 (« spins »). Particulièrement populaire est le *modèle d'Ising* qui associe une énergie d'interaction $-J(r_{ij}) S_i S_j$ à une paire de spins à distance r_{ij} . Supposons

$$J(r)=C/r^\alpha \quad (4)$$

où C et α sont positifs. A basse température, tous les spins ont le même signe et l'énergie par spin est proportionnelle, en champ nul, à

$$\int \frac{r^2 dr}{r^\alpha} \approx \text{Const} + L^{3-\alpha} / (3-\alpha) \quad (5)$$

Le modèle est non extensif si l'énergie par spin dépend de la taille de l'échantillon, donc si le second terme l'emporte sur le premier, soit

$$\alpha \leq 3 \quad (6)$$

Il y a lieu d'introduire aussi un champ magnétique, mais celui-ci devra être capable d'entrer en compétition avec (5), ce qui impose, si $\alpha < 3$, qu'il soit proportionnel à $L^{3-\alpha}$, soit $N^{1-\alpha/3}$.

Le modèle d'Ising à interactions indépendantes de la distance ($\alpha=0$).

Ce problème très artificiel n'a pas d'autre intérêt que d'être exactement soluble. L'énergie du ne dépend en effet que de l'aimantation réduite $m = (1/N) \sum_i S_i$, comprise entre -1 et 1 . Elle

peut s'écrire, dans un champ magnétique Nh ,

$$U = -(J/2)N^2(m + h/J)^2 - N^2 h^2 / (2J) \quad (8)$$

L'entropie est pour N grand, en introduisant la constante de Boltzmann k_B ,

$$S / k_B = N \ln 2 - \frac{N}{2} [(1-m) \ln(1-m) + (1+m) \ln(1+m)] \quad (9)$$

L'entropie est donc proportionnelle à N alors que l'énergie (8) est proportionnelle à N^2 , en accord avec (7) pour $\alpha=0$. Pour que l'entropie joue un rôle pour N grand, il faut donc que la température soit proportionnelle à N . Plus généralement, si $\alpha \neq 0$ dans (4), alors T doit être proportionnelle à $N^{1-\alpha/3}$, donc tendre vers l'infini avec N .

La valeur $m(T)$ de m à l'équilibre canonique est donnée par le minimum de $F(m)=U(m)-TS(m)$. C'est un exercice facile, et d'ailleurs classique, car il correspond à l'approximation du champ moyen du modèle d'Ising habituel (à interactions entre premiers voisins) à ceci près que le facteur N habituel est devenu N^2 dans (8). Si on fait varier T à champ h constant, il n'y a de transition que quand $h=0$, et elle est continue (ou « du second ordre »). Si on fait varier h à T constant, il y a une transition du premier ordre pour $h=0$, où l'aimantation passe de m à $-$

m , mais l'énergie (8) n'a pas de discontinuité. En l'absence d'une telle discontinuité, nous savons par le raisonnement du paragraphe 3 que les distributions canonique et microcanonique sont équivalentes pour un système infini.

Une énergie continue à une transition du premier ordre, ce n'est pas le cas général. Le modèle d'Ising est une exception. Nous allons voir qu'on peut le modifier de façon que l'énergie ait une discontinuité.

6. capacité calorifique négative.

Un modèle intéressant (mais, hélas, tout aussi artificiel) s'obtient en remplaçant les interactions à deux corps du modèle d'Ising par des interactions à trois spins (ici encore, indépendantes de la distance). La formule (8) est alors remplacée par

$$U = -KN^3 m^3 - KhN^3 m \quad (10)$$

où le champ magnétique $N^2 h$ doit être proportionnel à N^2 pour pouvoir équilibrer les interactions entre spin. L'entropie est encore donnée par (9). L'équilibre canonique d'un grand système doit minimiser l'énergie libre $F(m) = U(m) - TS(m)$. Pour $h > 0$, ce minimum est obtenu pour une valeur $m(T)$ qui croît de 0 à 1 quand T/N décroît de l'infini à 0. Si h n'est pas trop grand, $m(T)$ a une discontinuité pour une certaine température de transition T_c . A T_c , $F(m)$ a deux minima égaux, 1 et 2 (Fig. 2). Ils correspondent à des valeurs différentes, U_1 et U_2 , de (10). Il n'y a pas de valeur de T telle que $U(m(T))$ soit située entre ces deux valeurs. Nous sommes donc dans le cas de la figure 1. Pourtant, si le système est isolé, il est possible de lui donner une aimantation arbitraire comprise entre m_1 et m_2 . Quand m varie entre m_1 et m_2 , l'énergie $U(m)$ varie entre U_1 et U_2 d'après (10), l'entropie $S(m)$ entre S_1 et S_2 d'après (9), et l'on peut définir une température par la formule habituelle $T = dU/dS$, où la dérivée est à volume et nombre de particules constants. On obtient ainsi la ligne en tirets de la figure 1. La température n'est plus une fonction croissante de U ! Dans la zone où elle est décroissante, la capacité calorifique $C = dU/dT$ est négative ! Cette propriété d'avoir une capacité calorifique microcanonique négative est un paradoxe curieux, mais aux conséquences limitées : ce qu'on mesure dans les laboratoires est la capacité calorifique canonique, qui est positive.

L'interaction gravitationnelle fournit un exemple non académique (mais plus difficile à traiter) de capacité calorifique négative³. Par contre, dans le cas d'un système d'électrons et de noyaux en interaction coulombienne, la capacité calorifique microcanonique (et aussi canonique, évidemment) est positive (Lebowitz & Lieb 1969).

7. Interactions dépendant de la distance.

Au paragraphe précédent nous avons considéré des interactions indépendantes de la distance r . Le cas d'interactions en $1/r^\alpha$ avec $0 < \alpha < 3$ est bien plus compliqué. Si on considère par exemple le modèle d'Ising défini par l'interaction (4), l'une des difficultés est que l'influence de la surface se fait sentir dans tout l'échantillon, l'intégrale $d^3 r' / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha$ variant continûment du centre au bord. L'état du système est donc décrit par un champ $m(\mathbf{r})$, et pas du tout par un seul paramètre d'ordre m comme dans les équations (8), (9) et (10). C'est la nature inhomogène des états qui nous a amenés à parler de capacité calorifique, et non de chaleur spécifique, expression appropriée pour un état homogène.

Un calcul précis comme au paragraphe précédent serait difficile, mais on s'attend à trouver, dans certains cas, une bande d'énergie interdite dans le cas canonique entre 2 valeurs U_1 et U_2 . Dans le cas microcanonique, cette bande n'est pas interdite, et un postulat plausible est que la température $T(U)$ est une fonction continue et dérivable pour $U_1 < U < U_2$. Comme $T(U_1) = T(U_2)$, il faut, soit que dT/dU soit négative pour certaines valeurs, soit que $dT/dU = 0$ partout entre U_1 et U_2 , comme c'est le cas pour des interactions à courte portée ainsi qu'on l'a vu au § 3. Pour des interactions à longue portée, il n'y a aucune raison qu'il en soit ainsi, $T(U)$

doit suivre la courbe en tirets de la figure 1, et la capacité calorifique $C=dU/dT$ doit être négative pour certaines valeurs de U .

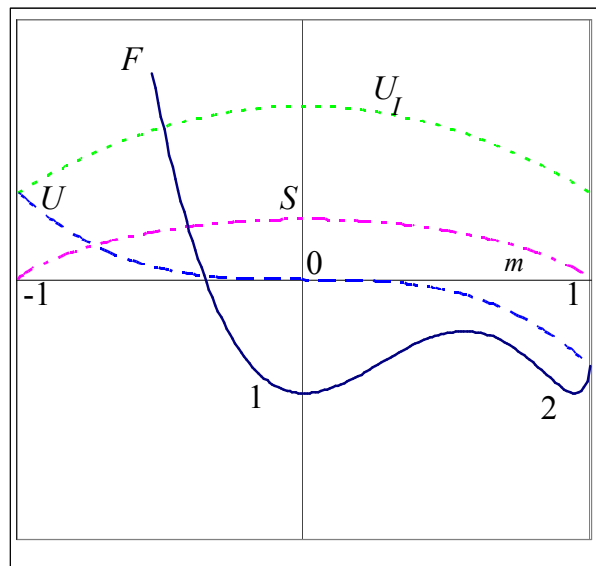


Figure 2. Énergie U (tirets) et entropie S (traits points) en fonction de l'aimantation m , dans le cas du modèle non extensif défini par (9) et (10) avec h voisin de 0 mais légèrement positif. L'énergie libre $F=U-TS$ (ligne continue) a deux minima dégénérés 1 et 2 pour une valeur critique de la température, correspondant à deux valeurs m_1 et m_2 de m (non indiquées sur la figure). Les unités de l'axe vertical sont différentes pour les 3 courbes, et dépendent du nombre N de spins. La courbe supérieure (pointillée) montre la forme symétrique de l'énergie U_I du modèle d'Ising pour la valeur critique $h=0$ du champ.

8. Conclusion

La lecture de certains manuels et de certains articles récents peut susciter une certaine confusion. La façon correcte de voir les choses semble être la suivante :

I- Particularités des interactions à longue portée non extensives :

- Elles sont implicitement exclues dans bien des manuels de thermodynamique.
- L'état d'équilibre n'est généralement pas homogène.
- Il n'y a pas de « limite thermodynamique », c'est-à-dire qu'on ne peut faire tendre N vers l'infini en maintenant les quantités intensives (température, densité, aimantation...) fixées (Barré & Bouchet 2007)

II- Statistique canonique.

a) La distribution canonique décrit correctement un système fini S (petit ou grand) en équilibre avec un thermostat, quelles que soient les interactions (à longue ou courte portée) à l'intérieur du système S (Thirring 1991). Des précautions sont cependant nécessaires : «*Dans des systèmes comportant des interactions à longue portée, l'ensemble canonique ne décrit pas les fluctuations d'un petit sous-système. Toutefois il peut décrire les fluctuations du système entier couplé à un thermostat avec un couplage infiniment faible*» (Bouchet & Barré 2005).

Cette analyse nuancée contraste avec l'affirmation radicale et probablement excessive de Combes & Robert (2007) que «*for [non-extensive] systems, ... the canonical formalism of Gibbs is no longer justified. ...*», ou avec le réquisitoire de Gross (2006) contre des «*errors of conventional canonical thermostatics* » que le lecteur a du mal à identifier.

b) La capacité calorifique canonique est positive dans tous les cas.

c) La distribution canonique est très commode, mais elle n'est évidemment pas applicable en astrophysique, alors que c'est là que les interactions à longue portée sont les plus importantes.

III- Statistique microcanonique.

- a) Elle permet des états de la matière qui sont interdits par la distribution canonique (Chavanis 2006a, Gross 2006).
- b) Dans le cas d'interactions à courte portée, la chaleur spécifique d'un grand système est la même que pour la distribution canonique. Elle est donc positive. Toutefois, certains états avec coexistence de phases sont permis, alors qu'ils sont impossibles avec la distribution canonique.
- c) Dans le cas d'interactions à longue portée, la capacité calorifique peut être négative. Notons que même la distribution microcanonique est également sujette à des hypothèses restrictives telles que l'ergodicité. Un manque éventuel d'ergodicité peut avoir de lourdes conséquences (Chabanoł *et al.* 2000, Thirring *et al.* 2003). On peut donc avoir à considérer des distributions qui ne sont ni canoniques ni microcanoniques. Particulièrement fameuse (et controversée) est « l'entropie de Tsallis » (Tsallis 1988), mais d'autres distributions « non-standard » peuvent aussi apparaître (Chavanis 2006b).

Je remercie Roger Balian, Julien Barré, Freddy Bouchet, Pierre-Henri Chavanis, Bernard Derrida, Joël Sommeria, et Constantino Tsallis pour de lumineuses discussions.

Notes.

1. Une interaction entre deux particules sera dite à longue portée si l'énergie décroît moins vite avec leur distance r qu'une exponentielle $\exp(-\kappa r)$, par exemple comme une fonction puissance $1/r^\alpha$. Remarquons toutefois que si α est trop grand, le système est extensif comme on le montre au paragraphe 5. Ainsi, les interactions de Van der Waals ($\alpha=6$) ne détruisent pas l'extensivité.
2. Les interactions coulombiennes détruisent l'extensivité dans le noyau, qui possède une charge électrique, mais non en physique de la matière condensée, où la charge totale est nulle et où les charges locales sont compensées par une charge d'écran de signe opposé. Voir le paragraphe 4.
3. Un exemple classique de capacité calorifique négative est celui d'une étoile qui a épuisé son combustible nucléaire : en émettant de l'énergie de radiation, elle se contracte et sa température augmente (Chavanis 2006a). Chavanis donne une démonstration générale de la capacité calorifique négative des systèmes « autogravitants » à partir de théorème du viriel, dont on trouve une démonstration appropriée à ces systèmes sur le site Internet <http://scienceworld.wolfram.com/physics/VirialTheorem.html>.

Références :

- J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, S. Ruffo (2005) *J. Stat. Phys.* **119**, 677
- J. Barré, F. Bouchet (2007) *C. R. Physique* **7**, 414
- A. Boischoț, A. Brahic, D. Gautier, G. Israël, P. Thomas (2005) „Jupiter“ dans l'Encyclopaedia Universalis
- F. Bouchet, J. Barré (2005) *J. Stat. Phys.* **118** 1073.
- F. Bouchet, J. Sommeria (2002) *J. Fluid. Mech.* **464**, 165–207.
- M.L. Chabanoł, F. Corson, Y. Pomeau (2000) *Europhys. Lett.* **50**, 148
- P.H. Chavanis (2002) Cf ci-dessous, Dauxois *et al.* (2002)
- P.H. Chavanis (2006a) *Int. J. M. Phys. B* **20**, 3113
- P.H. Chavanis (2006b) *C. R. Physique* **7**, 318
- F. Combes, R. Robert (2006) *C. R. Physique* **7**, 307
- T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens (Eds.), *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*, Lecture Notes in Phys., vol. 602, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2002.
- D.H.E. Gross (2006) *C. R. Physique* **7**, 311
- L. Landau, E. Lifshitz (1967) *Physique statistique* (Mir, Moscou)
- J.L. Lebowitz, E.H. Lieb (1969) *Phys. Rev. Lett.* **22**, 631
- E.H. Lieb, W. E. Thirring (1984) *Annals of Physics*, 494

F. Reif, "Physique statistique", Berkeley, Cours de physique volume 5, traduit par P. Turon (Armand Colin, 1994) ;
R. Robert, J. Sommeria (1992) Phys. Rev. Lett. **69**, 2776.
W. Thirring (1970). Z. Phys. **235**, 339
W. Thirring (1991) *A course in Mathematical physics* (Springer, Heidelberg)
W. Thirring, H. Narnhofer, H. A. Posch (2003) Phys. Rev. Lett. **91**, 130601
C. Tsallis (1988) J. Stat. Phys. **52**, 479
Weizsäcker, K. F. von, (1935) Zeitschrift für Physik **96**, 431. Voir aussi le site Internet:
http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Bethe-Weizs%C3%A4cke